

**7. Ανασκόπηση Δυναμικής Ανάλυσης
Πολυβαθμίων Συστημάτων (ΠΒΣ)**

Εαρινό εξάμηνο 2024

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>

Θέματα

- Εισαγωγή στα πολυβάθμια συστήματα (ΠΒΣ)
 - Εξισώσεις κίνησης
- Στατική Συμπύκνωση
- Ελεύθερη ταλάντωση πολυβάθμιων συστημάτων
 - Ελεύθερη ταλάντωση ΠΒΣ χωρίς απόσβεση
 - Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιομορφών
 - Ιδιότητες ιδιομορφών
 - Απόσβεση ΠΒΣ

- Μέθοδος *Stodolla-Vianello* για την επίλυση ιδιοπροβλημάτων
- Δυναμική ανάλυση ΠΒΣ με επαλληλία των ιδιομορφών
 - Ανάλυση ΠΒΣ για εξωτερικά επιβαλλόμενα δυναμικά φορτία
 - Ανάλυση ΠΒΣ για σεισμικές διεγέρσεις
- Φασματική ανάλυση
 - Μέγιστες ιδιομορφικές αποκρίσεις και οι συνδυασμοί τους
- Δυναμική ανάλυση με απευθείας ολοκλήρωση των ΔΕ κίνησης
 - Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς για δυναμική ανάλυση ΠΒΣ
 - Μέθοδος *Newmark* για δυναμική ανάλυση ΠΒΣ

Εισαγωγή στα ΠΒΣ- Εξισώσεις κίνησης

- Όταν κάποια κατασκευή δεν μπορεί να προσομοιωθεί ικανοποιητικά από ένα ΜΒΣ, τότε απαιτείται χρήση πολυβάθμιου συστήματος (ΠΒΣ).
- Η συντριπτική πλειονότητα των κτηριακών και άλλων κατασκευών πολιτικού μηχανικού δεν μπορούν να προσομοιωθούν ικανοποιητικά ως ΜΒΣ.
- Όλες σχεδόν οι κατασκευές έχουν ουσιαστικά κατανεμημένες τις μάζες τους και άπειρους βαθμούς ελευθερίας.
- Οι μάζες και τα στοιχεία δυσκαμψίας των περισσοτέρων κατασκευών είναι χωρικά κατανεμημένες αλλά μπορούν να διακριτοποιηθούν προσεγγιστικά και προσομοιωθούν ικανοποιητικά με χρήση Πολυβάθμιων Συστημάτων (ΠΒΣ), όπου οι μάζες μπορούν να θεωρηθούν συγκεντρωμένες σε πεπερασμένο αριθμό διακριτών βαθμών ελευθερίας.

Όταν κάποια κατασκευή δεν μπορεί να προσομοιωθεί ικανοποιητικά από ένα ΜΒΣ απαιτείται η χρήση πολυβάθμιου συστήματος (ΠΒΣ) για την προσομοίωσή της.

Οι εξισώσεις κίνησης ενός ΠΒΣ, με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, έχουν τις εξής μορφές για τις περιπτώσεις είτε εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων, $\underline{P}(t)$, είτε σεισμικής διέγερσης του εδάφους θεμελίωσης, $\ddot{u}_g(t)$, αντίστοιχα:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{P}(t)$$

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

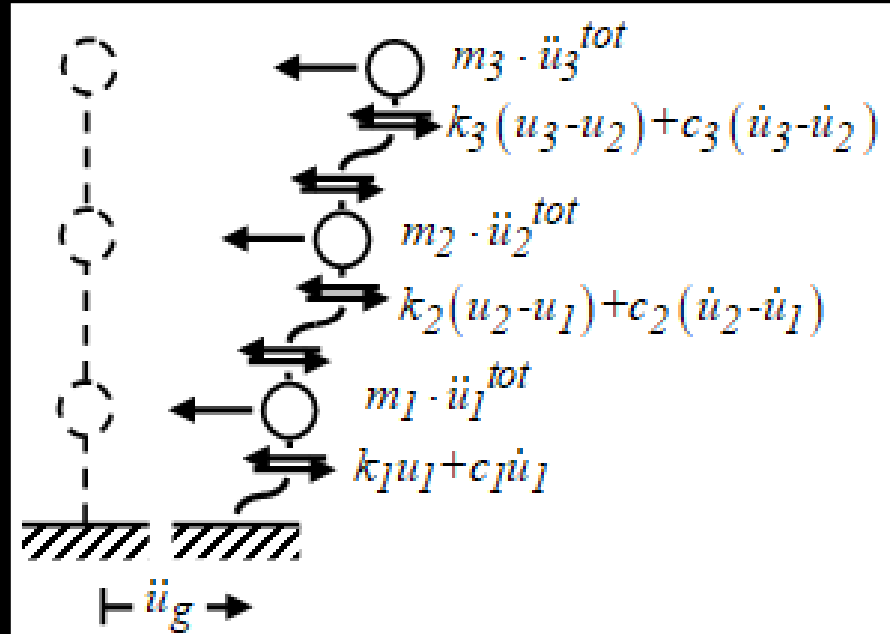
όπου \underline{M} , \underline{C} και \underline{K} είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας.

Τα διανύσματα $\ddot{\underline{u}} = \ddot{\underline{u}}(t)$, $\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}(t)$ και $\underline{u} = \underline{u}(t)$ αντιπροσωπεύουν τις σχετικές επιταχύνσεις, ταχύτητες και μετακινήσεις των δυναμικών ΒΕ αντίστοιχα.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}_{g}(t)$$

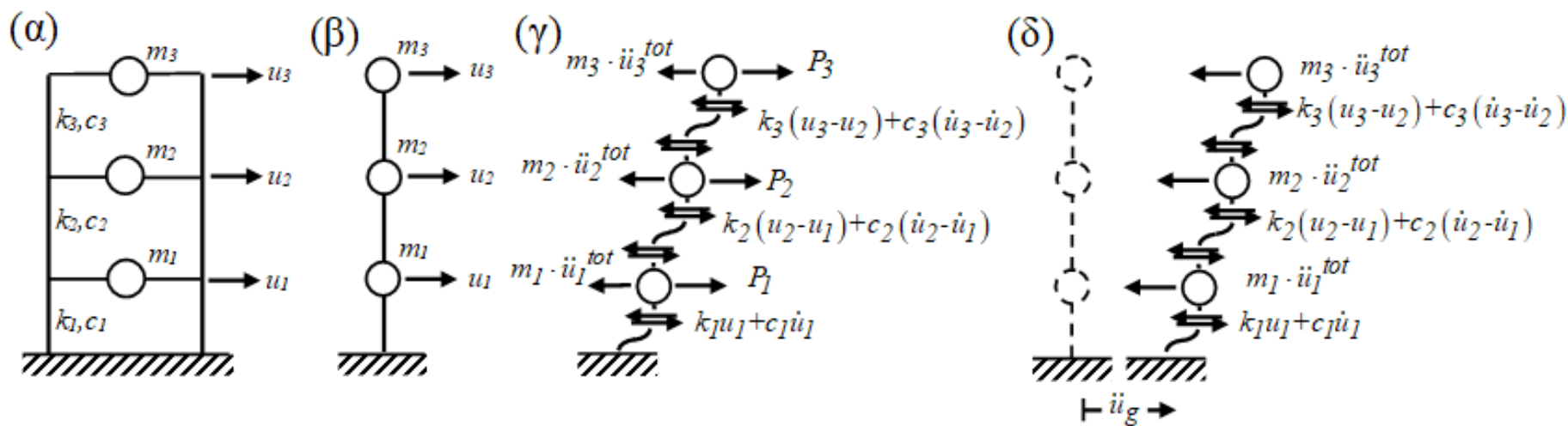
Το διάνυσμα επιρροής $\underline{\underline{1}}$ εκφράζει την επιρροή της κατανομής των μαζών σε σχέση με τους αντίστοιχους δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας (BE).

Στην περίπτωση ενός κτιρίου με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου, το διάνυσμα επιρροής, $\underline{\underline{1}}$, ισούται με το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$.



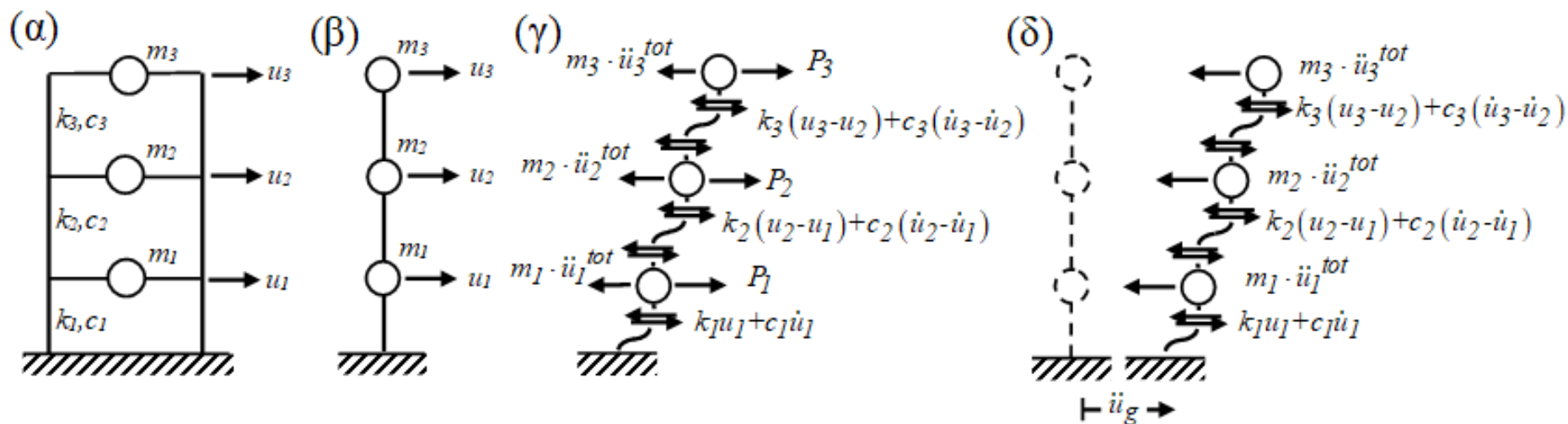
Χρησιμοποιώντας είτε το 2^ο Νόμο του Νεύτωνα, είτε την Αρχή D' Alembert μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης, σχηματίζοντας τα σχετικά μητρώα, μάζας, δυσκαμψίας και απόσβεσης.

Παραδείγματος χάριν, εξετάζοντας το τριώροφο κτίριο του σχήματος (α), το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει συμπεριφορά διατμητικού προβόλου με αμελητέες αξονικές παραμορφώσεις και παραδοχή πλήρως άκαμπτων οριζόντιων ζυγωμάτων, υπάρχουν 3 δυναμικοί ΒΕ, οι οριζόντιες μετακινήσεις των τριών ορόφων (α-β).



Σε αυτήν την περίπτωση η οριζόντια δυσκαμψία του κάθε ορόφου, ισούται με το άθροισμα των οριζόντιων δυσκαμψιών όλων των κατακόρυφων στοιχείων του ορόφου. Επιπλέον, θεωρώντας αβαρή τα υποστυλώματα, η μάζα του κάθε ορόφου, θεωρείται συγκεντρωμένη στο ύψος των ζυγωμάτων του κάθε ορόφου, παρά το γεγονός ότι πρακτικά η μάζα είναι κατανεμημένη σε όλους τους ορόφους του κτηρίου.

Βάσει της παραμορφωμένης μορφής του πλαισίου (Σχ. γ-δ) μπορούν να σχηματιστούν οι εξισώσεις κίνησης, ως εκφράσεις δυναμικής ισορροπίας, του τριώροφου πλαισίου για εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις:



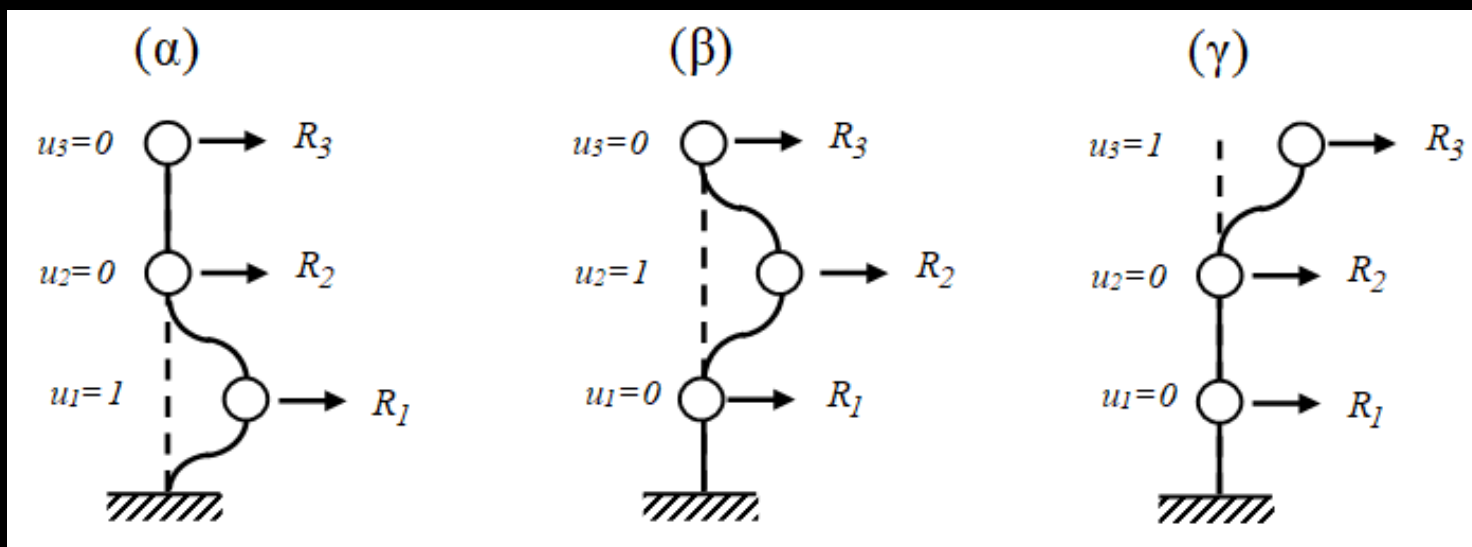
$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{u}(t) = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

όπου: $\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$ το μητρώο μάζας,

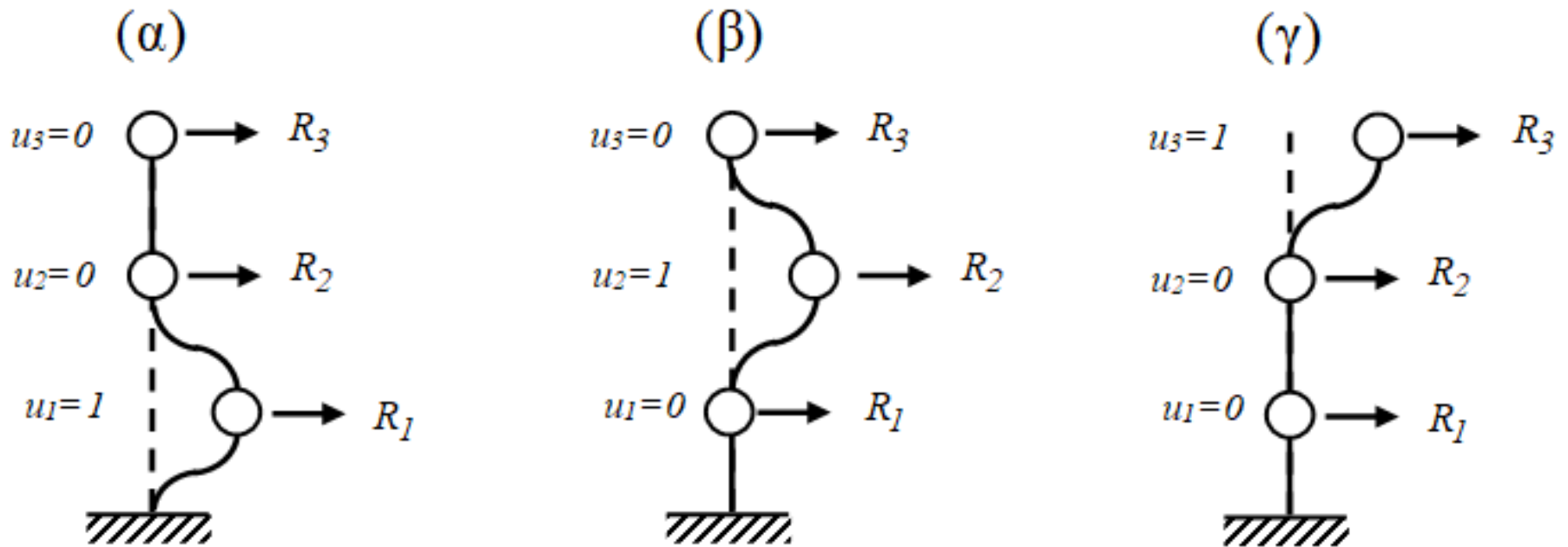
$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$ το μητρώο απόσβεσης,

$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$ το μητρώο δυσκαμψίας.

Για να σχηματιστεί το μητρώο δυσκαμψίας του τριώροφου πλαισίου, επιβάλλεται μοναδιαία μετακίνηση u_1 , και διατηρώντας τις υπόλοιπες μετακινήσεις μηδενικές, τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του μητρώου δυσκαμψίας ισούνται με τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις ώστε να ισορροπούν όλοι οι δυναμικοί ΒΕ (Σχ. α). Στη συνέχεια, επιβάλλοντας μοναδιαία μετακίνηση u_2 , διατηρώντας μηδενικούς τους υπόλοιπους δύο ΒΕ, προσδιορίζονται τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης του μητρώου δυσκαμψίας (Σχ. β). Και, τέλος, επιβάλλοντας μοναδιαία μετακίνηση u_3 , διατηρώντας μηδενικές τους υπόλοιπους δύο ΒΕ, προσδιορίζονται τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης του μητρώου δυσκαμψίας (Σχ. γ). Με αυτόν τον τρόπο μπορεί σταδιακά να σχηματιστεί το μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας, προσδιορίζοντας την κάθε στήλη του με εφαρμογή μοναδιαίας μετακίνησης στον αντίστοιχο ΒΕ, καθώς διατηρούνται όλες οι άλλες μετακινήσεις μηδενικές.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στην κάθε μάζα είναι οι εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις $\underline{P}(t)$, οι ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης $\underline{K} \cdot \underline{u}(t)$, οι δυνάμεις απόσβεσης $\underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t)$ και οι αδρανειακές δυνάμεις $\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}_{\text{tot}}(t)$, όπου οι απόλυτες μετακινήσεις ισούνται με το άθροισμα των σχετικών μετακινήσεων των μαζών της ανωδομής και των μετακινήσεων του εδάφους, $\underline{u}_{\text{tot}}(t) = \underline{u}(t) + \underline{u}_g(t)$.



Στην περίπτωση όπου οι μόνες δράσεις είναι εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία, οι αδρανειακές δυνάμεις ισούνται με $\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t)$, αφού είναι μηδενικές οι επιταχύνσεις του εδάφους.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση σεισμικής κίνησης, οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από εφαρμογή της κίνησης του εδάφους $\underline{u}_g(t)$ και έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \underline{\ddot{u}}_g(t)$$

όπου σ' αυτή την περίπτωση $\underline{1} = [1 \ 1 \ 1]^T$ και $P_{\text{eff}}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \underline{\ddot{u}}_g(t)$

Αφού, οι αδρανειακές δυνάμεις ισούνται με: $\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}_{\text{tot}}(t) = \underline{M} \cdot (\underline{\ddot{u}}(t) + \underline{1} \cdot \underline{\ddot{u}}_g(t))$

Και, μεταφέροντας τον όρο $\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \underline{\ddot{u}}_g(t)$ στο δεξί μέρος του συστήματος ΔΕ σχηματίζονται οι ΔΕ κίνησης για την περίπτωση σεισμικής διέγερσης $\underline{\ddot{u}}_g(t)$ του εδάφους θεμελίωσης της κατασκευής.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{P}}(t)$$

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}_{\text{bg}}(t)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι εξισώσεις κίνησης ενός ΠΒΣ είναι ένα συζευγμένο σύστημα συνήθων ΔΕ 2^{ης} τάξεως με σταθερούς συντελεστές, το οποίο όμως, όπως είναι, δεν μπορεί άμεσα να επιλυθεί ξεχωριστά για την κάθε ΔΕ.

Γενικά, αυτό το σύστημα ΔΕ, είτε πρέπει να επιλυθεί απευθείας γιατί οι εξισώσεις συνδέονται μέσω των μη μηδενικών εκτός διαγώνιων στοιχείων των μητρώων, είτε με κάποιο κατάλληλο μετασχηματισμό, όπως θα δούμε με τη βοήθεια των ιδιομορφών της κατασκευής, να μετασχηματιστεί σε ένα σύστημα ανεξάρτητων ΔΕ, όπως αυτές των ΜΒΣ, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα η κάθε μια.

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{P}}(t)$$

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}_{g_i}(t)$$

Σε κάποιες περιπτώσεις τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας μπορεί να έχουν όλα τα στοιχεία τους μη μηδενικά. Συνήθως όμως, όπως σε περιπτώσεις κτιρίων με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου, το μητρώο μάζας είναι διαγώνιο ενώ στην πράξη το μητρώο απόσβεσης προσδιορίζεται έμμεσα με εκτίμηση κάποιων λόγων απόσβεσης ζ_i , αφού είναι πολύ δύσκολος ο καθορισμός των συντελεστών απόσβεσης c_i .

Έτσι, το σύστημα ΔΕ είναι συζευγμένο συνήθως λόγω των μη μηδενικών στοιχείων εκτός της διαγωνίου του μητρώου δυσκαμψίας και έμμεσα του μητρώου απόσβεσης, όταν αυτό εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας, θεωρώντας απόσβεση κατά Rayleigh, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα διώροφου πλαισίου (με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου)

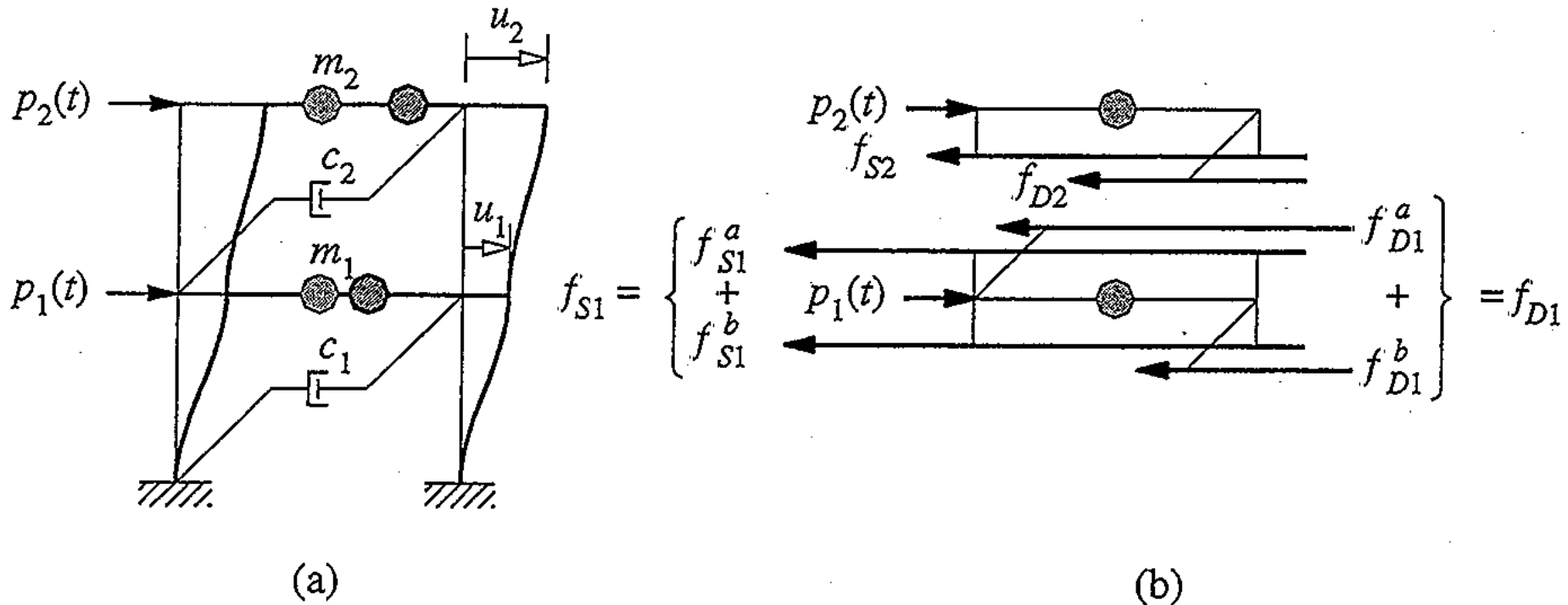


Figure 9.1.1 (a) Two-story shear frame; (b) forces acting on the two masses.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

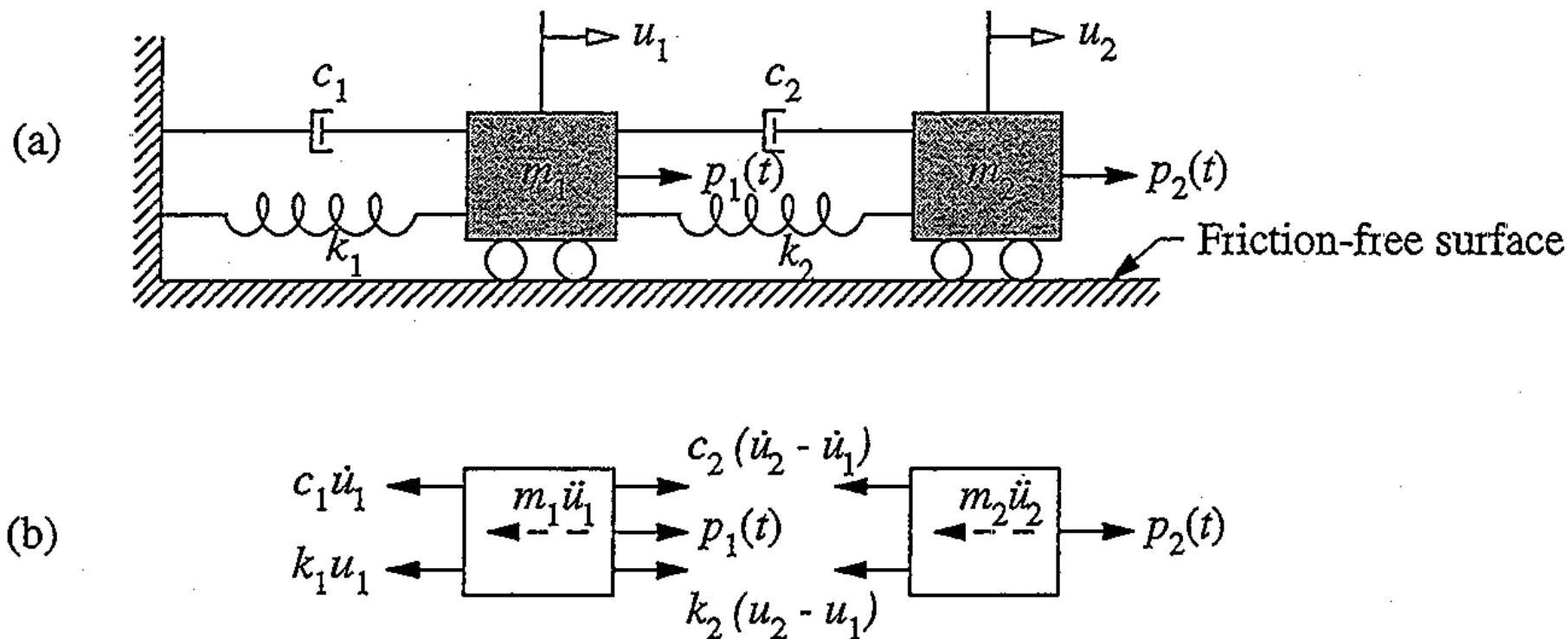
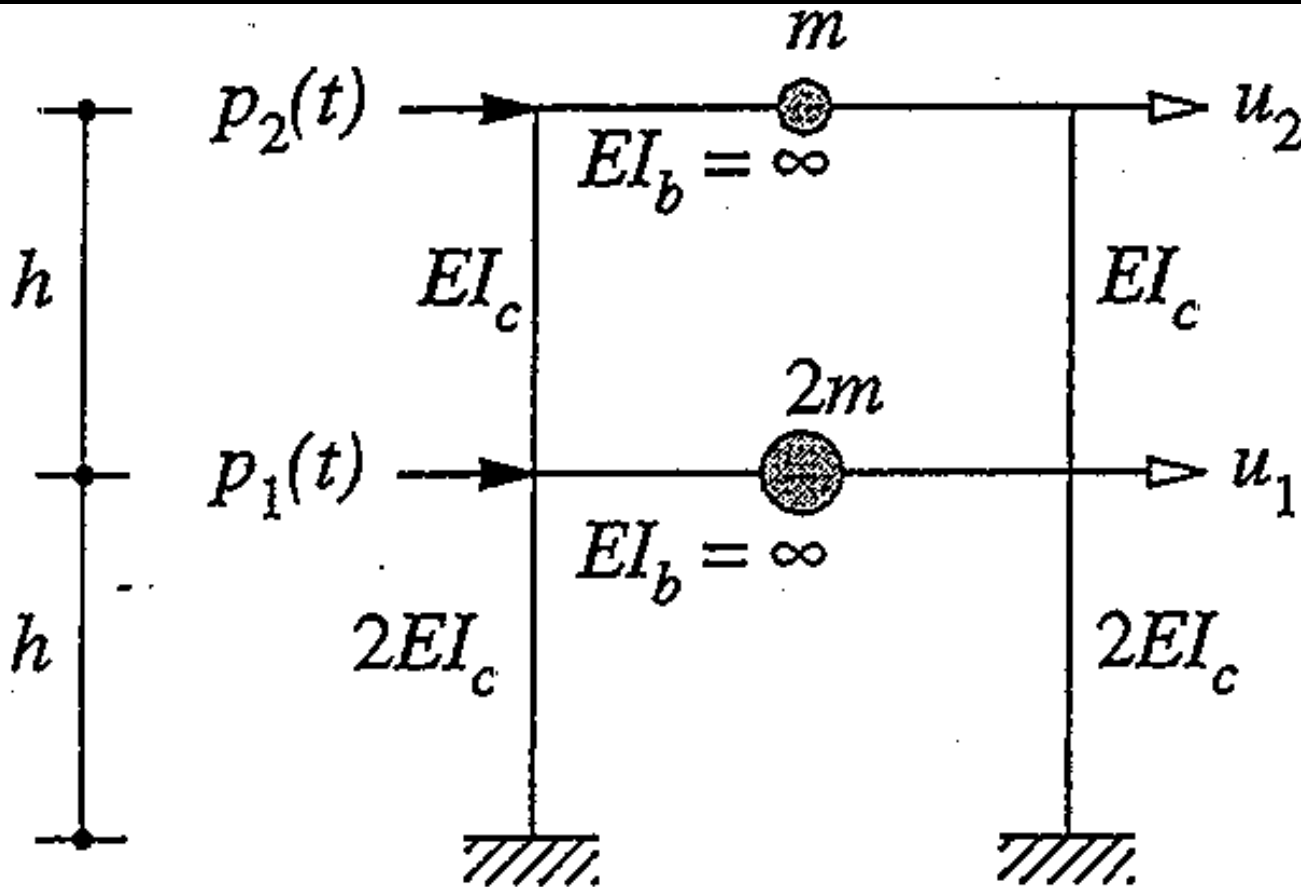


Figure 9.1.3 (a) Two-degree-of-freedom system; (b) free-body diagrams.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

Παράδειγμα διώροφου πλαισίου (με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου)



Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

Figure E9.1

Συστατικά δυσκαμψίας, απόσβεσης και μάζας

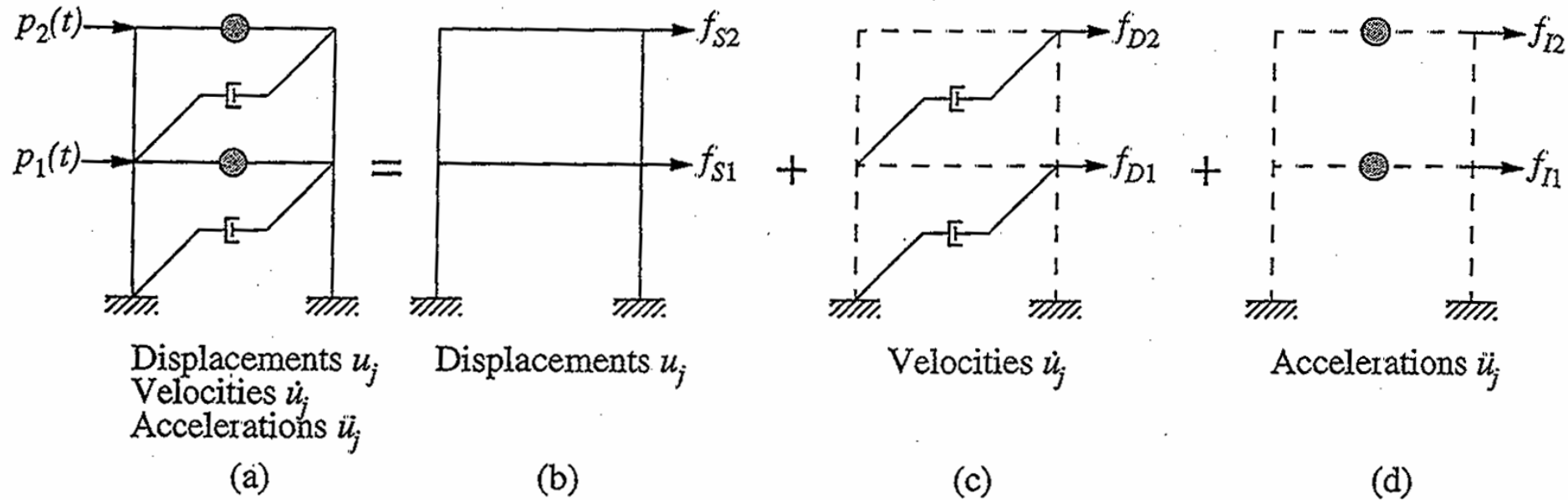


Figure 9.1.4 (a) System; (b) stiffness component; (c) damping component; (d) mass component.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Πλαίσιο με γενικευμένη συμπεριφορά

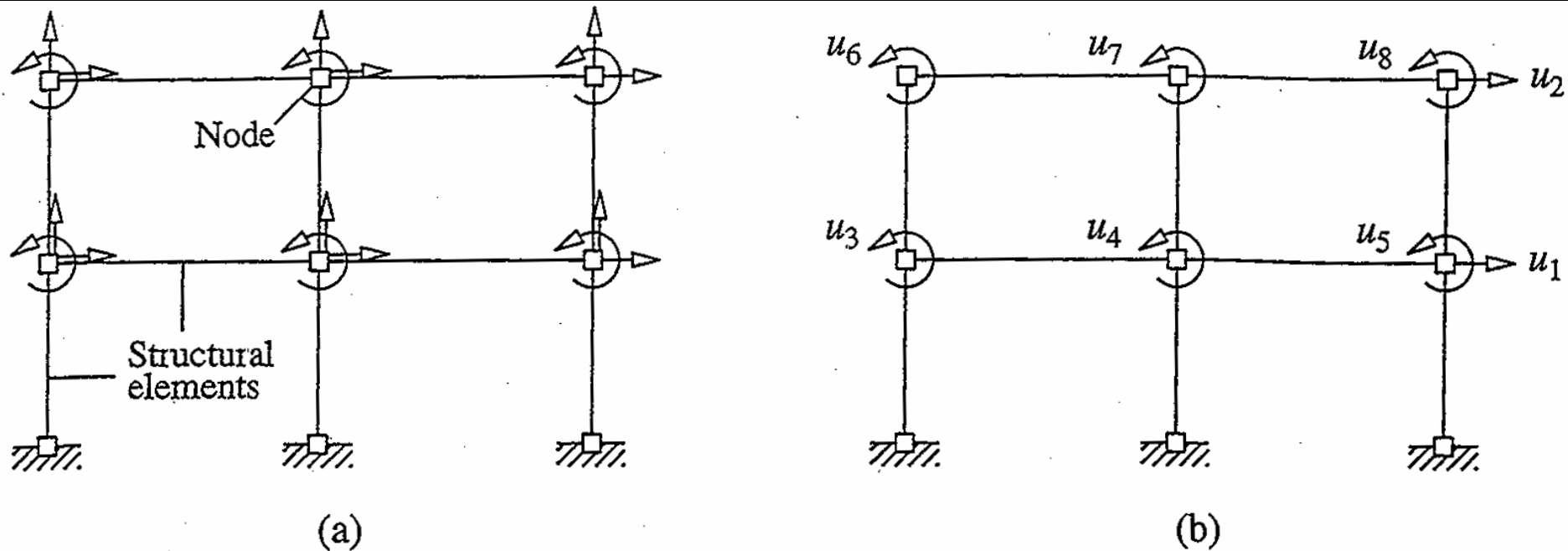


Figure 9.2.1 Degrees of freedom: (a) axial deformation included, 18 DOFs; (b) axial deformation neglected, 8 DOFs.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

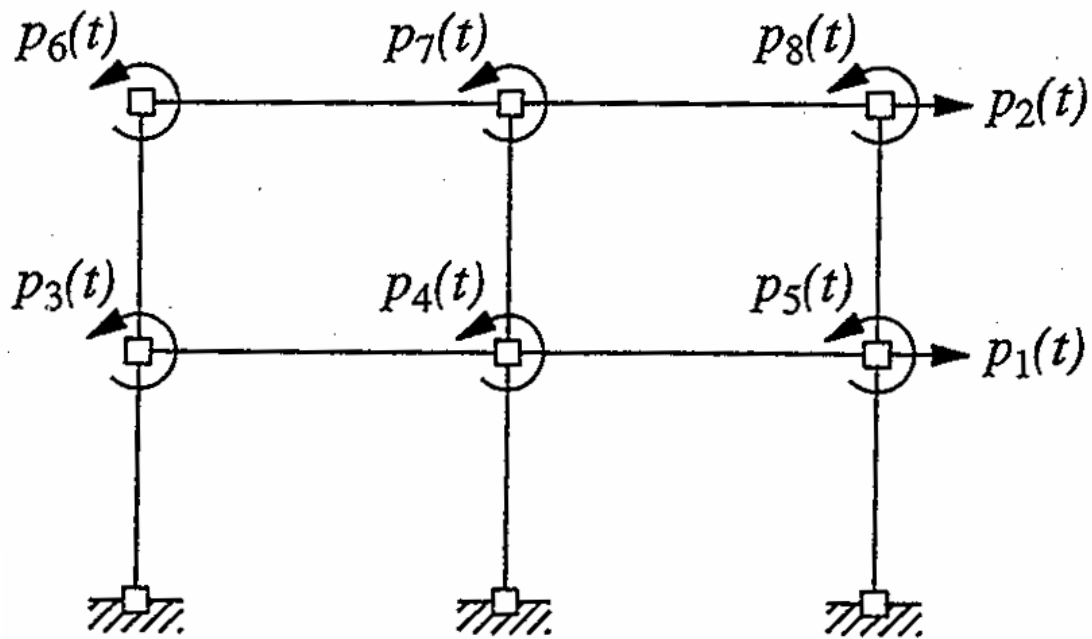
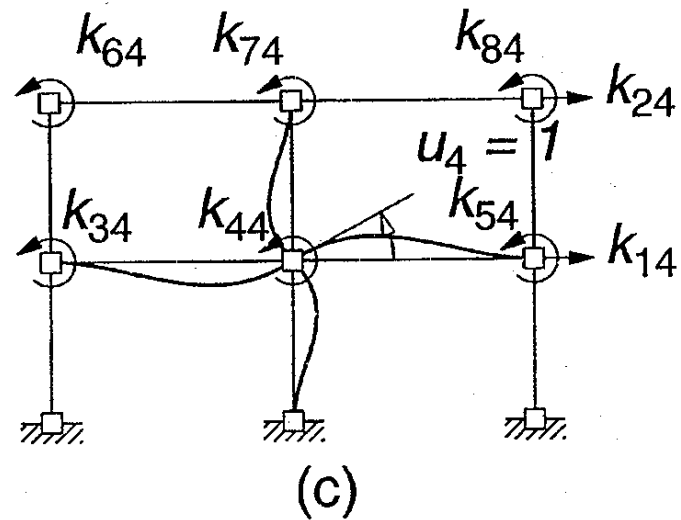
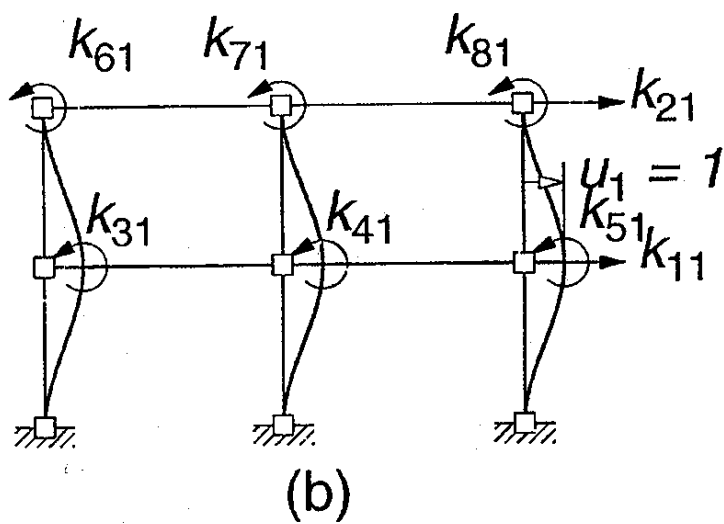
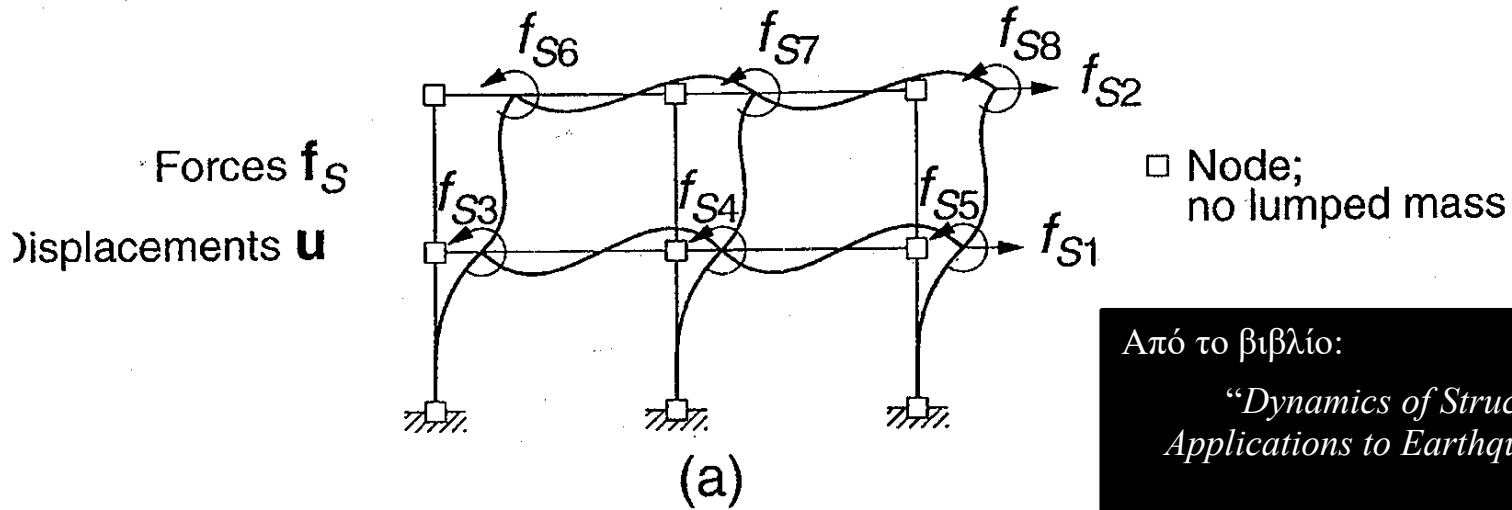


Figure 9.2.2 External dynamic forces, $p(t)$.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

Stiffness influence coefficients



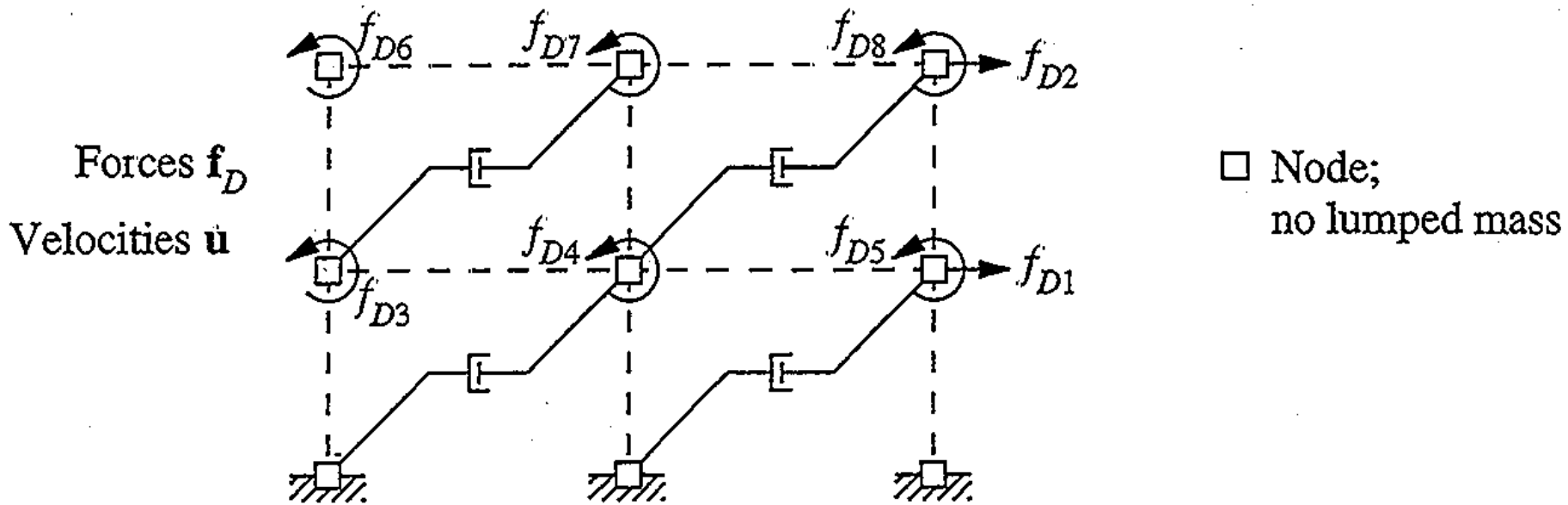


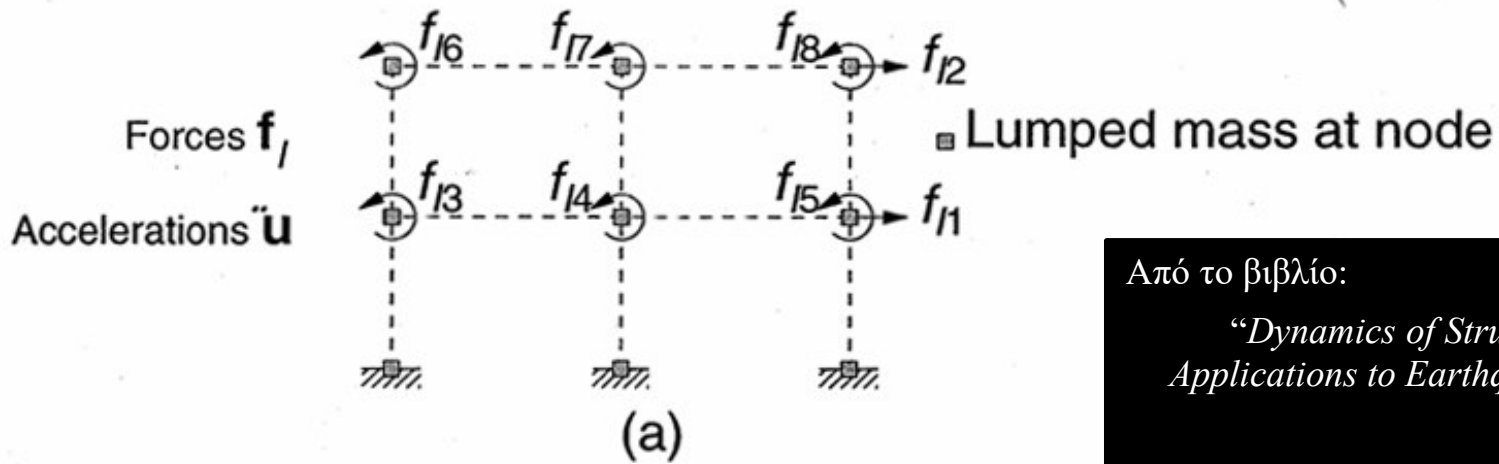
Figure 9.2.4 Damping component of frame.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Mass influence coefficients



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

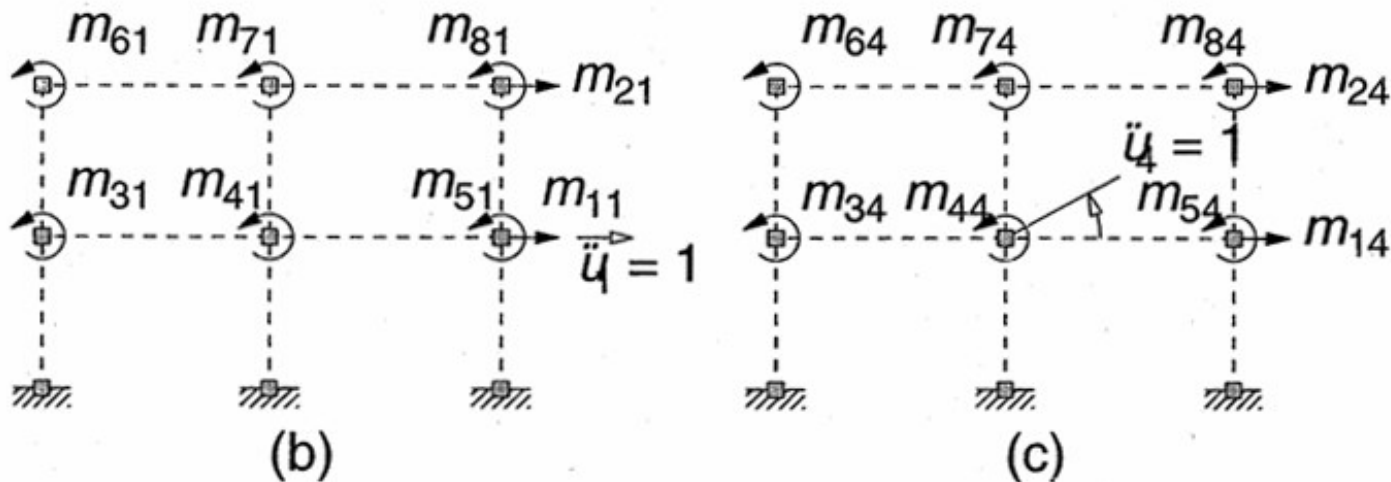


Figure 9.2.5 from Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Συγκέντρωση μαζών και διακριτοποίηση

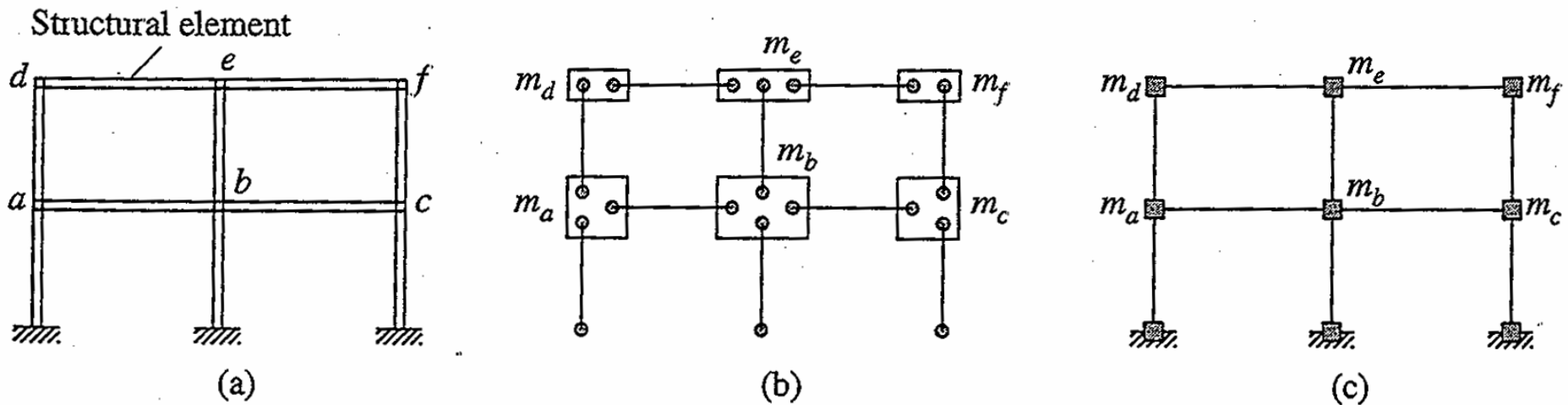
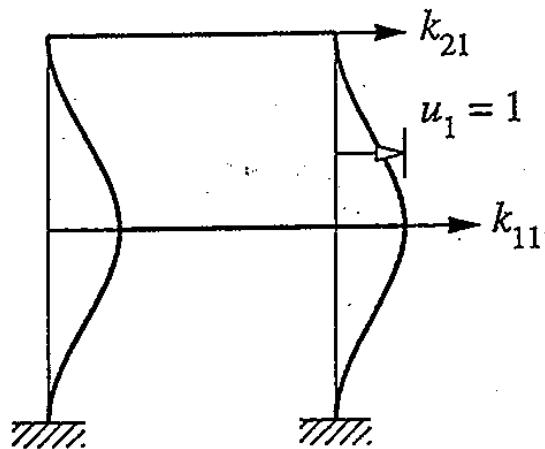


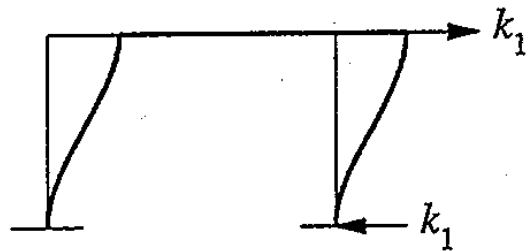
Figure 9.2.6 Lumping of mass at structural nodes.

Από το βιβλίο:

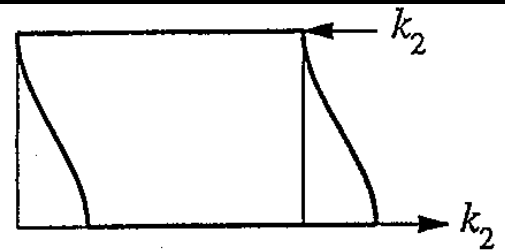
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra



(a)



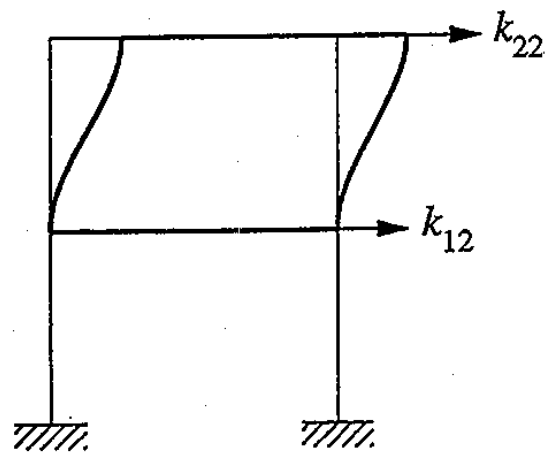
(b)



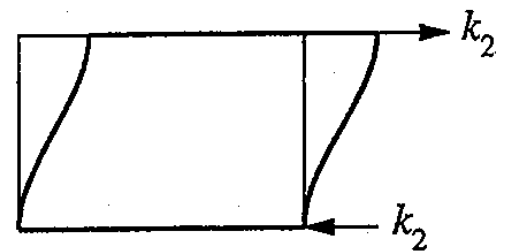
Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

$u_2 = 1, u_1 = 0$ $u_2 = 1$



(c)



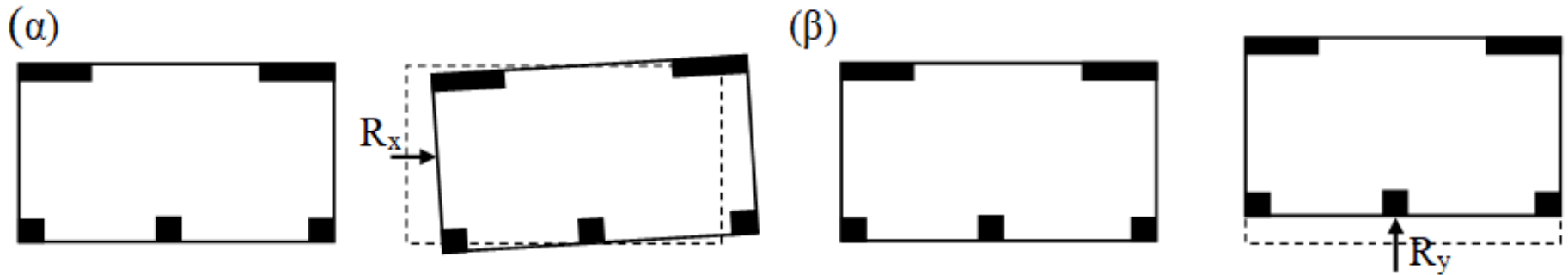
(d)

Εκκεντρότητες σε Κάτοψη: Ανεπιθύμητες Στροφές

Κτίρια που δεν είναι συμμετρικά σε κάτοψη, και συνεπώς υπάρχει εκκεντρότητα μεταξύ του κέντρου μάζας και του κέντρου δυσκαμψίας σε κάτοψη, ακόμη και όταν υπόκεινται σε σεισμική διέγερση στη μια μόνο διεύθυνση, παρουσιάζουν κίνηση και στις δύο διευθύνσεις καθώς και στροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

Έτσι, έστω και εάν δεχθούμε συμπεριφορά διατμητικού προβόλου και θεωρήσουμε τις μάζες μιας κατασκευής συγκεντρωμένες στους ορόφους, σε κάθε όροφο θα πρέπει να λάβουμε υπόψη 3 ΒΕ, δύο οριζόντιες μεταθέσεις και μία στροφή (γύρω από τον κατακόρυφο άξονα), ακόμη και υπό σεισμική διέγερση μόνο στη μια οριζόντια διεύθυνση, λόγω των στροφών που θα προκύψουν βάσει των εκκεντροτήτων της κατασκευής.

Παραδείγματος χάριν, όταν επιβληθεί στο πιο κάτω χωρικό μονώροφο πλαίσιο, μια δύναμη στη X διεύθυνση, λόγω εκκεντροτήτων που προκύπτουν από τις ασυμμετρίες των κατακόρυφων στοιχείων, θα προκληθούν μεταθέσεις στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις και στροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα. Συνεπώς, ακόμη και για αυτό το μονώροφο πλαίσιο απαιτούνται τουλάχιστον 3 δυναμικοί ΒΕ για την προσομοίωσή του υπό εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία, όπως και σεισμικές διεγέρσεις, στη X διεύθυνση.



Αντιθέτως, όταν επιβληθεί μια δύναμη στην Y οριζόντια διεύθυνση, λόγω του ότι είναι συμμετρική η κατασκευή σε εκείνη τη διεύθυνση, θα προκληθεί μετάθεση μόνο στην Y διεύθυνση χωρίς να προκληθεί οποιαδήποτε στροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

Ακόμη και ένα μονώροφο με εκκεντρότητες σε κάτοψη, θα πρέπει να γίνει χωρική δυναμική ανάλυση αφού είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη τα στροφικά φαινόμενα που θα προκληθούν από τις εκκεντρότητες που υπάρχουν. Σε μια τέτοια περίπτωση το μητρώο δυσκαμψίας θα είναι διαστάσεων 3×3 , αφού θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι δύο ΒΕ μετάθεσης στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις και ο ΒΕ που αφορά τη στροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα. Το μητρώο δυσκαμψίας, $\underline{\mathbf{K}}$, μπορεί να προσδιοριστεί από διαδοχική επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης για τον κάθε ΒΕ των μετακινήσεων $\underline{\mathbf{U}}$, διατηρώντας τους υπόλοιπους δύο μηδενικούς, και ισορροπία των δυνάμεων, που εξωτερικά θα πρέπει να επιβληθούν για να προκαλέσουν τις συγκεκριμένες μορφές παραμόρφωσης.

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\ddot{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_\theta \end{bmatrix}$$

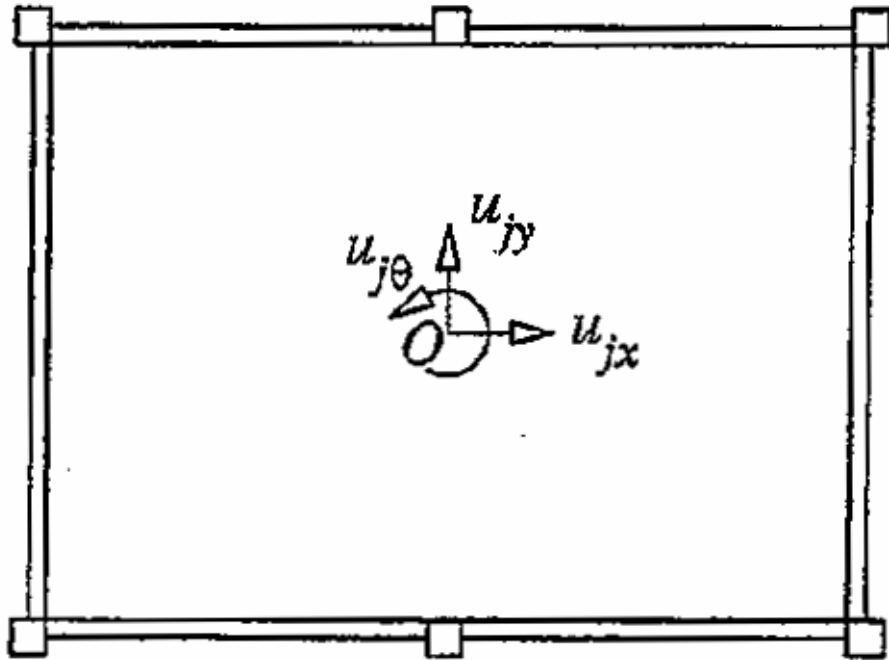
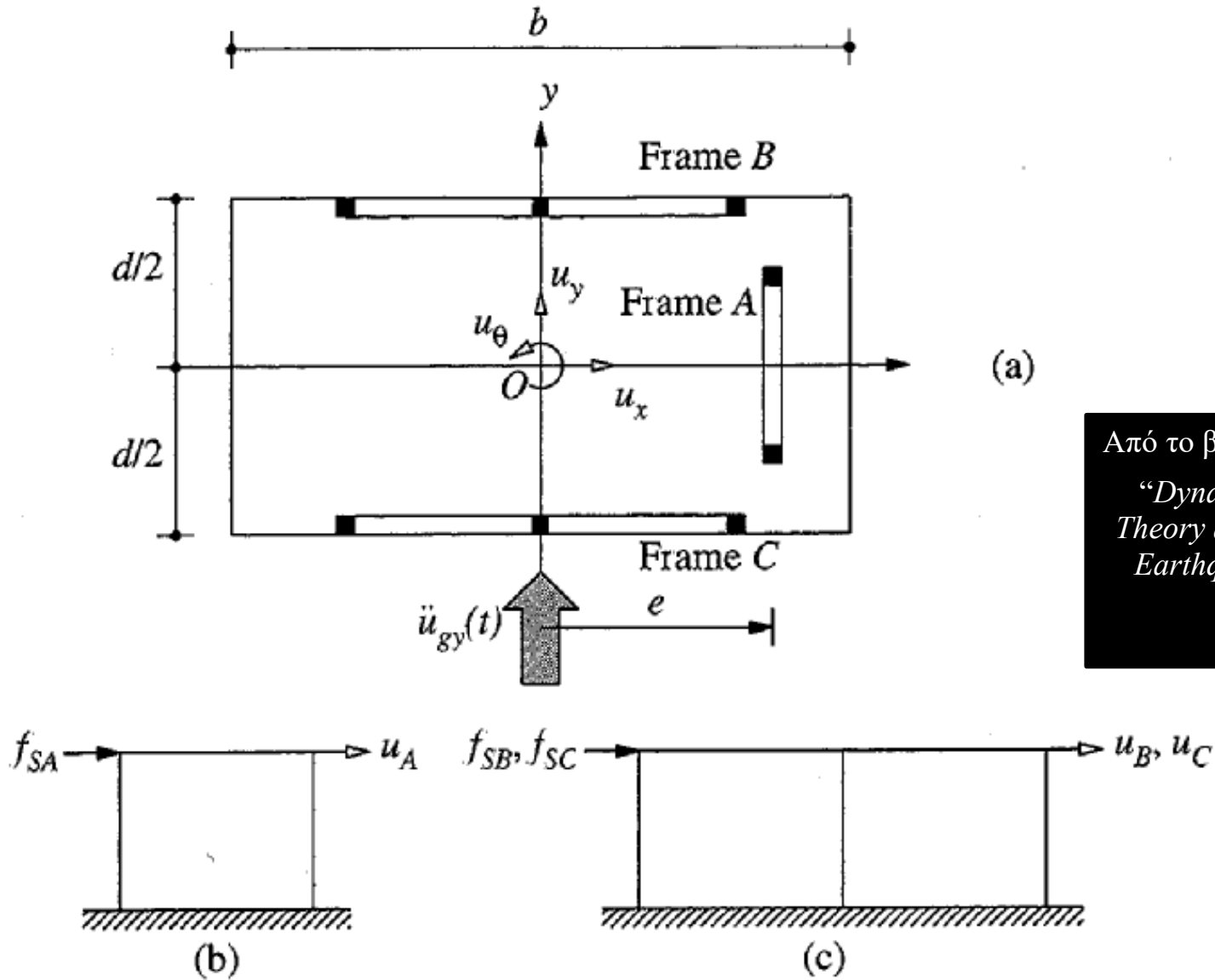


Figure 9.2.7 Degrees of freedom for in-plane-rigid floor diaphragm with distributed mass.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

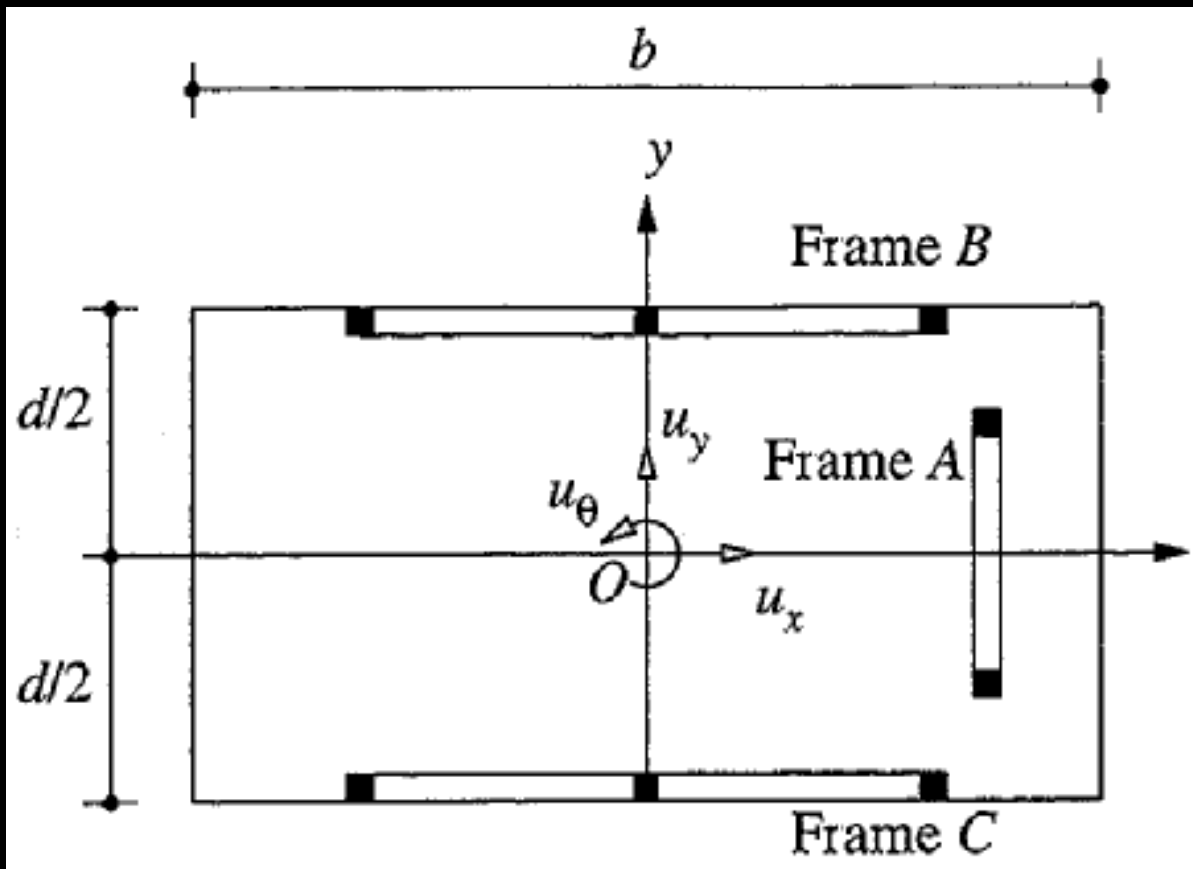
Παράδειγμα εκκεντρότητας σε κάτοψη



Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*
- Anil K. Chopra

Figure 9.5.1 One-story system considered: (a) plan; (b) frame A; (c) frames B and C.



Από το βιβλίο:

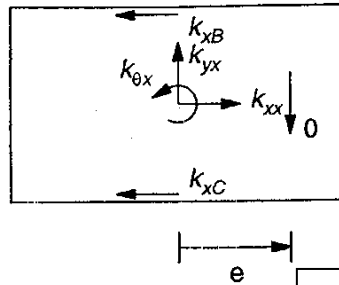
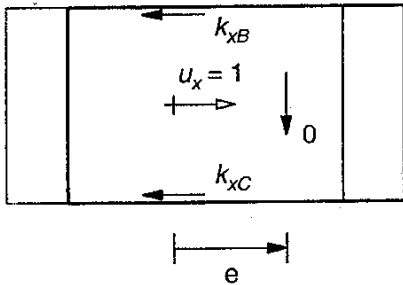
*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*
- Anil K. Chopra

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{S\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix}$$

Evaluation of stiffness matrix

(a) $u_x = 1, u_y = u_\theta = 0$

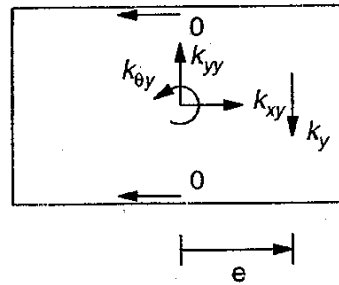
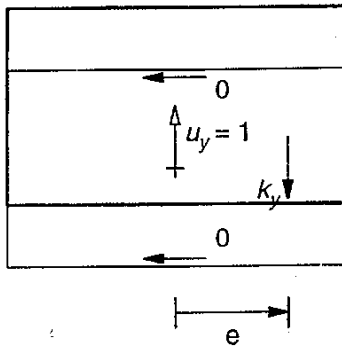


$$k_{xx} = k_{xB} + k_{xC}$$

$$k_{yx} = 0$$

$$k_{\theta x} = (d/2)(k_{xC} - k_{xB})$$

(b) $u_x = 0, u_y = 1, u_\theta = 0$



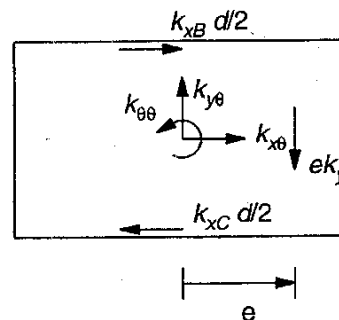
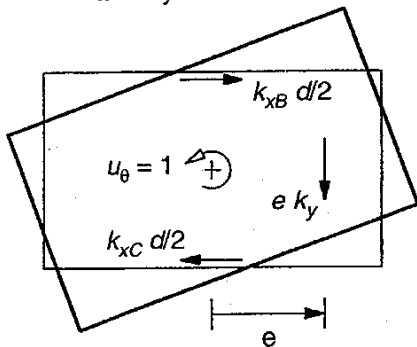
$$k_{xy} = 0$$

$$k_{yy} = k_y$$

$$k_{\theta y} = e k_y$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & e k_y \\ (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) & e k_y & e^2 k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC}) \end{bmatrix}$$

(c) $u_x = u_y = 0, u_\theta = 1$



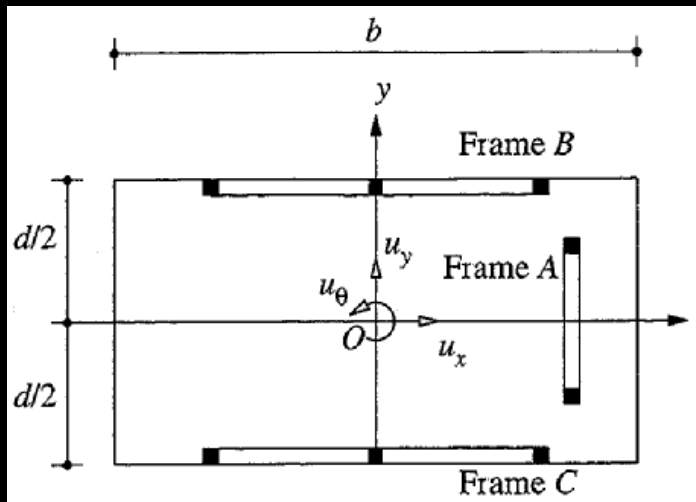
$$k_{x\theta} = (d/2)(k_{xC} - k_{xB})$$

$$k_{y\theta} = e k_y$$

$$k_{\theta\theta} = e^2 k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC})$$

Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*
- Anil K. Chopra



$$\begin{Bmatrix} f_{Ix} \\ f_{Iy} \\ f_{I\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \\ \ddot{u}_{g\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^t = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_g$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & ek_y \\ (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) & ek_y & e^2k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC}) \end{bmatrix}$$

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{x\theta} \\ 0 & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_O\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{Bmatrix}$$

Είναι σημαντικό ο μηχανικός να μορφώνει και να διαστασιολογεί κατάλληλα το φορέα ώστε να μην υπάρχουν, ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιούνται, εκκεντρότητες μεταξύ του κέντρου μάζας του και του κέντρου δυσκαμψίας του κάθε ορόφου.

Στατική Συμπύκνωση

Στη δυναμική ανάλυση, η οποία έχει σημαντικά υψηλότερο κόστος από τη στατική ανάλυση, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη όλοι οι δυναμικοί ΒΕ, δηλαδή οι ΒΕ βάσει των οποίων αναπτύσσονται σημαντικές αδρανειακές δυνάμεις και δυνάμεις απόσβεσης.

Δεν υπάρχει λόγος συμπερίληψης όλων των στατικών ΒΕ στις ΔΕ εξισώσεις κίνησης από τις οποίες μπορούν να αφαιρεθούν με στατική συμπύκνωση χρησιμοποιώντας υπομητρώα, ώστε να περιοριστεί το υπολογιστικό κόστος.

Αν διαχωρίσουμε τις μετακινήσεις σε στατικούς \underline{u}_s και δυναμικούς \underline{u}_d βαθμούς ελευθερίας, οι εξισώσεις κίνησης διαμορφώνονται ως ακολούθως:

- για εξωτερικά επιβαλλόμενα δυναμικά φορτία $\underline{P}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_d \\ \underline{\ddot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_d \\ \underline{\dot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{dd} & \underline{K}_{ds} \\ \underline{K}_{sd} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_d \\ \underline{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_d \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

- για σεισμικές διεγέρσεις του εδάφους θεμελίωσης:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_d \\ \underline{\ddot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_d \\ \underline{\dot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{dd} & \underline{K}_{ds} \\ \underline{K}_{sd} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_d \\ \underline{u}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

$$\Rightarrow \underline{P}_{\text{eff}}(t) = - \begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Και στις δύο περιπτώσεις μπορούν οι στατικοί βαθμοί ελευθερίας \underline{u}_s να εκφραστούν συναρτήσει των δυναμικών βαθμών ελευθερίας \underline{u}_d :

$$\underline{K}_{sd} \cdot \underline{u}_d + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{u}_s = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}_s = -\underline{K}_{ss}^{-1} \cdot \underline{K}_{sd} \cdot \underline{u}_d$$

$$\Rightarrow \underline{M}_{dd} \cdot \underline{\ddot{u}}_d + \underline{C}_{dd} \cdot \underline{\dot{u}}_d + \left(\underline{K}_{dd} - \underline{K}_{ds} \cdot \underline{K}_{ss}^{-1} \cdot \underline{K}_{sd} \right) \cdot \underline{u}_d = \underline{P}(t)$$

$$\hat{\underline{K}}_{dd} = \underline{K}_{dd} - \underline{K}_{ds} \cdot \underline{K}_{ss}^{-1} \cdot \underline{K}_{sd}$$

όπου $\hat{\underline{K}}_{dd}$ είναι το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας.

- για εξωτερικά επιβαλλόμενα δυναμικά φορτία $\underline{P}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_d \\ \underline{\ddot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_d \\ \underline{\dot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{dd} & \underline{K}_{ds} \\ \underline{K}_{sd} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_d \\ \underline{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_d \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

- για σεισμικές διεγέρσεις του εδάφους θεμελίωσης:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_d \\ \underline{\ddot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_d \\ \underline{\dot{u}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{dd} & \underline{K}_{ds} \\ \underline{K}_{sd} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_d \\ \underline{u}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

$$\Rightarrow \underline{P}_{\text{eff}}(t) = - \begin{bmatrix} \underline{M}_{dd} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Αφού επιλυθεί το σύστημα ΔΕ και υπολογιστούν οι μετακινήσεις $\underline{u}_d(t)$ των δυναμικών ΒΕ, μπορούν να προσδιοριστούν στη συνέχεια τα εντατικά μεγέθη. Αυτό μπορεί να γίνει όταν από τις γνωστές μετακινήσεις $\underline{u}_d(t)$ υπολογιστούν οι υπόλοιπες μετακινήσεις $\underline{u}_s(t) = -\underline{K}_{ss}^{-1} \cdot \underline{K}_{sd} \cdot \underline{u}_d(t)$ και στη συνέχεια προσδιοριστούν τα εντατικά μεγέθη από τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών και τις μετακινήσεις $\underline{u}(t)$. Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει στατική ανάλυση με επιβολή ισοδύναμων στατικών φορτίων που αντιστοιχούν στις γνωστές μετακινήσεις $\underline{u}_d(t)$, των δυναμικών ΒΕ.

$$\underline{u}_s = -\underline{K}_{ss}^{-1} \cdot \underline{K}_{sd} \cdot \underline{u}_d$$

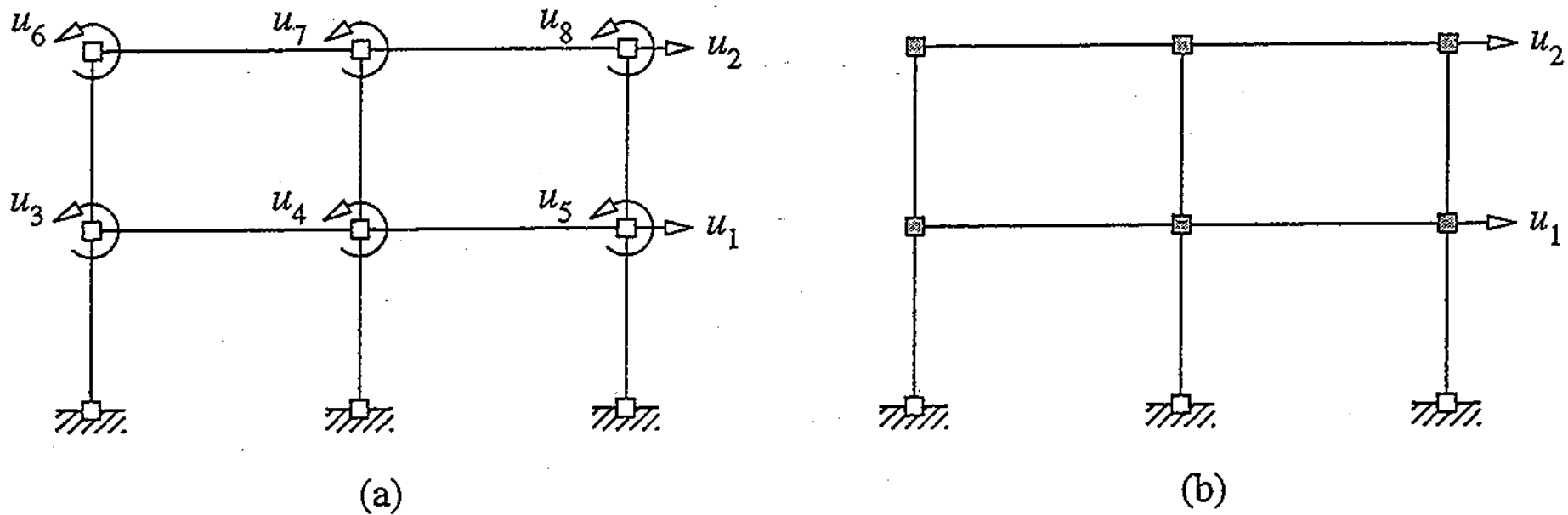
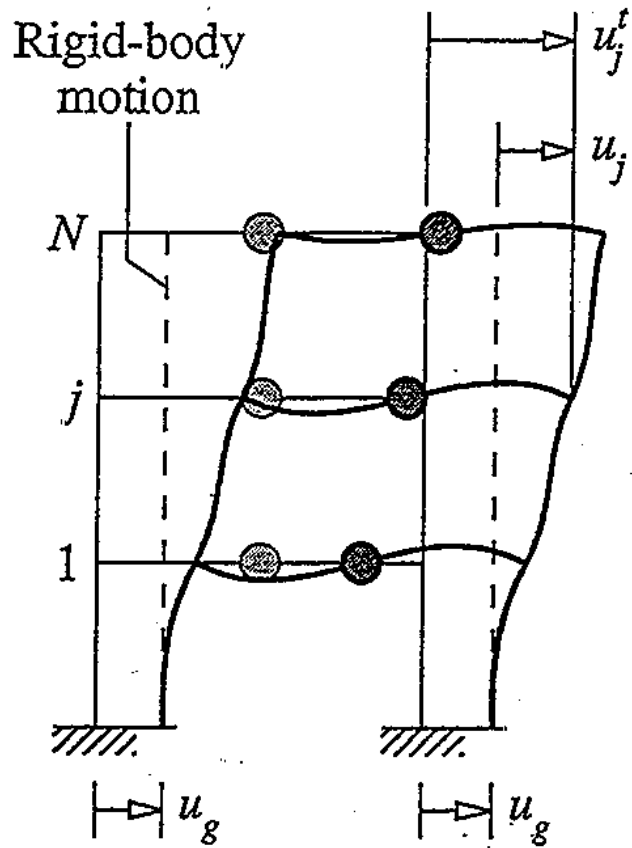


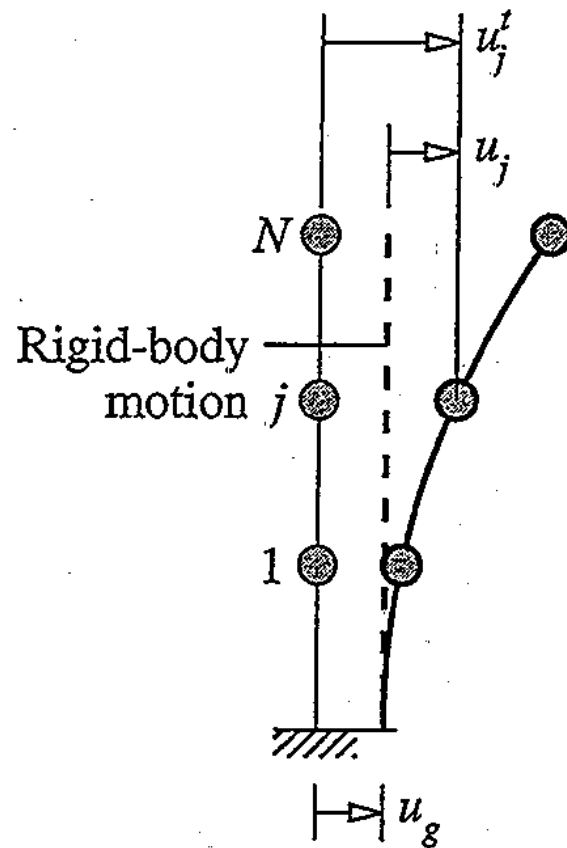
Figure 9.3.1 (a) Degrees of freedom (DOFs) for elastic forces—axial deformations neglected; (b) DOFs for inertia forces.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra



(a)

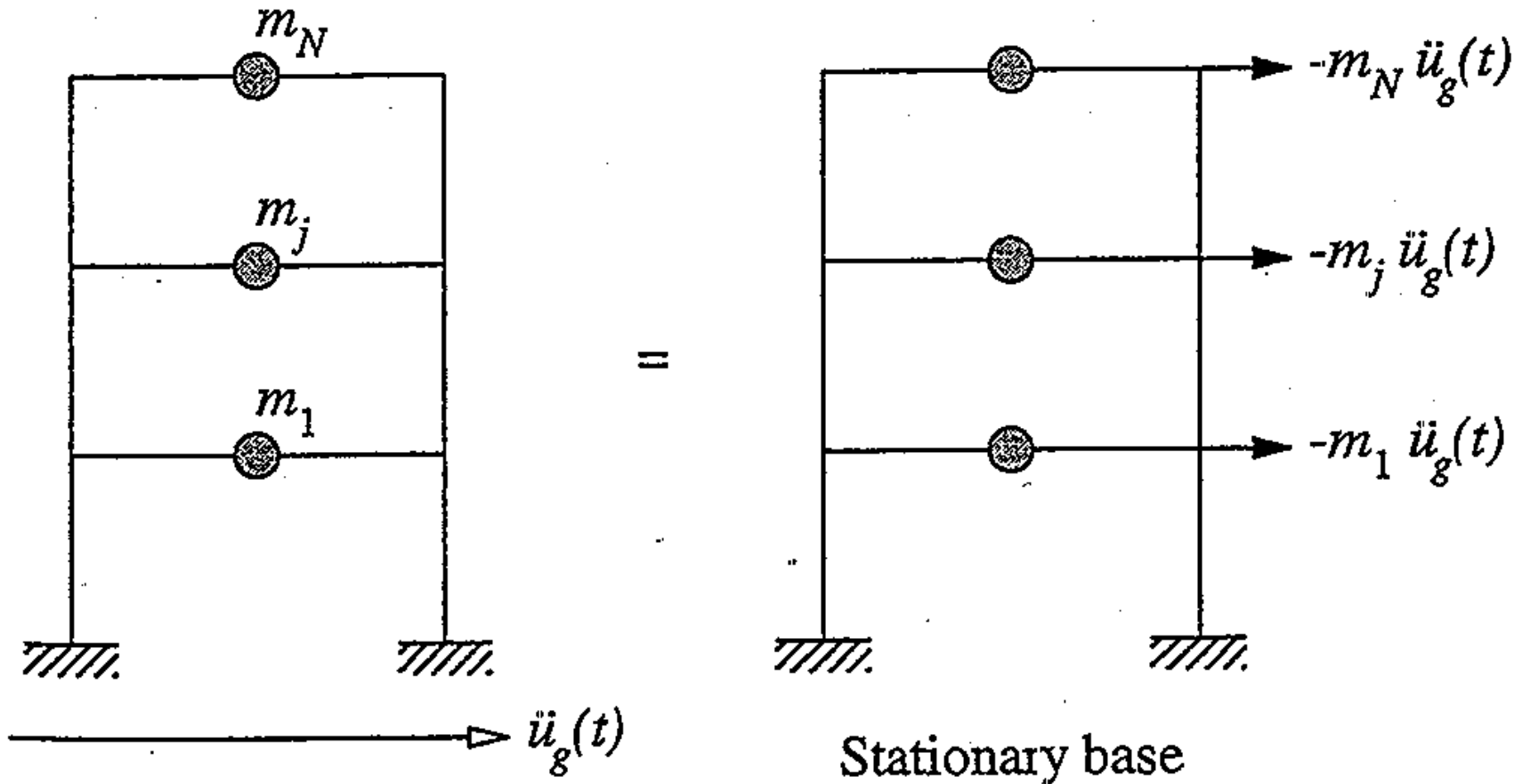


(b)

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

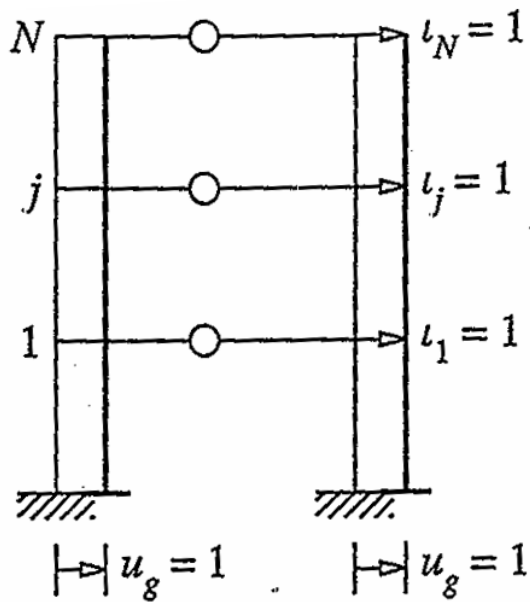
- Anil K. Chopra



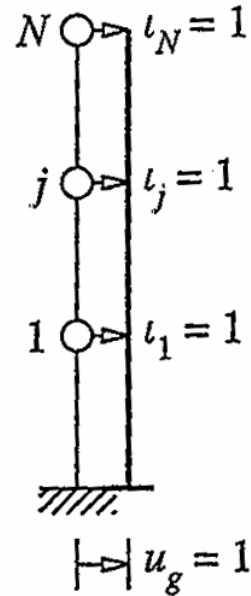
Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra



(a)



(b)

Figure 9.4.3 Influence vector ι : static displacements due to $u_g = 1$.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

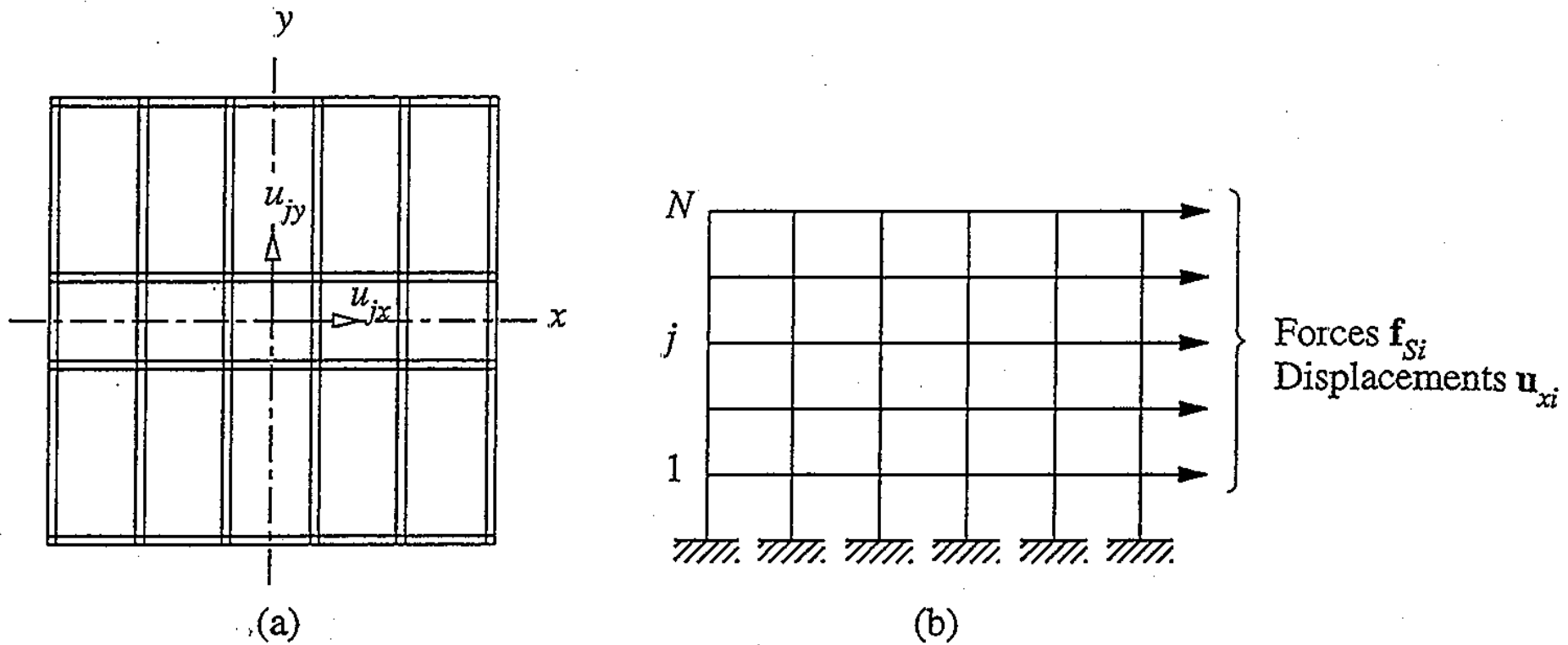


Figure 9.4.5 (a) j th floor plan with DOFs noted; (b) frame i , x -direction, with lateral forces and displacements shown.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

Ελεύθερη ταλάντωση πολυβάθμιων συστημάτων (ΠΒΣ)

Κατά την ελεύθερη ταλάντωση ενός ΠΒΣ επιβάλλονται στο σύστημα κάποιες αρχικές μετακινήσεις $\underline{u}(0)$ ή/και ταχύτητες $\underline{\dot{u}}(0)$ και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί χωρίς οποιαδήποτε εξωτερική φόρτιση ή εδαφική διέγερση.

Ελεύθερη ταλάντωση ΠΒΣ χωρίς απόσβεση

Οι εξισώσεις κίνησης ενός ΠΒΣ χωρίς απόσβεση κατά την ελεύθερη ταλάντωση του έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0}$$

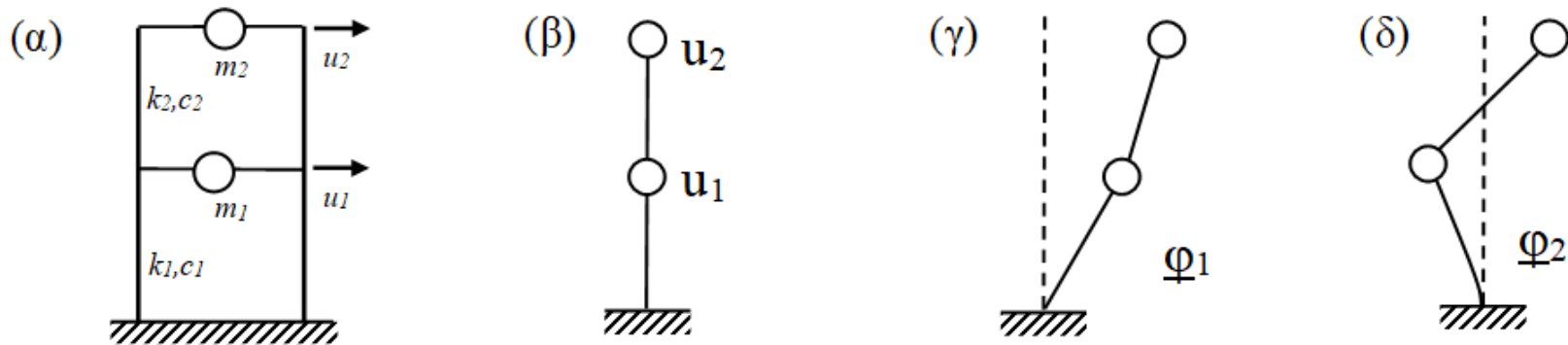
όπου $\underline{u}(0)$ και $\underline{\dot{u}}(0)$ είναι οι αρχικές μετακινήσεις και ταχύτητες, αντίστοιχα.

Λύνοντας το σύστημα N ομογενών ΔΕ 2^{ης} τάξης, όπου N ο αριθμός των δυναμικών ΒΕ, το οποίο είναι συζευγμένο λόγω των εκτός διαγώνιων όρων των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας, προσδιορίζονται οι άγνωστες μετακινήσεις $\underline{u}(t)$.

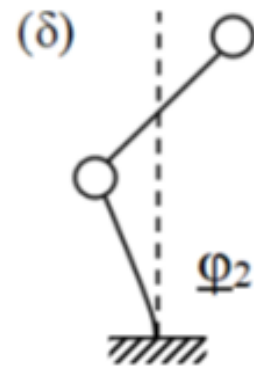
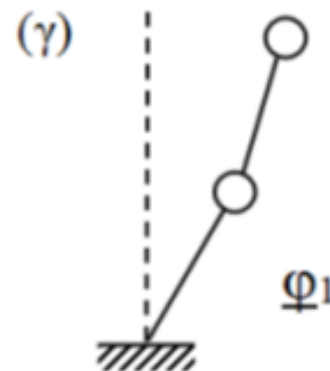
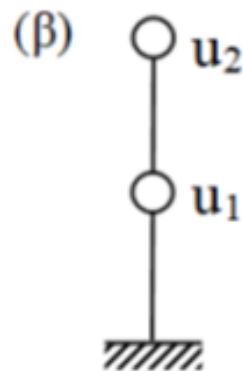
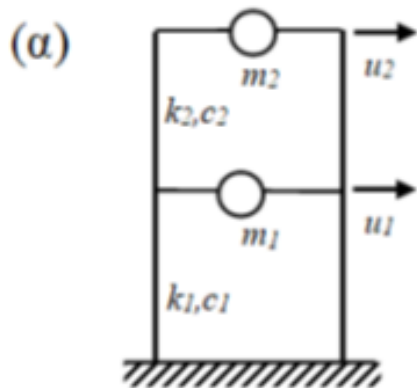
Ενώ η απόκριση ενός ΜΒΣ σε ελεύθερη ταλάντωση είναι αρμονική, ένα ΠΒΣ που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση δεν εκτελεί αρμονική κίνηση, εκτός εάν οι αρχικές μετακινήσεις $\underline{u}(0)$ έχουν συγκεκριμένη μορφή.

Οι μορφές των μετακινήσεων κατά τις οποίες εάν ένα ΠΒΣ εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας, χωρίς αρχικές ταχύτητες, εκτελεί αρμονική ελεύθερη ταλάντωση είναι οι ιδιομορφές, ή φυσικές μορφές ταλάντωσης, $\underline{\varphi}_n$ της κατασκευής. Για ένα ΠΒΣ με N δυναμικούς ΒΕ υπάρχει N αριθμός ιδιομορφών, $\underline{\varphi}_n$.

Το πιο κάτω διώροφο πλαίσιο (Σχήμα 12.4.α), το οποίο μπορεί να προσομοιωθεί από ένα ΠΒΣ με δύο ΒΕ (Σχήμα 12.4.β), έχει δύο ιδιομορφές (Σχήμα 12.4.β-γ). Η δυσκαμψία του 1^{ου} ορόφου είναι 70 MN/m και του 2^{ου} ορόφου 50 MN/m, ενώ η μάζα του 1^{ου} ορόφου είναι 40 τόνοι και του 2^{ου} ορόφου 20 τόνοι.



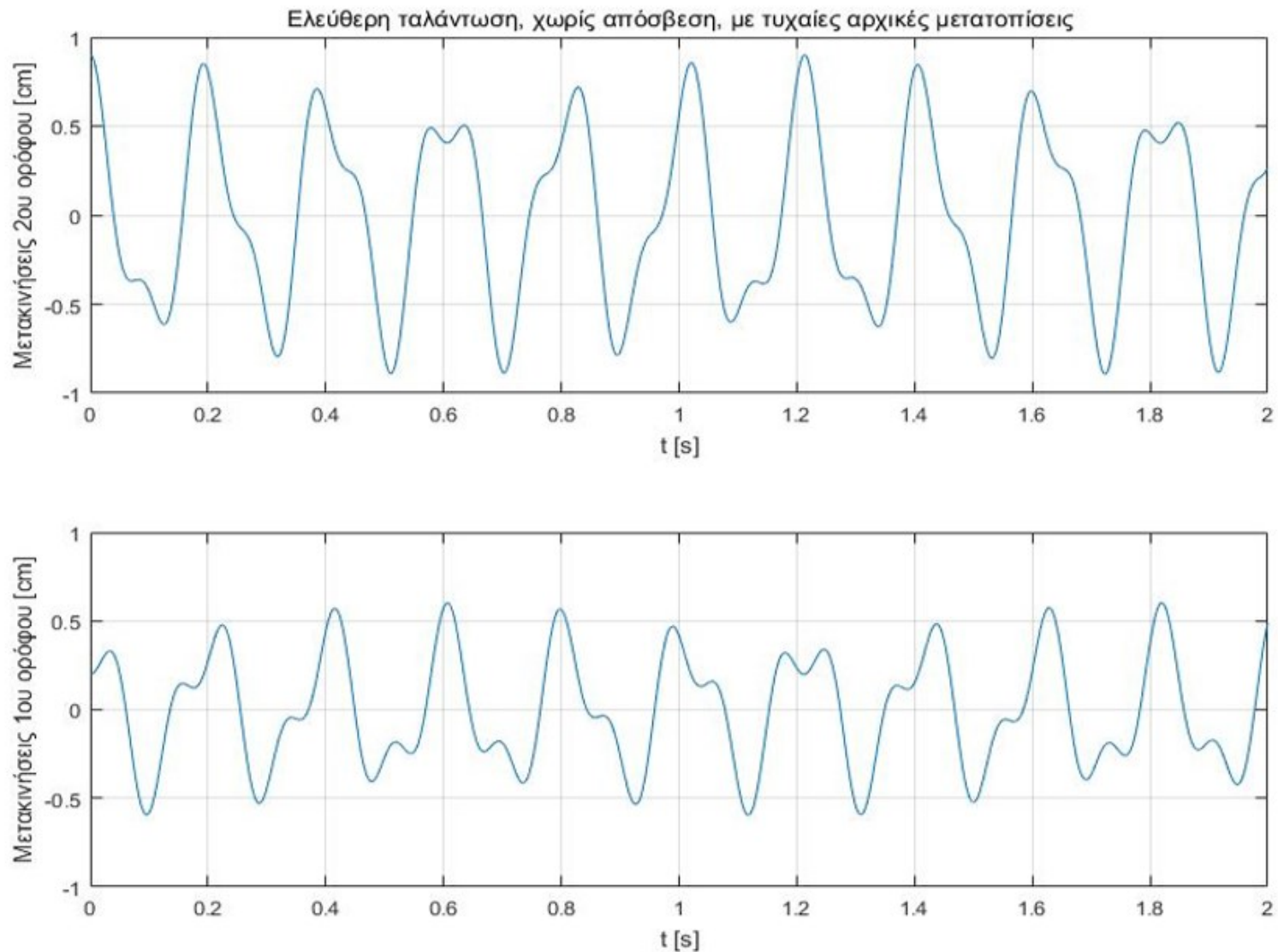
Σχήμα 12.4: (α) ΠΒΣ με 2 δυναμικούς ΒΕ (β) 1^η ιδιομορφή (γ) 2^η ιδιομορφή. (δ) 2^η ιδιομορφή.



Οι ιδιοπερίοδοι του πλαισίου, οι οποίες θα δούμε στη συνέχεια πως υπολογίζονται, είναι $T_1 = 0.2023\text{s}$ και $T_2 = 0.0933\text{s}$, ενώ οι δύο ιδιομορφές είναι ως εξής:

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0.6141 \\ 1.0 \end{bmatrix} \text{ και } \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} -0.8141 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Εάν αυτό το διώροφο πλαίσιο υποβληθεί σε ελεύθερη ταλάντωση μετά από αρχικές μετατοπίσεις των ορόφων του, οι οποίες επιβάλλονται ως αρχικές συνθήκες, που είναι τυχαίες και δεν συμπίπτουν με κάποια από τις ιδιομορφές του διώροφου, η απόκρισή του δεν θα είναι αρμονική. Το Σχήμα 12.5 παρέχει τη χρονοϊστορία απόκρισης του, στο πάνω σχήμα παρέχεται ο πάνω όροφος και στο κάτω ο κάτω όροφος, αντίστοιχα. Όπως παρατηρούμε η απόκριση δεν είναι αρμονική ταλάντωση.



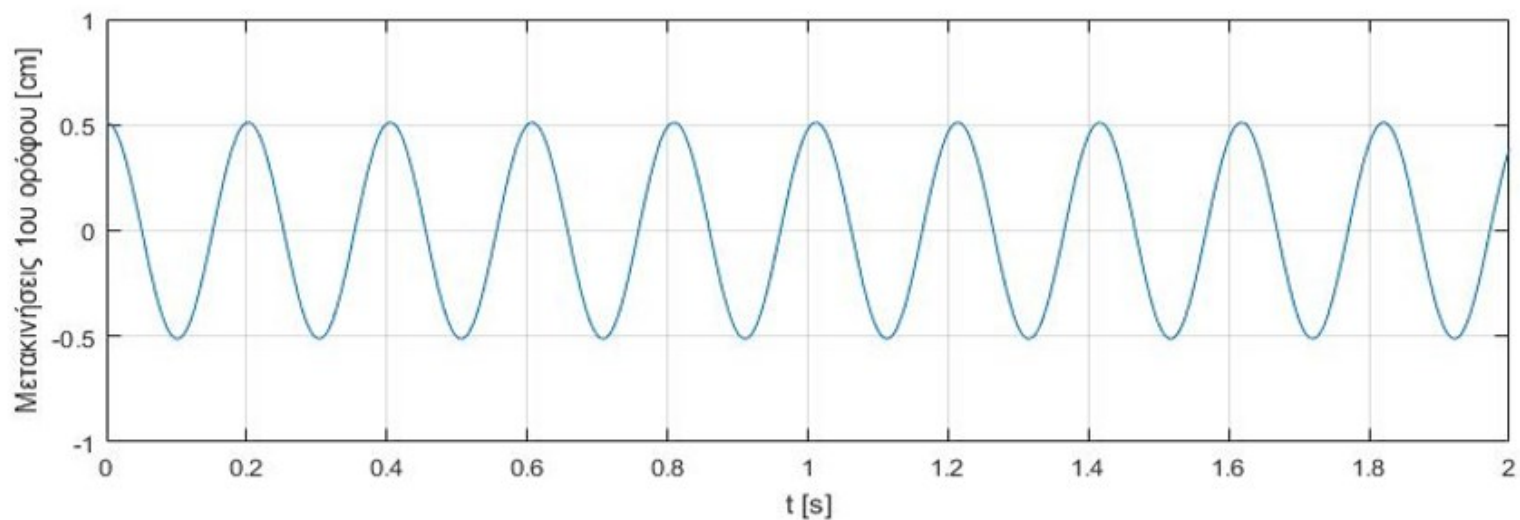
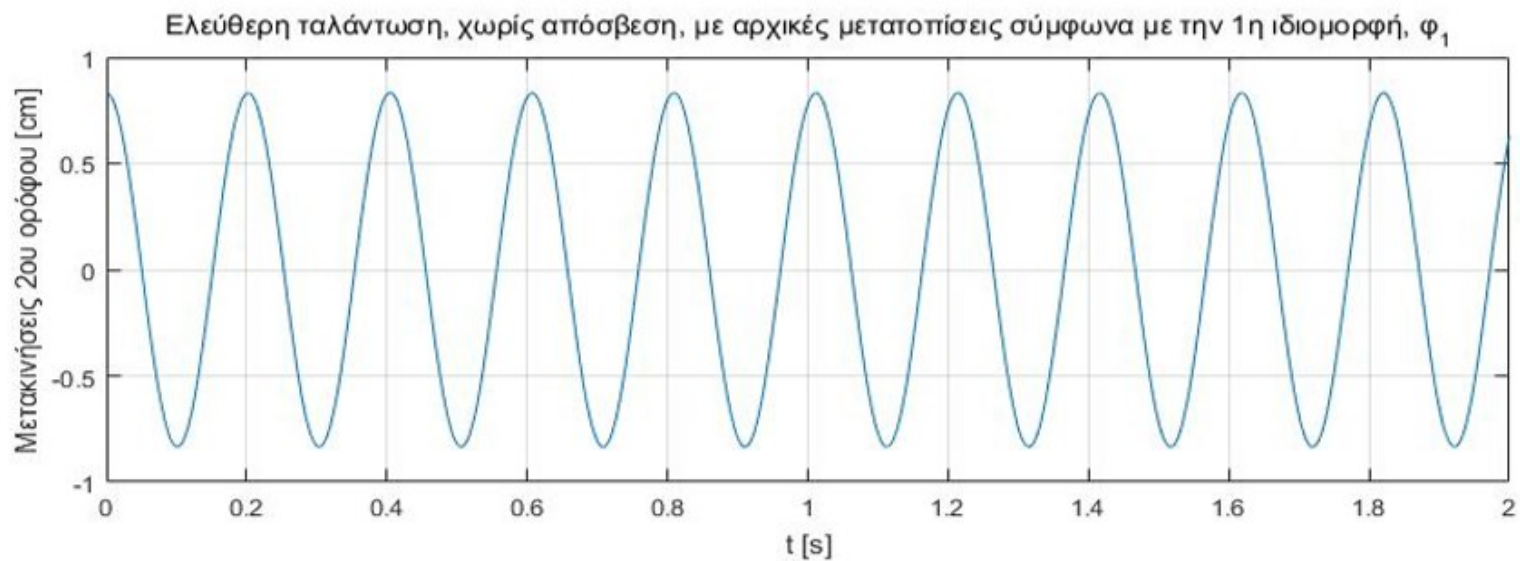
Σχήμα 12.5: Χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) υπό τυχαίες αρχικές μεταθέσεις.

Αντιθέτως, εάν οι αρχικές εκτροπές από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή οι αρχικές μετακινήσεις $\underline{u}_0 = \underline{u}(0)$ ταυτίζονται με μια από τις ιδιομορφές, η απόκριση της κάθε μάζας θα είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο ίση με την αντίστοιχη ιδιοπερίοδο.

Παραδείγματος χάριν εάν επιβάλουμε ως αρχικές μετακινήσεις, $\underline{u}(0)$, τις πιο κάτω τιμές, οι οποίοι ταυτίζονται με την 1^η ιδιομορφή, η απόκριση του διάροφου πλαισίου θα είναι αρμονική ταλάντωση με περίοδο ίση με την 1^η ιδιοπερίοδο, $T_1 = 0.2023\text{s}$ (Σχήμα 12.6):

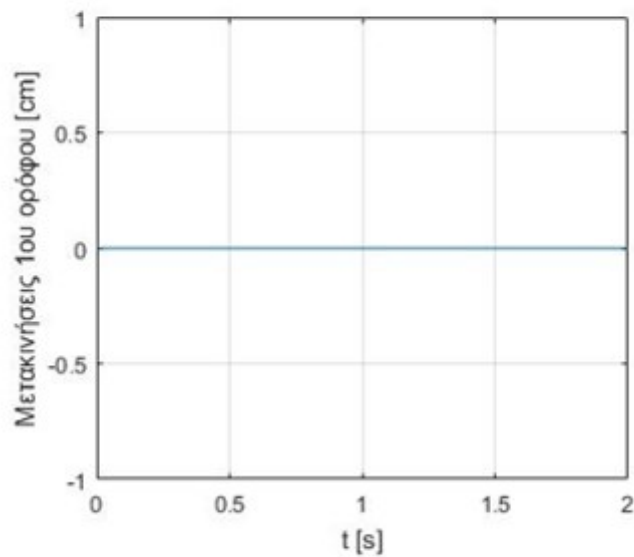
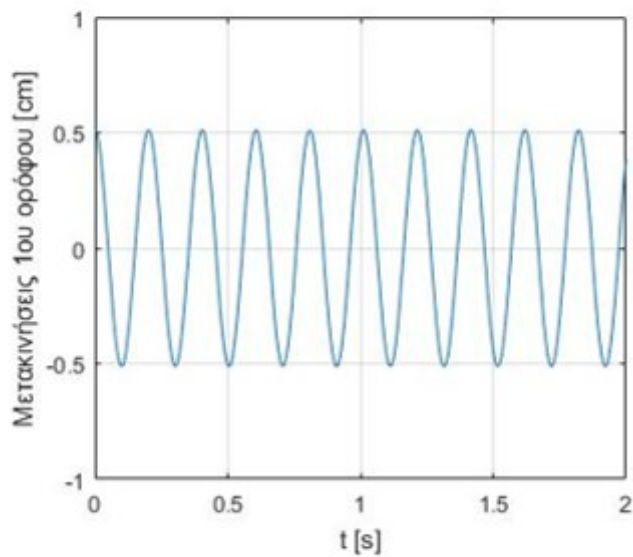
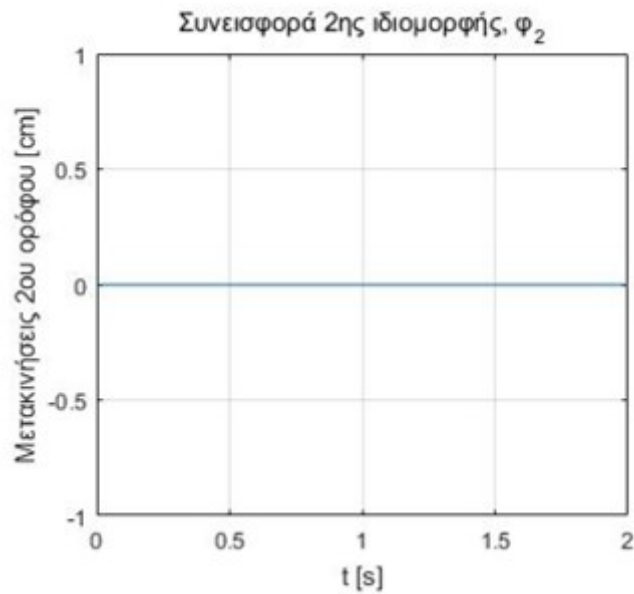
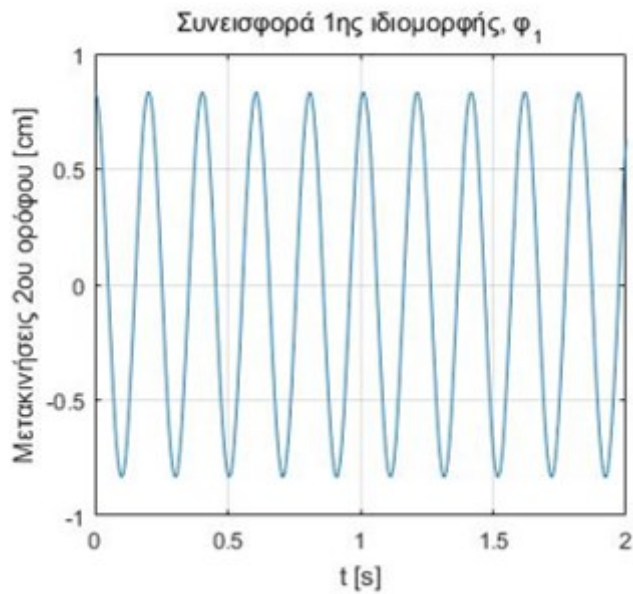
$$\underline{u}(0) = \begin{bmatrix} 0.5118 \\ 0.8333 \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{bmatrix} 0.5118 \\ 0.8333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6141/1.2 \\ 1.0/1.2 \end{bmatrix} \right)$$

Το Σχήμα 12.6 παρέχει τη χρονοϊστορία των δύο ορόφων, πάνω του 2^{ου} ορόφου και κάτω του 1^{ου} ορόφου, καθώς το πλαίσιο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές μετακινήσεις σύμφωνα με την 1^η ιδιομορφή, $\underline{\varphi}_1$.



Σχήμα 12.6: Χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης 1^{οο} (κάτω) και 2^{οο} ορόφου (πάνω) με επιβολή της 1^{ης} ιδιομορφής ως αρχικής μετάθεσης.

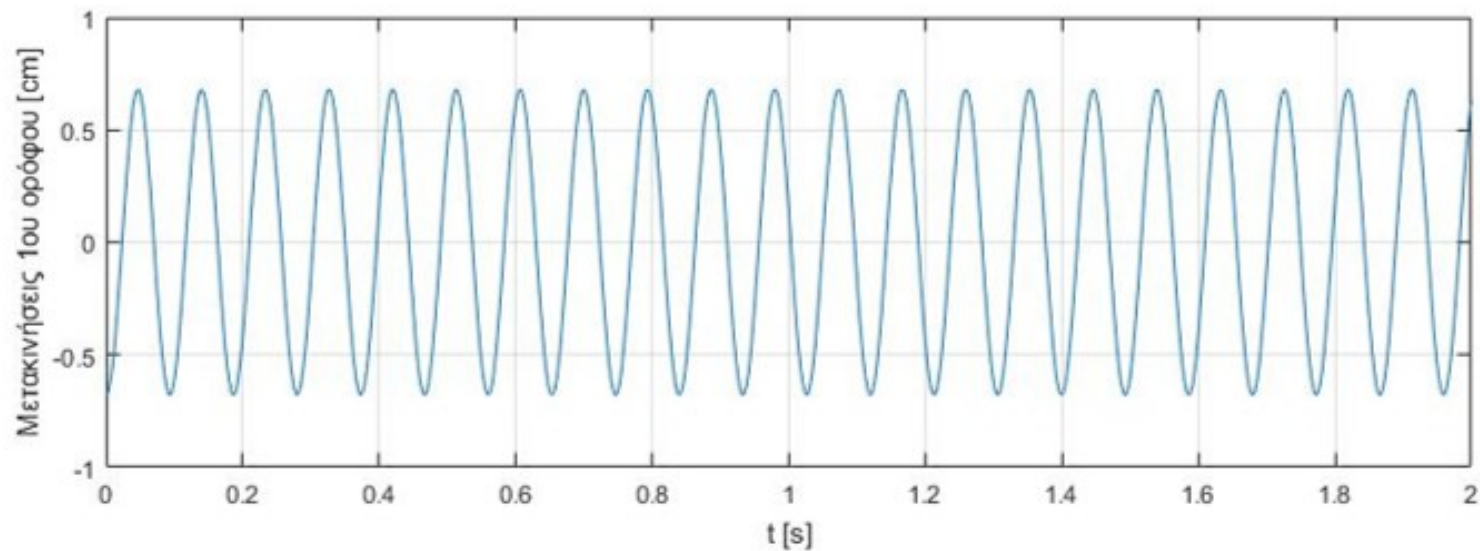
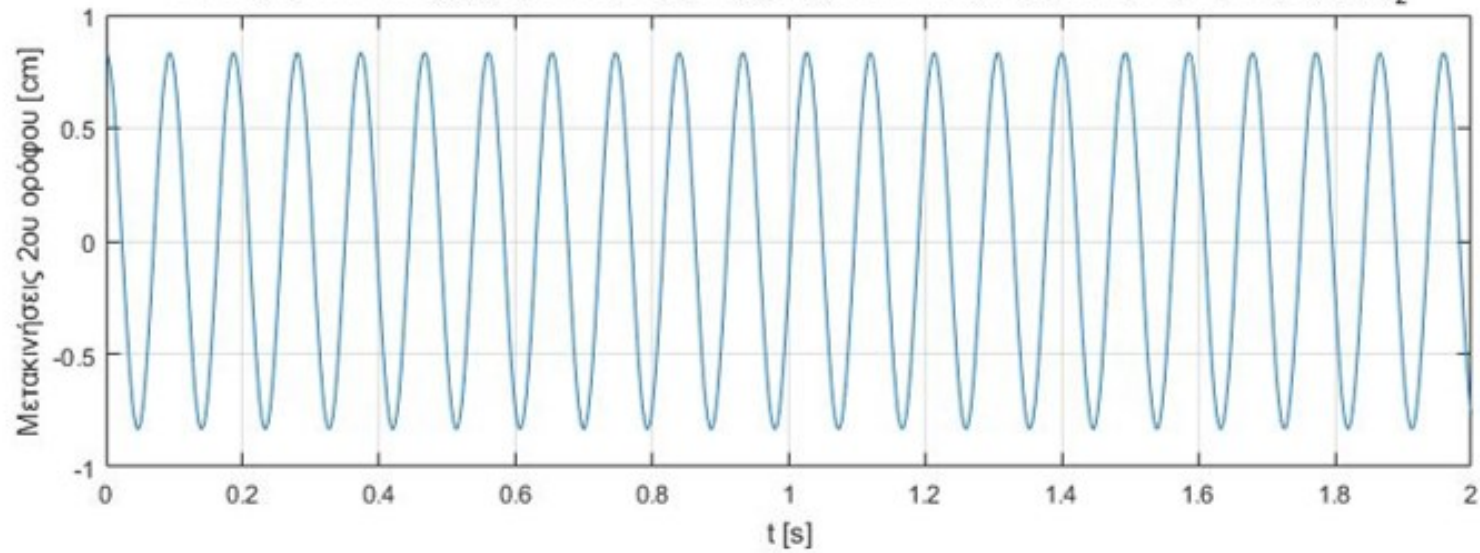
Το Σχήμα 12.7 παρέχει τη συνεισφορά της 1^{ης} (αριστερή στήλη) και της 2^{ης} (δεξιά στήλη) ιδιομορφής στην χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης του 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) κατά την ελεύθερη ταλάντωση του πλαισίου με αρχικές μεταθέσεις σύμφωνα με την 1^η ιδιομορφή. Φαίνεται ότι όταν οι αρχικές συνθήκες ταυτίζονται με την 1^η ιδιομορφή, η συνεισφορά της 2^{ης} ιδιομορφής είναι μηδενική και έτσι το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, σύμφωνα με την 1^η ιδιομορφή, $\underline{\varphi}_1$, και με περίοδο ίση με την 1^η ιδιοπερίοδο, $T_1 = 0.2023 \text{ s}$.



Σχήμα 12.7: Συνεισφορές της 1^{ης} (αριστερά) και της 2^{ης} (δεξιά) ιδιομορφής στην χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης του 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) με αρχικές μεταθέσεις σύμφωνα με την 1^η ιδιομορφή.

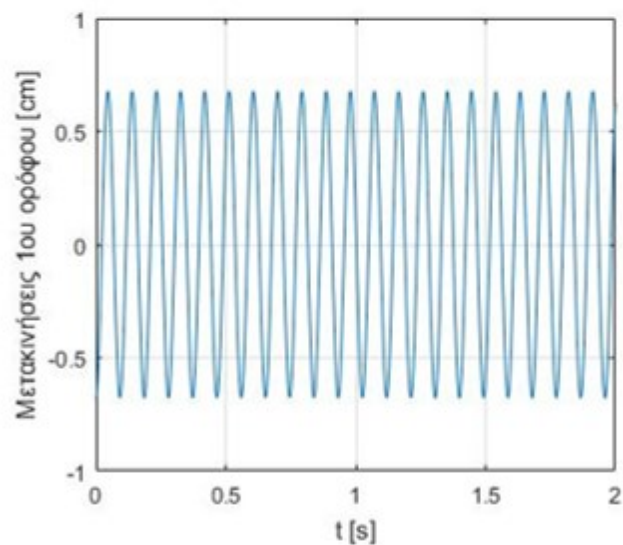
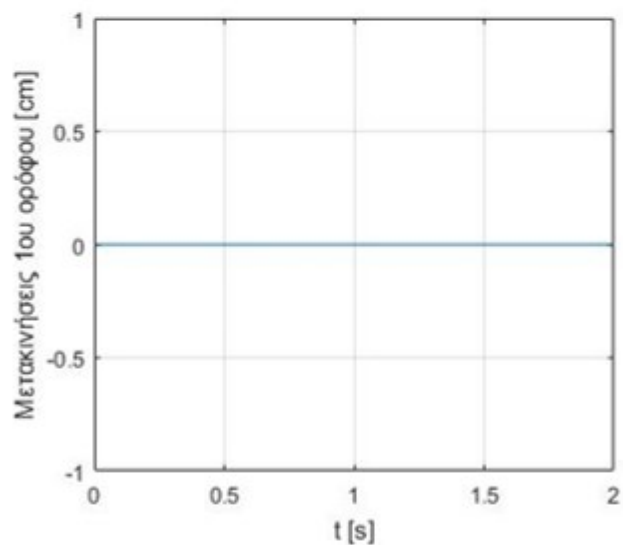
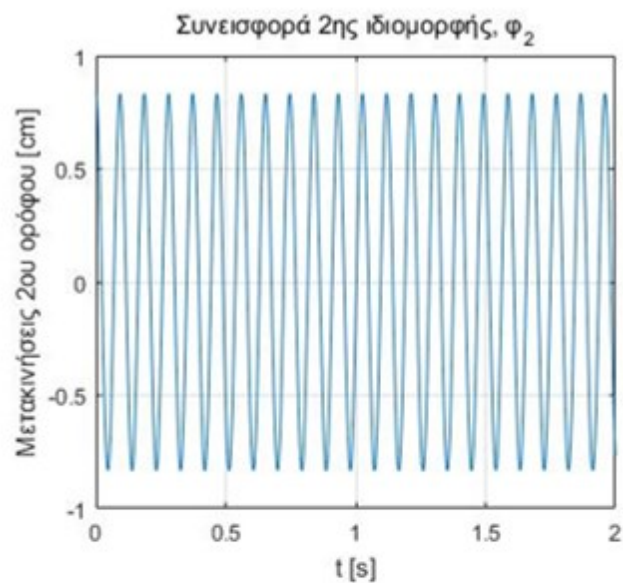
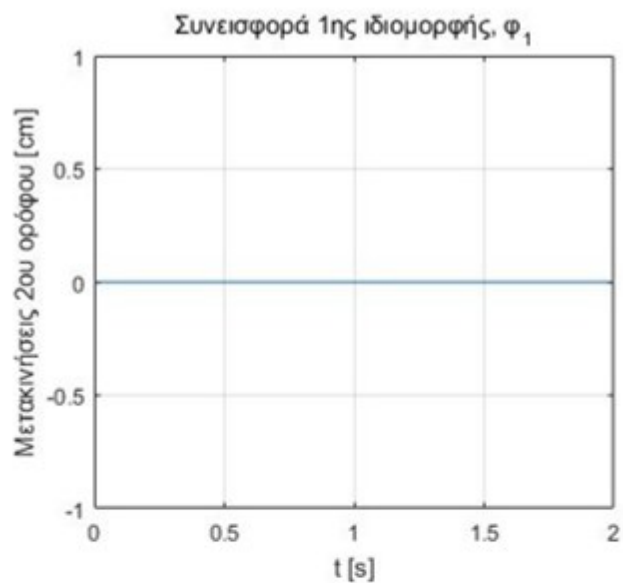
Παρομοίως το Σχήμα 12.8 παρέχει τη χρονοϊστορία των δύο ορόφων, πάνω του 2^{ου} ορόφου και κάτω του 1^{ου} ορόφου, καθώς το πλαίσιο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές μετακινήσεις σύμφωνα με την 2^η ιδιομορφή, $\underline{\varphi}_2$.

Ελεύθερη ταλάντωση, χωρίς απόσβεση, με αρχικές μετατοπίσεις σύμφωνα με τη 2η ιδιομορφή, ψ_2



Σχήμα 12.8: Χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) με επιβολή της 2^{ης} ιδιομορφής ως αρχικής μετάθεσης.

Και το Σχήμα 12.9 παρέχει τη συνεισφορά της 1^{ης} (αριστερή στήλη) και της 2^{ης} (δεξιά στήλη) ιδιομορφής στην χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης του 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) κατά την ελεύθερη ταλάντωση του πλαισίου με αρχικές μεταθέσεις σύμφωνα με την 2^η ιδιομορφή.

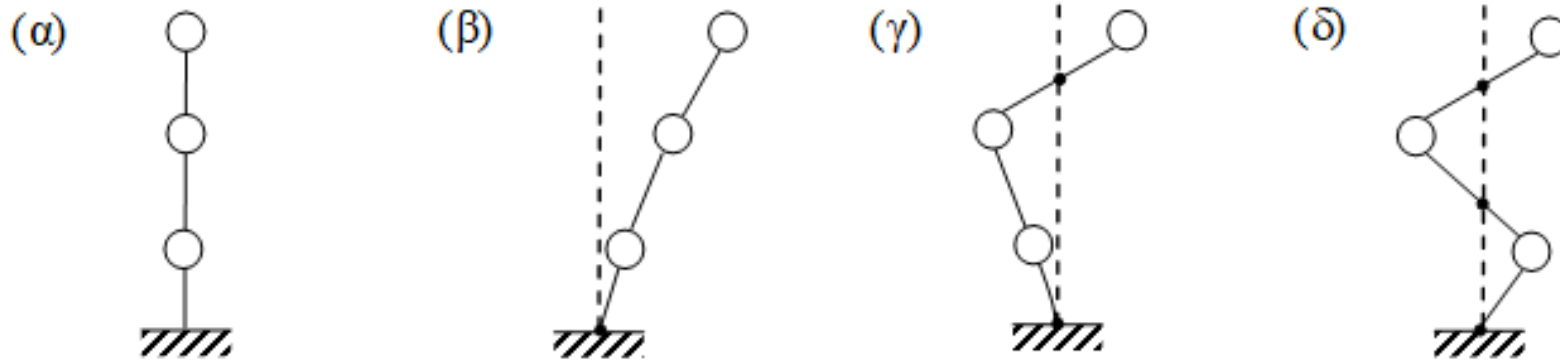


Σχήμα 12.9: Συνεισφορές της 1^{ης} (αριστερά) και της 2^{ης} (δεξιά) ιδιομορφής στην χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης του 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) με αρχικές μεταθέσεις σύμφωνα με τη 2^η ιδιομορφή.

Φαίνεται ότι όταν οι αρχικές συνθήκες ταυτίζονται με τη 2^η ιδιομορφή, η συνεισφορά της 1^{ης} ιδιομορφής είναι μηδενική και έτσι το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, σύμφωνα με τη 2^η ιδιομορφή, $\underline{\varphi}_2$, και με περίοδο ίση με τη 2^η ιδιοπερίοδο, $T_2 = 0.0933 \text{ s}$.

Έτσι, επιβεβαιώνεται ο ορισμός της ιδιομορφής, ως της μορφής μετακινήσεων που εάν επιβληθεί ως αρχική μετακίνηση σε ένα ΠΒΣ, που αφήνεται στη συνέχεια ελεύθερο να ταλαντωθεί, θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με περίοδο ίση με την αντίστοιχη ιδιοπερίοδο και σε κάθε χρονική στιγμή θα έχει μετακινήσεις σύμφωνα με τη συγκεκριμένη ιδιομορφή. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι μετακινήσεις θα μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Το πιο κάτω ΠΒΣ (Σχήμα 12.10.α), το οποίο έχει 3 δυναμικούς ΒΕ, μια οριζόντια μετάθεση σε κάθε μια από τις 3 συγκεντρωμένες μάζες του έχει 3 ιδιομορφές, τις $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$ και $\underline{\varphi}_3$:



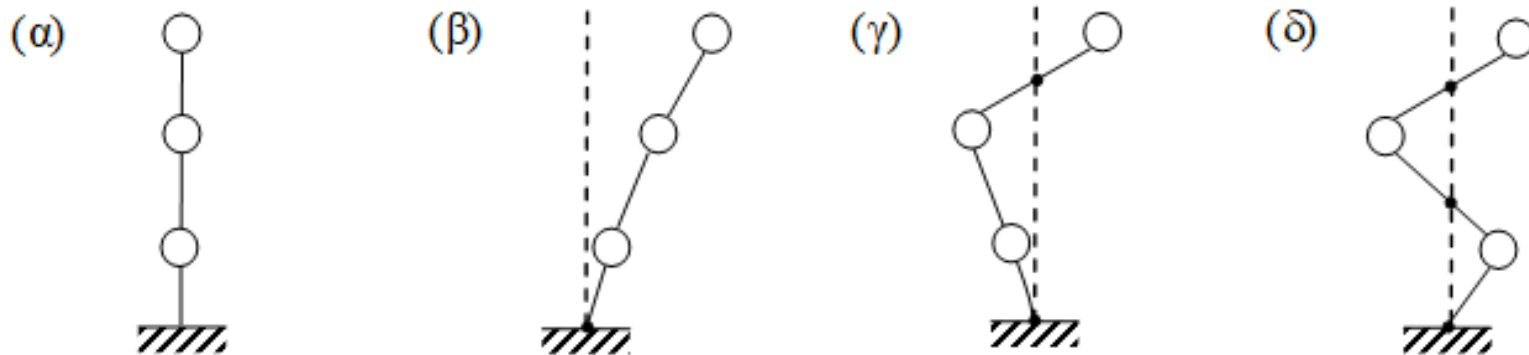
Σχήμα 12.10: (α) ΠΒΣ με 3 δυναμικούς ΒΕ (β) 1^η ιδιομορφή (γ) 2^η ιδιομορφή (δ) 3^η ιδιομορφή.

Παρατηρούμε ότι στην 1^η ιδιομορφή (Σχήμα 12.10.β) υπάρχει ένα σημείο με μηδενική μετακίνηση, για τη 2^η ιδιομορφή (Σχήμα 12.10.γ) υπάρχουν δύο σημεία και για την 3^η ιδιομορφή (Σχήμα 12.10.δ) υπάρχουν τρία σημεία με μηδενική μετακίνηση.

Για την κάθε ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n$ υπάρχει η αντίστοιχη ιδιοπερίοδος, T_n , με μονάδες μέτρησης τα δευτερόλεπτα, η αντίστοιχη γωνιακή ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης, ω_n , με μονάδες rad/sec και η αντίστοιχη κυκλική ιδιοσυχνότητα, f_n , με μονάδες μέτρησης τα Hertz (Hz), που συνδέονται μεταξύ τους ως ακολούθως:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \Rightarrow f_n = \frac{1}{T_n} \Rightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Η 1η ιδιομορφή $\underline{\varphi}_1$ έχει τη μεγαλύτερη ιδιοπερίοδο T_1 και τη μικρότερη ιδιοσυχνότητα ω_1 . Όπως θα δούμε είναι συνήθως η πιο σημαντική όσο αφορά τη συνεισφορά της στην ταλάντωση της κατασκευής.



Σχήμα 12.10: (α) ΠΒΣ με 3 δυναμικούς ΒΕ (β) 1^η ιδιομορφή (γ) 2^η ιδιομορφή (δ) 3^η ιδιομορφή.

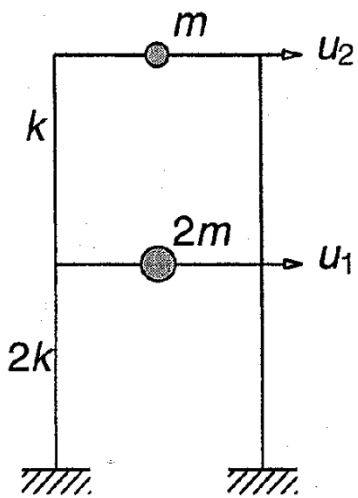
Η ελεύθερη ταλάντωση ενός ΠΒΣ το οποίο εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας σύμφωνα με κάποια ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n = [\varphi_{1n} \varphi_{2n} \dots \varphi_{Nn}]$, είναι αρμονική κίνηση κατά την οποία η μορφή παραμόρφωσης διατηρεί συνεχώς τη μορφή της n-ιδιομορφής, πολλαπλασιαζόμενη επί την ιδιομορφική συνιστώσα $q_n(t)$ η οποία μεταβάλλεται χρονικά:

$$\underline{u}_n(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = q_n(t) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \vdots \\ \varphi_{Nn} \end{bmatrix} = q_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n$$

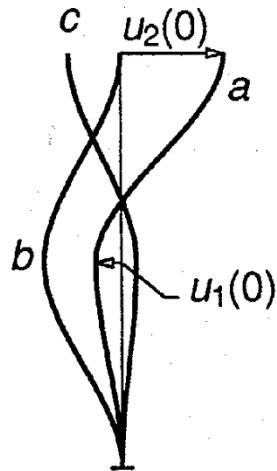
Free vibration of undamped system: Arbitrary $u(0)$

Από το βιβλίο:

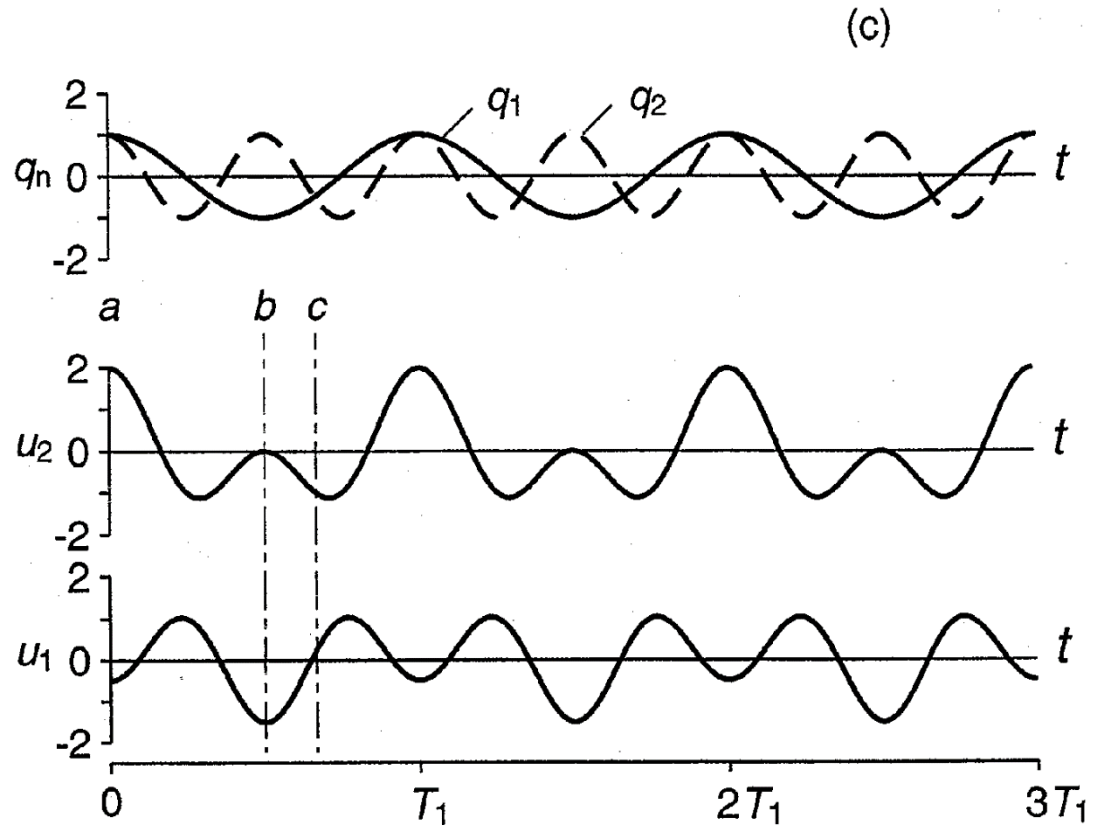
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra



(a)



(b)

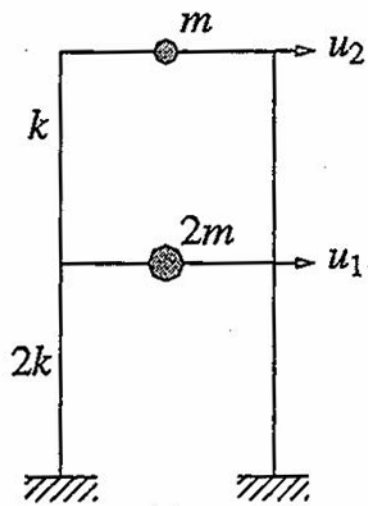


(d)

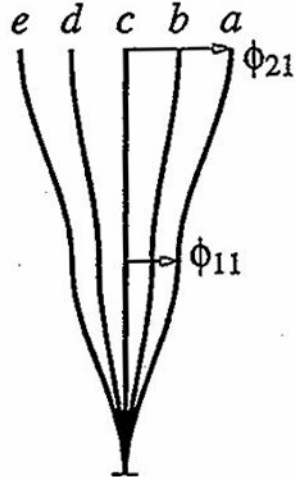
Figure 10.1.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Από το βιβλίο:

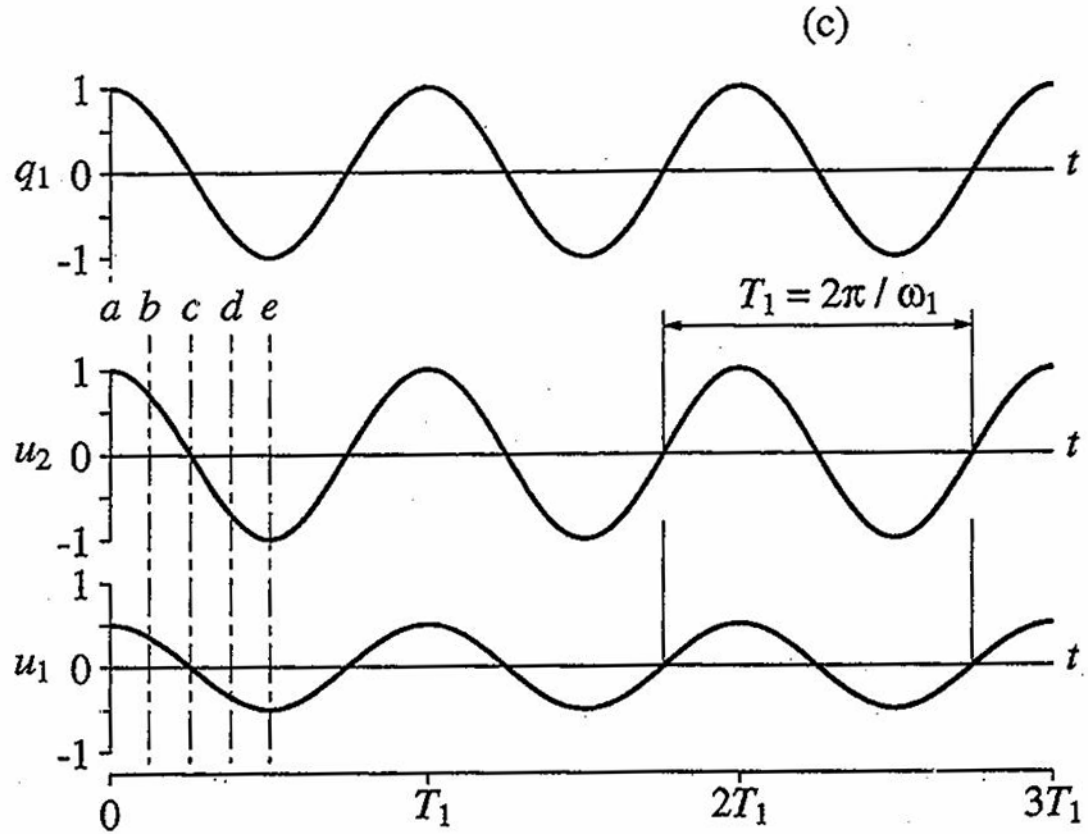
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra



(a)



(b)



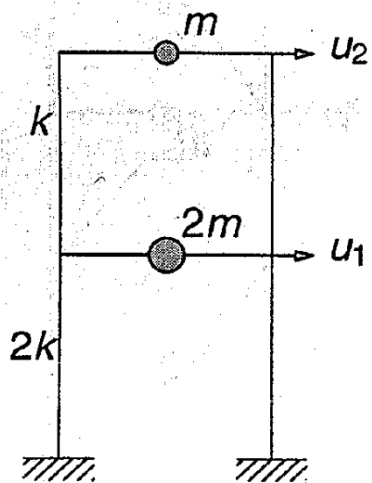
(d)

Figure 10.1.2 Free vibration of an undamped system in its first natural mode of vibration: (a) two-story frame; (b) deflected shapes at time instants *a*, *b*, *c*, *d*, and *e*; (c) modal coordinate $q_1(t)$; (d) displacement history.

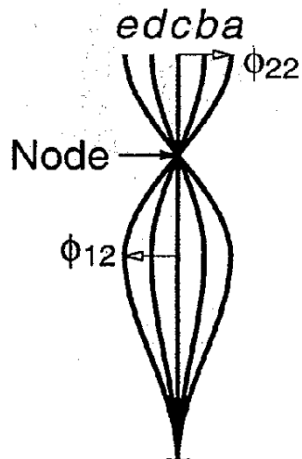
Free vibration of undamped system: $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_2$

Από το βιβλίο:

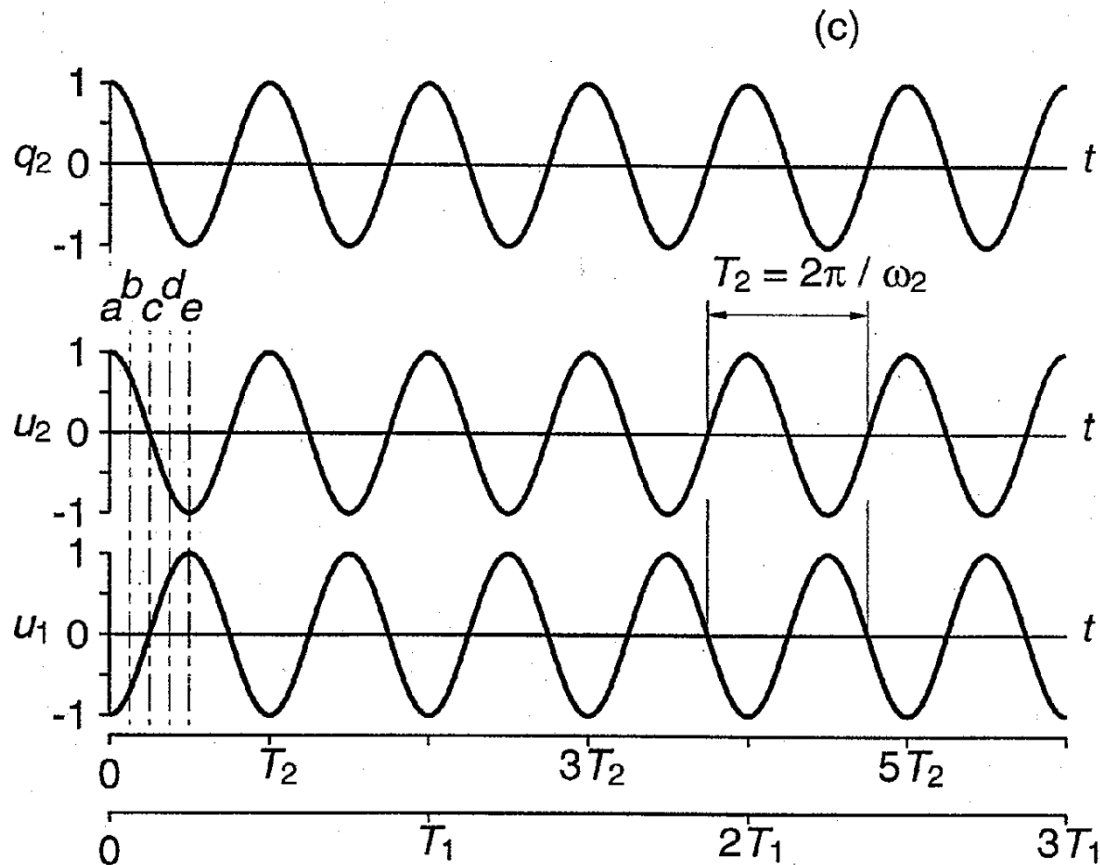
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra



(a)



(b)



(d)

Figure 10.1.3 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιομορφών

Οι ιδιοτιμές και ιδιομορφές ενός ΠΒΣ με μητρώα δυσκαμψίας \underline{K} και μάζας \underline{M} προσδιορίζονται από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος:

$$\left(\underline{K} - \underline{M} \cdot \omega_n^2 \right) \cdot \underline{\varphi}_n = 0$$

Η λύση του προβλήματος πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις αρμονικής κίνησης κατά την ελεύθερη ταλάντωση, με αρχική συνθήκη αντίστοιχη της n -ιδιομορφής.

Για να έχει λύση το πιο πάνω σύστημα N ομογενών αλγεβρικών εξισώσεων πρέπει η ορίζουσα $\left| \underline{K} - \underline{M} \cdot \omega_n^2 \right|$ να είναι ίση με μηδέν. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα προκύπτει ένα πολυώνυμο N βαθμού ως προς ω_n^2 , το οποίο έχει ρίζες τις N ιδιοσυχνότητες, όπου N είναι ο αριθμός των δυναμικών ΒΕ.

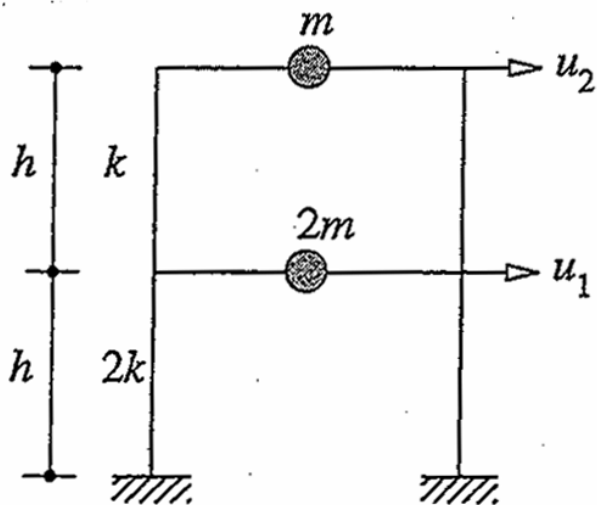
Για την κάθε ιδιοσυχνότητα (*eigenfrequency*) ω_n και ιδιοπερίοδο (*eigenperiod*) T_n υπάρχει η αντίστοιχη ιδιομορφή (*eigenmode*) $\underline{\varphi}_n$, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί σαν μορφή με συγκεκριμένες αναλογίες μεταξύ των μετακινήσεων αλλά χωρίς συγκεκριμένες τιμές.

Συγκεκριμένα, η κάθε ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n$ προσδιορίζεται όταν, με δεδομένη την ιδιοσυχνότητα ω_n , δίνεται αυθαίρετη τιμή σε ένα στοιχείο της ιδιομορφής $\underline{\varphi}_n$ και επιλύεται το $(N-1) \times (N-1)$ σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει από τη σχέση $(\underline{K} - \underline{M} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\varphi}_n = 0$. Η κάθε ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n$ προσδιορίζει τις σχέσεις μεταξύ των μετακινήσεων με συγκεκριμένες αναλογίες αλλά χωρίς συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

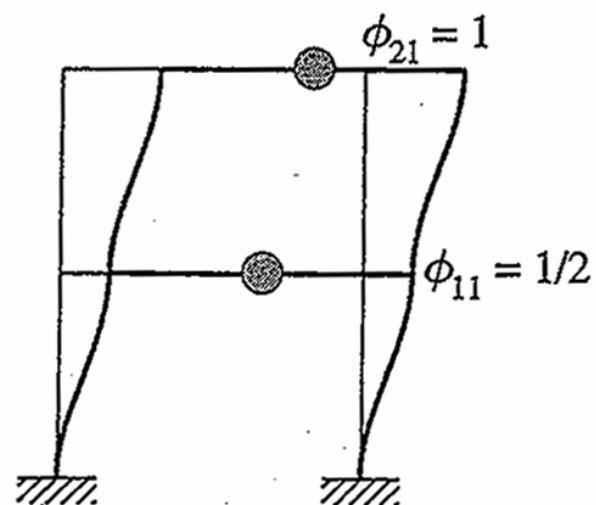
Όταν μόνο οι αρχικές μετακινήσεις έχουν μη μηδενικές τιμές, δηλαδή όταν είναι μηδενικές οι αρχικές ταχύτητες, για να εκτελέσει το ΠΒΣ αρμονική ταλάντωση σύμφωνα με την n-οστή πρέπει το διάνυσμα των αρχικών μετακινήσεων να είναι η n-οστή ιδιομορφή. Τότε, το ΠΒΣ θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση με την αντίστοιχη ιδιοπερίοδο, T_n . Διαφορετικά, η απόκριση του ΠΒΣ δεν θα συνιστά αρμονική ταλάντωση.

Το ιδιομορφικό μητρώο $\underline{\Phi}$ σχηματίζεται από τις N ιδιομορφές $\underline{\varphi}_n$ της κατασκευής:

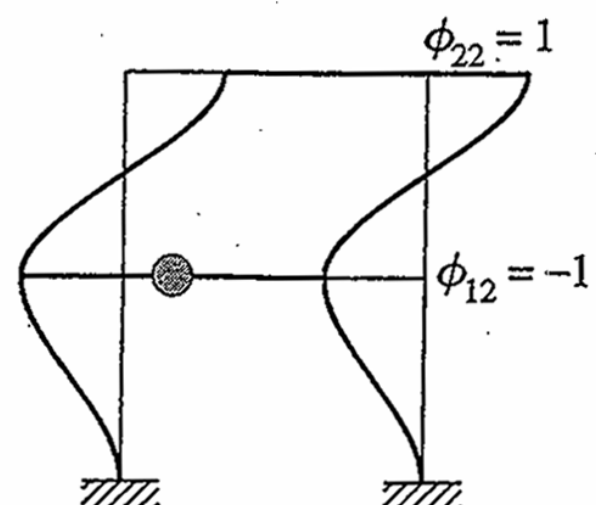
$$\underline{\Phi} = \left[\underline{\varphi}_1 \quad \underline{\varphi}_2 \quad \dots \quad \underline{\varphi}_N \right]$$



(a)



First mode
 $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$
 (b)



Second mode
 $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$

Figure E10.4

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

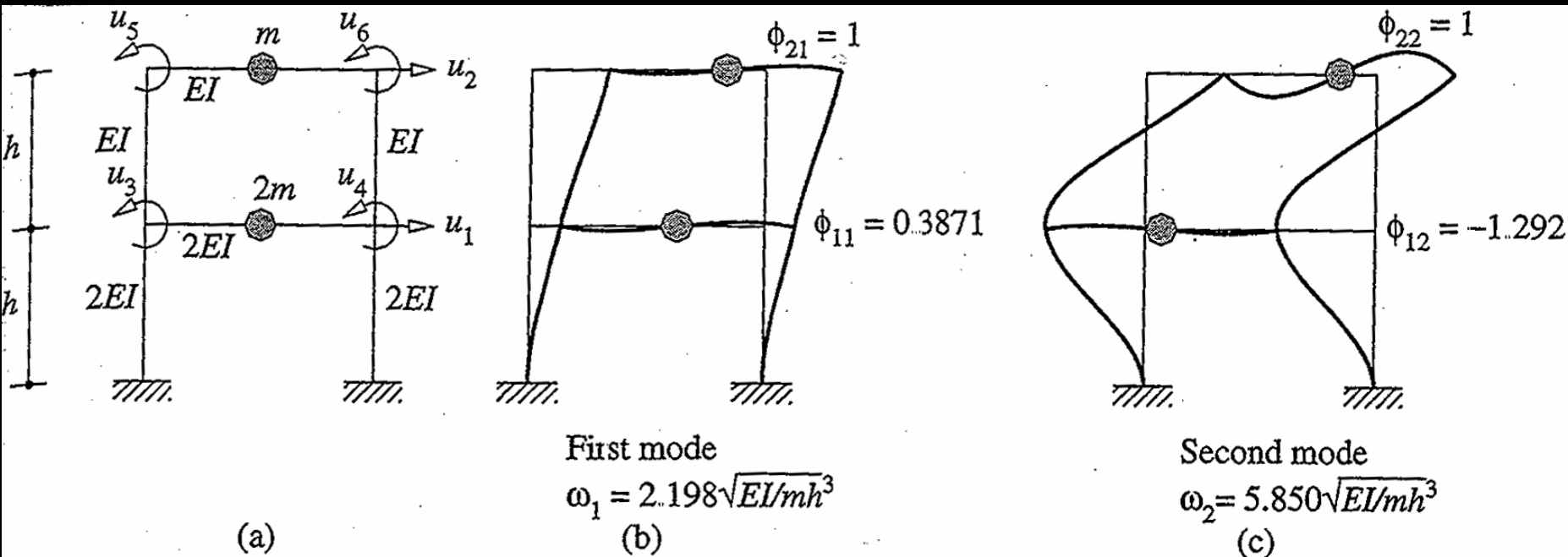


Figure E10.5

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Ιδιότητες ιδιομορφών

Ένα ΠΒΣ έχει τόσες ιδιοσυχνότητες ω_n και ιδιομορφές $\underline{\varphi}_n$ όσοι και οι δυναμικοί ΒΕ. Η κάθε ιδιομορφή προσδιορίζεται με κάποια σταθερά αναλογίας και όχι με συγκεκριμένες τιμές.

Οι ιδιομορφές είναι ορθογωνικές ως προς το μητρώο μάζας και δυσκαμψίας :

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_j &= 0 \\ \underline{\varphi}_i^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_j &= 0\end{aligned}\quad \text{αν } i \neq j$$

Η ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών είναι πολύ σημαντική, αφού βάσει αυτής μπορούν τα μητρώα μάζας, \underline{M} , απόσβεσης, \underline{C} , και δυσκαμψίας, \underline{K} , να μετασχηματιστούν σε διαγώνια μητρώα γενικευμένης μάζας, $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$, απόσβεσης, $c_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varphi}_n$, και δυσκαμψίας, $k_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n$, αντίστοιχα.

Η κάθε γωνιακή ιδιοσυχνότητα, ω_n , ισούται με την τετραγωνική ρίζα του λόγου της γενικευμένης δυσκαμψίας, k_n , προς τη γενικευμένη μάζα, m_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n}} = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

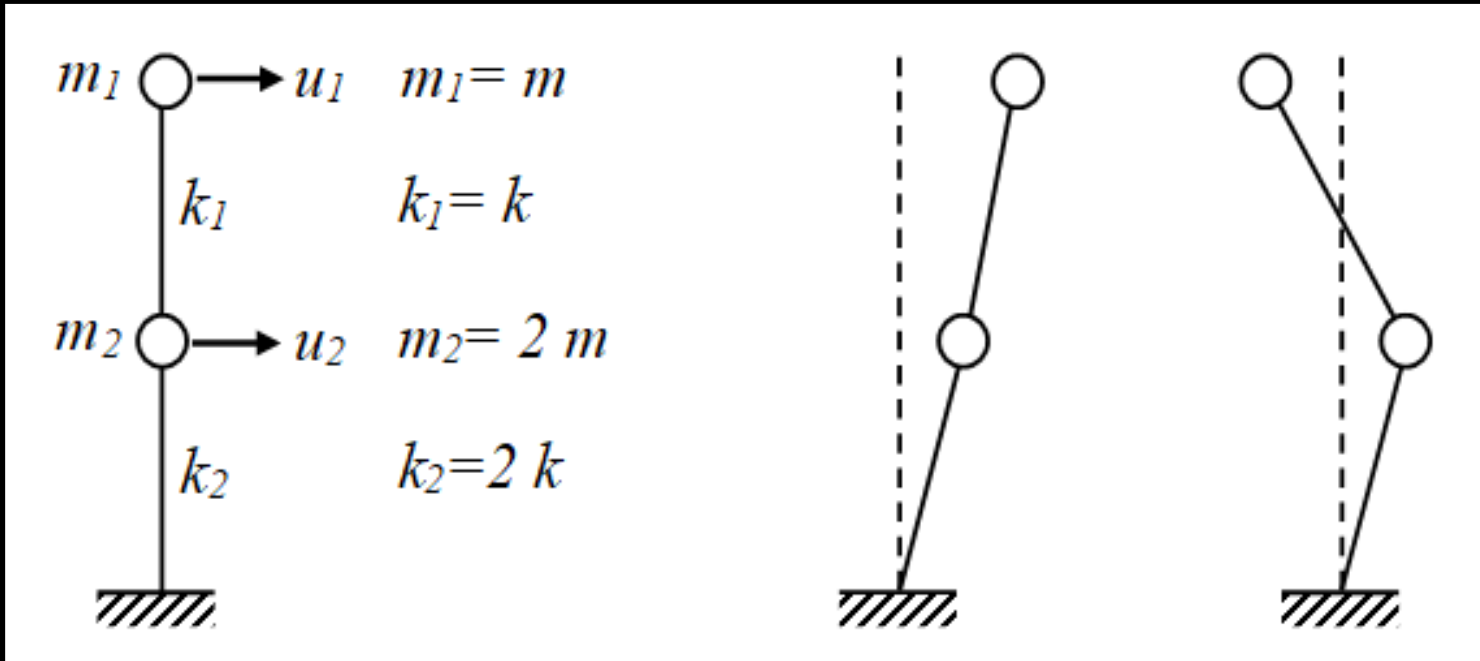
Οι ιδιομορφές είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα υπάρχει στον ίδιο χώρο σαν γραμμικό συνδυασμό των N ιδιομορφών. Οι μετακινήσεις των ιδιομορφών προσδιορίζονται μόνο ως προς τη σχέση των μετακινήσεων των ΒΕ και όχι σαν απόλυτες τιμές. Αν $\underline{\varphi}_n$ είναι η n -οστή ιδιομορφή, τότε κάθε διάνυσμα πολλαπλάσιο του $\underline{\varphi}_n$ είναι επίσης η n -οστή ιδιομορφή και ικανοποιεί την εξίσωση $(\underline{K} - \underline{M} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\varphi}_n = 0$.

Υπάρχουν 3 συνήθεις τρόποι κανονικοποίησης των ιδιομορφών. Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τα στοιχεία της κάθε ιδιομορφής ώστε:

- το μεγαλύτερο, σε απόλυτη τιμή, στοιχείο να ισούται με 1.0 ,
- η μετακίνηση του πάνω ορόφου να ισούται με 1.0 , και
- η γενικευμένη μάζα $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$ να ισούται με 1.0 .

Παράδειγμα-1

Ζητείται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιομορφών του πιο κάτω συστήματος, το οποίο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.



Επισημαίνοντας ότι σε αυτήν την περίπτωση ως βαθμός ελευθερίας u_1 έχει οριστεί η οριζόντια μετακίνηση της πάνω μάζας, σχηματίζονται τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας.

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3 \cdot k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \end{bmatrix}$$

Επιλύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση $|\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}} \cdot \omega_n^2| = 0$ του ιδιοπροβλήματος $(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\underline{\varphi}}_n = 0$ προσδιορίζουμε τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής.

$$|\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}} \cdot \omega_n^2| = \left| \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3 \cdot k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \cdot m \end{bmatrix} \cdot \omega_n^2 \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} k - m \cdot \omega_n^2 & -k \\ -k & 3 \cdot k - 2 \cdot m \cdot \omega_n^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow (k - m \cdot \omega_n^2) \cdot (3 \cdot k - 2 \cdot m \cdot \omega_n^2) - k^2 = 0$$

$$(k - m \cdot \omega_n^2) \cdot (3 \cdot k - 2 \cdot m \cdot \omega_n^2) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m^2 \cdot (\omega_n^2)^2 - 5 \cdot k \cdot m \cdot \omega_n^2 + 2 \cdot k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{5 \cdot k \cdot m \pm \sqrt{25 \cdot k^2 \cdot m^2 - 4 \cdot 2 \cdot m^2 \cdot 2 \cdot k^2}}{4 \cdot m^2} = \frac{5 \cdot k \cdot m \pm \sqrt{(25 - 16) \cdot k^2 \cdot m^2}}{4 \cdot m^2} = \frac{5 \pm 3 \cdot k}{4 \cdot m}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{2 \cdot m} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{2 \cdot k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2 \cdot m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} \quad , \quad T_2 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2 \cdot m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}}$$

Για να προσδιορίσουμε τις ιδιομορφές πρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετη τιμή για μια συνιστώσα μιας από τις N ιδιομορφές και στη συνέχεια να επιλύσουμε το $(N-1) \times (N-1)$ σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της συγκεκριμένης ιδιομορφής.

$$\left(\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \omega_n^2 \right) \cdot \underline{\varphi}_n = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3 \cdot k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \cdot m \end{bmatrix} \cdot \omega_n^2 \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

Για την 1^η ιδιομορφή, όπου $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2 \cdot m}}$, θέτοντας $\varphi_{11} = 1 \Rightarrow \varphi_{21} = 0.5$

Ενώ, για την 2^η ιδιομορφή $\omega_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}}$, θέτοντας $\varphi_{12} = 1 \Rightarrow \varphi_{22} = -1$

Αν έπρεπε να κανονικοποιηθούν οι ιδιομορφές ως προς το μητρώο μάζας, \underline{M} , τότε θα έπρεπε να διαιρεθούν τα στοιχεία της κάθε ιδιομορφής $\underline{\varphi}_n$ με την τετραγωνική ρίζα της γενικευμένης μάζας $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$, ώστε μετά την κανονικοποίηση να ισούται με μονάδα η γενικευμένη μάζα, m_n .

$$1^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = [1 \quad 0.5] \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 1.5 \cdot m$$

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} / \sqrt{1.5 \cdot m} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3 \cdot m}} \\ \sqrt{\frac{1}{6 \cdot m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.8165}{\sqrt{m}} \\ \frac{0.4082}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \Rightarrow m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 1.0$$

$$2^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = [1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot m$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} / \sqrt{3 \cdot m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3 \cdot m}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3 \cdot m}} \end{bmatrix} \Rightarrow m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = 1.0$$

Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Οι πραγματικές (ή φυσικές) μετακινήσεις $\underline{u}(t)$ ενός ΠΒΣ μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός των N ιδιομορφών $\underline{\varphi}_n$, οι οποίες αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες μορφές παραμόρφωσης, και των βαθμωτών ιδιομορφικών, ή γενικευμένων, συντεταγμένων ή μετακινήσεων (*modal/generalized coordinates/displacements*), $q_n(t)$, οι οποίες μεταβάλλονται με το χρόνο:

$$\underline{u}(t) = q_1(t) \cdot \underline{\varphi}_1 + q_2(t) \cdot \underline{\varphi}_2 + \dots + q_N(t) \cdot \underline{\varphi}_N = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης ενός ΠΒΣ χωρίς απόσβεση:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0}, \text{ με αρχικές συνθήκες } \underline{u}(0) \text{ και } \underline{\dot{u}}(0),$$

Και, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών, μετασχηματίζουμε το συζευγμένο σύστημα ΔΕ σε ένα σύστημα N ανεξάρτητων ΔΕ της εξής μορφής, με άγνωστες μεταβλητές τις γενικευμένες συντεταγμένες/μετακινήσεις:

$$\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot \ddot{q}_n(t) + \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = 0$$

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = 0$$

Οι αρχικές συνθήκες βάσει του συγκεκριμένου μετασχηματισμού είναι οι εξής:

$$\underline{q}_n(0) = \frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{u}(0)}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} \quad \text{και} \quad \dot{\underline{q}}_n(0) = \frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \dot{\underline{u}}(0)}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n}$$

Η λύση της κάθε ανεξάρτητης ΔΕ, $m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = 0$, έχει μορφή:

$$q_n(t) = A_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Συνεπώς οι μετακινήσεις ενός ΠΒΣ κατά την ελεύθερη ταλάντωση προκύπτουν από επαλληλία των ιδιομορφών:

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot (A_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t))$$

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = 0$$

Οι $(2 \times N)$ άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης προκύπτουν, από τις αντίστοιχες $(2 \times N)$ αρχικές συνθήκες για $\underline{u}(0)$ και $\dot{\underline{u}}(0)$, να ισούνται με:

$$A_n = q_n(0) \quad \text{και} \quad B_n = \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow \underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot \left(q_n(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \right)$$

Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Αντίστοιχα, για ένα ΠΒΣ με απόσβεση, εκφράζοντας τις πραγματικές μετακινήσεις συναρτήσει των ιδιομορφών και των γενικευμένων συνιστωσών:

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \ddot{\underline{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n$$

Από το $(N \times N)$ συζευγμένο σύστημα ΔΕ:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0}$$

προκύπτουν N - ανεξάρτητες ΔΕ:

$$\begin{aligned} \left(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \right) \cdot \ddot{q}_n(t) + \left(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varphi}_n \right) \cdot \dot{q}_n(t) + \left(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n \right) \cdot q_n(t) &= 0 \\ \Rightarrow m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + c_n \cdot \dot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) &= 0 \end{aligned}$$

όπου:

$$m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n : \text{γενικευμένη μάζα}$$

$$c_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varphi}_n : \text{γενικευμένη απόσβεση}$$

$$k_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n : \text{γενικευμένη δυσκαμψία}$$

Διαιρώντας την κάθε μία από τις πιο πάνω εξισώσεις διά τη γενικευμένη μάζα, m_n , προκύπτει η αντίστοιχη ΔΕ:

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = 0$$

$$\text{όπου: } \omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}} \quad \text{και} \quad \zeta_n = \frac{c_n}{2 \cdot m_n \cdot \omega_n} = \frac{c_n}{C_{\alpha,n}}$$

Η λύση της κάθε μιας ανεξάρτητης ΔΕ είναι:

$$q_n(t) = \left(q_n(0) \cdot \cos(\omega_{dn} \cdot t) + \frac{\dot{q}_n(0) + \omega_n \cdot \zeta_n \cdot q_n(0)}{\omega_{dn}} \cdot \sin(\omega_{dn} \cdot t) \right) \cdot e^{-\omega_n \cdot \zeta_n \cdot t}$$

όπου $\omega_{dn} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2}$ είναι η αποσβεσμένη γωνιακή ιδιοσυχνότητα της n ιδιομορφής, λαμβάνοντας υπόψη την απόσβεση.

Συνεπώς οι συνολικές μετακινήσεις προκύπτουν από επαλληλία των ιδιομορφικών συνεισφορών:

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \left(\underline{\varphi}_n \cdot \left(q_n(0) \cdot \cos(\omega_{dn} \cdot t) + \frac{\dot{q}_n(0) + \omega_n \cdot \zeta_n \cdot q_n(0)}{\omega_{dn}} \cdot \sin(\omega_{dn} \cdot t) \right) \cdot e^{-\omega_n \cdot \zeta_n \cdot t} \right)$$

Free vibration of classically damped system: $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_1$

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

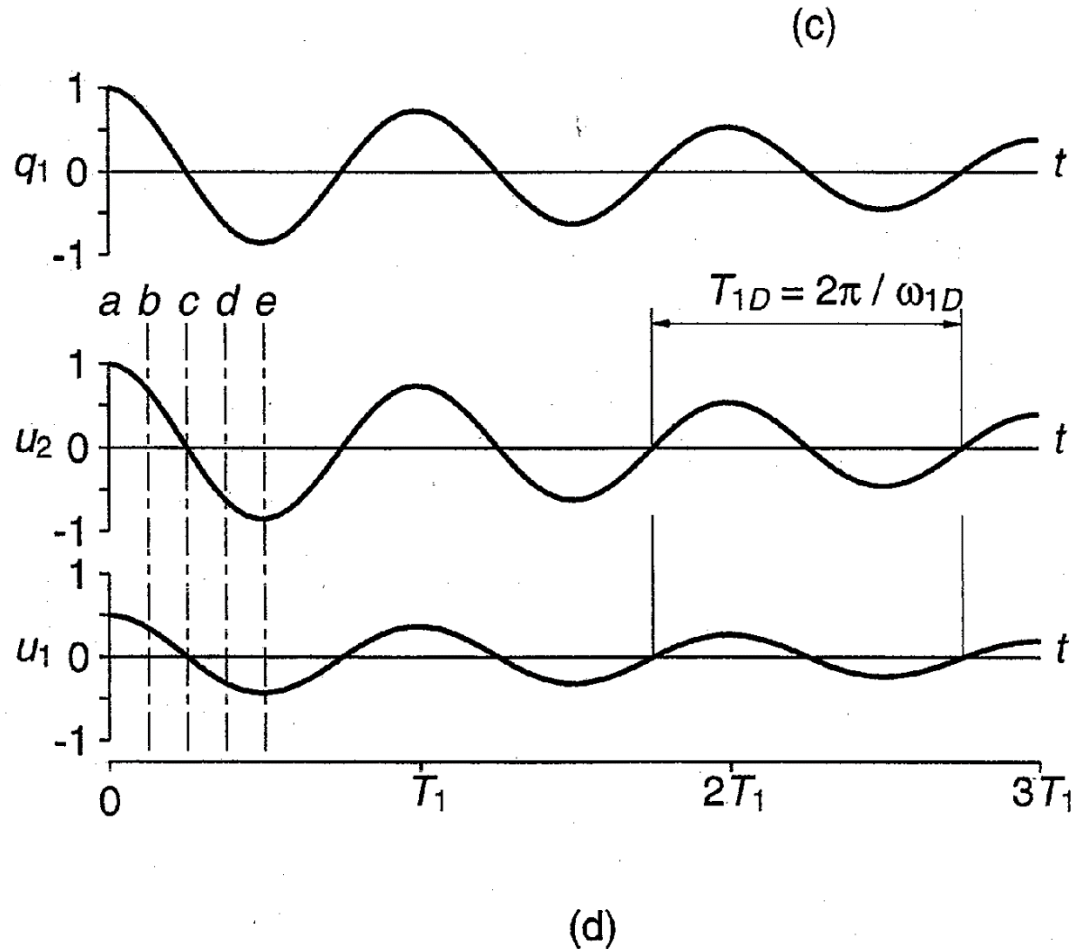
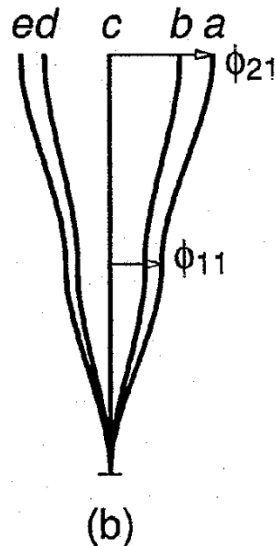
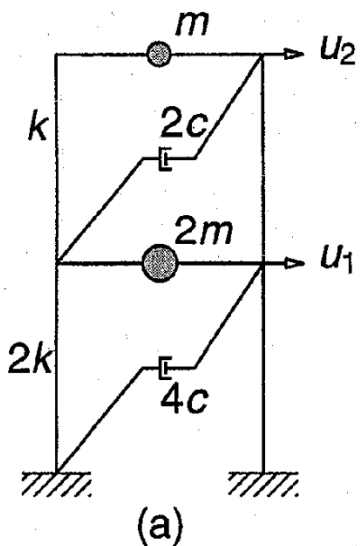


Figure 10.9.3 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Free vibration of classically damped system: $\mathbf{u}(0) = \phi_2$

Από το βιβλίο:
 “Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

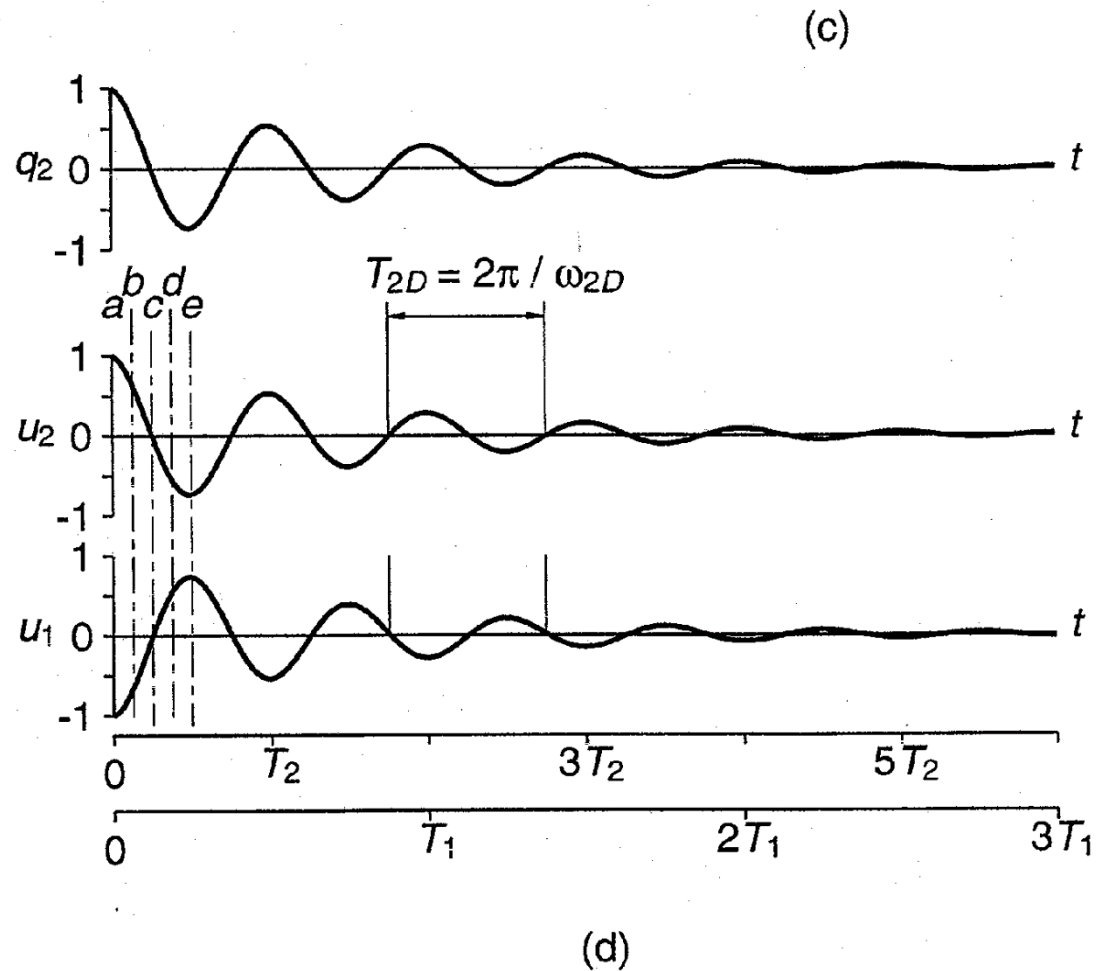
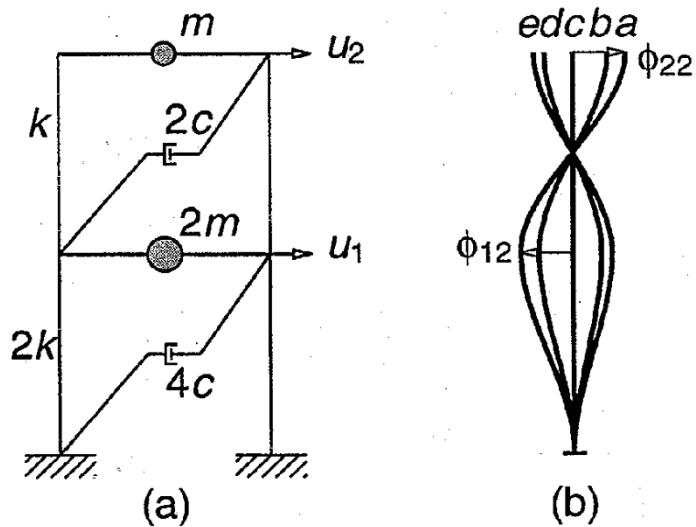
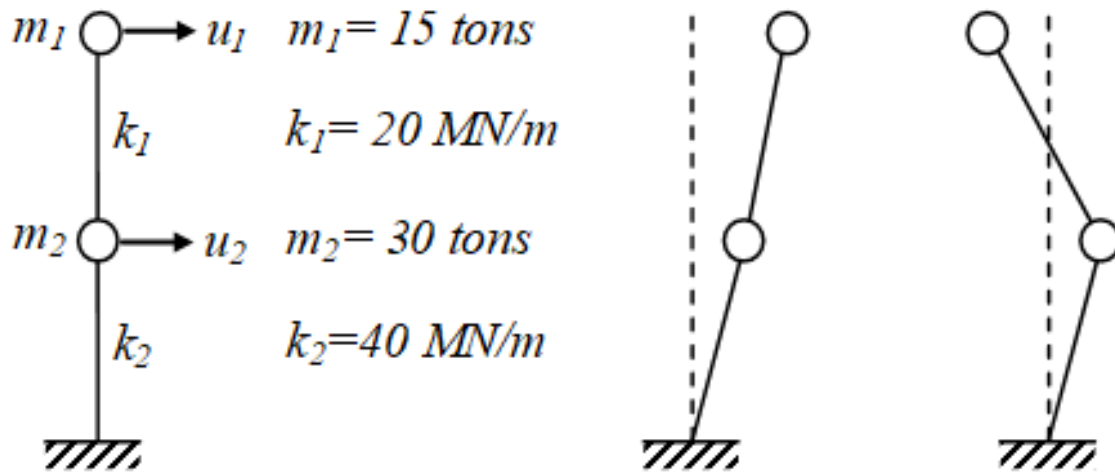


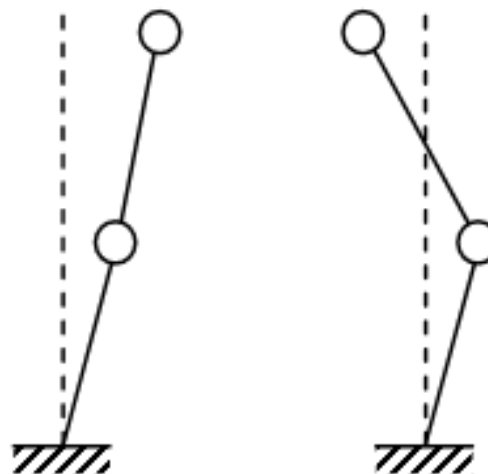
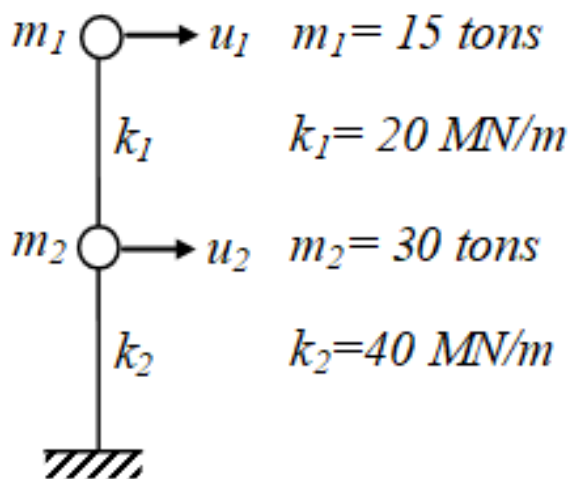
Figure 10.9.4 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Παράδειγμα-2

Ζητείται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιομορφών του πιο κάτω συστήματος, το οποίο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (Σχήμα 12.11), τις οποίες πρέπει να κανονικοποιήσετε και με τους 3 τρόπους που έχουν επεξηγηθεί πιο πάνω. Επίσης, εκφράστε τη μετακίνηση $\underline{u}^* = [1 \ 1]^T$ συναρτήσει των ιδιομορφών της κατασκευής.



Σχήμα 12.11: ΠΒΣ με 2 δυναμικούς ΒΕ και οι δύο ιδιομορφές του.



Επισημαίνοντας ότι σε αυτήν την περίπτωση ως βαθμός ελευθερίας u_1 έχει οριστεί η οριζόντια μετακίνηση της πάνω μάζας, σχηματίζονται τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας.

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \text{ MN/m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ tons} = \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \text{ Kg}$$

Επιλύοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση $|\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \omega_n^2| = 0$ του ιδιοπροβλήματος $(\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\varphi}_n = 0$ προσδιορίζουμε τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής.

$$|\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \omega_n^2| = \left| \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6 - \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \omega_n^2 \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 20 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^3 \cdot \omega_n^2 & -20 \cdot 10^6 \\ -20 \cdot 10^6 & 60 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^3 \cdot \omega_n^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow 45 \cdot 10^7 \cdot (\omega_n^2)^2 - 15 \cdot 10^{11} \cdot \omega_n^2 + 8 \cdot 10^{14} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 25.82 \text{ rad / sec}, \quad \omega_2 = 51.64 \text{ rad / sec}$$

$$\Rightarrow T_1 = 0.2433 \text{ sec}, \quad T_2 = 0.1217 \text{ sec}$$

Για να προσδιορίσουμε τις ιδιομορφές πρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετη τιμή για μια συνιστώσα μιας από τις N ιδιομορφές και στη συνέχεια να επιλύσουμε το $(N-1) \times (N-1)$ σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της συγκεκριμένης ιδιομορφής.

$$\left(\underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \omega_n^2 \right) \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6 - \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \omega_n^2 \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

Για την 1^η ιδιομορφή, όπου $\omega_1 = 25.82 \text{ rad/sec}$, θέτοντας $\varphi_{11} = 1 \Rightarrow \varphi_{21} = 0.5$

Ενώ, για την 2^η ιδιομορφή $\omega_2 = 51.64 \text{ rad/sec}$, θέτοντας $\varphi_{12} = 1 \Rightarrow \varphi_{22} = -1$

Οι ιδιομορφές της κατασκευής, όπως έχουν υπολογιστεί, είναι κανονικοποιημένες έτσι ώστε το μέγιστο στοιχείο τους να έχει μοναδιαία τιμή αλλά και ταυτοχρόνως να έχει μοναδιαία τιμή η μετακίνηση του ανώτατου ορόφου.

$$1^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } \underline{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad 2^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } \underline{\boldsymbol{\varphi}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Αν έπρεπε να κανονικοποιηθούν οι ιδιομορφές ως προς το μητρώο μάζας, \underline{M} , τότε θα έπρεπε να διαιρεθούν τα στοιχεία της κάθε ιδιομορφής $\underline{\varphi}_n$ με την τετραγωνική ρίζα της γενικευμένης μάζας $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$, ώστε μετά την κανονικοποίηση να ισούται με μονάδα η γενικευμένη μάζα, m_n .

$$1^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = [1 \quad 0.5] \cdot \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 22500$$

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} / \sqrt{22500} = \begin{bmatrix} 0.006667 \\ 0.003333 \end{bmatrix} \Rightarrow m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 1.0$$

$$2^{\text{η}} \text{ ιδιομορφή: } m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = [1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 45000$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} / \sqrt{45000} = \begin{bmatrix} 0.00471 \\ -0.00471 \end{bmatrix} \Rightarrow m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = 1.0$$

Οι μετακινήσεις ενός ΠΒΣ, π.χ. όπως αυτές του διανύσματος \underline{u}^* , μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιομορφών του.

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{u}^* = \sum_{n=1}^N \varphi_n \cdot q_n^* = \varphi_1 \cdot q_1^* + \varphi_2 \cdot q_2^*$$

$$\Rightarrow \underline{q}_1^* = \frac{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{u}^*}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} = \frac{[0.006667 \quad 0.003333] \cdot \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{1.0} = 200$$

$$\Rightarrow \underline{q}_2^* = \frac{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{u}^*}{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2} = \frac{[0.00471 \quad -0.00471] \cdot \begin{bmatrix} 15000 & 0 \\ 0 & 30000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{1.0} = -70.711$$

$$\Rightarrow \underline{u}^* = \underline{\varphi}_1 \cdot q_1^* + \underline{\varphi}_2 \cdot q_2^* = \begin{bmatrix} 0.006667 \\ 0.003333 \end{bmatrix} \cdot 200 - \begin{bmatrix} 0.00471 \\ -0.00471 \end{bmatrix} \cdot 70.71 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Η απόκριση του συγκεκριμένου ΠΒΣ όταν οι δύο μάζες του εκτραπούν από τη θέση ισορροπίας κατά $\underline{u}^* = [1 \quad 1]^T$ μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα των συνεισφορών της κάθε μίας από τις δύο ιδιομορφές του.

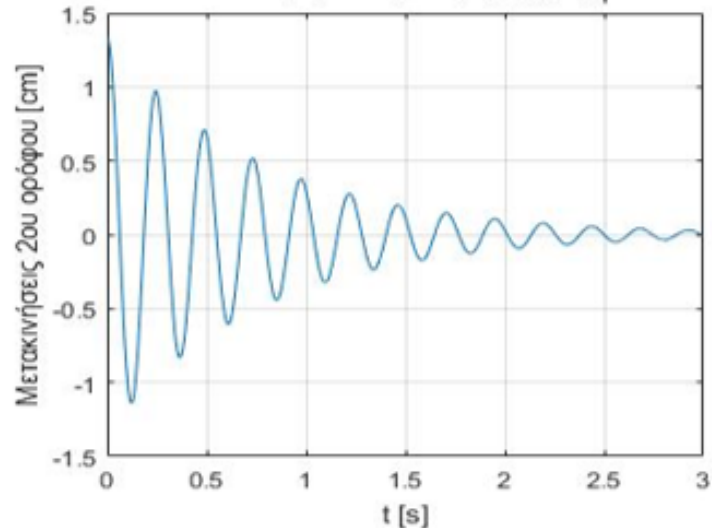
Η συνεισφορά της κάθε ιδιομορφής $\underline{\varphi}_i$ δίνεται από την επόμενη σχέση και παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.12 για κάθε μάζα, κάτω και πάνω αντίστοιχα.

$$\underline{u}_i(t) = \underline{\varphi}_i \cdot q_i(t) = \underline{\varphi}_i \cdot \left(q_i(0) \cdot \cos(\omega_{di} \cdot t) + \frac{\dot{q}_i(0) + \omega_i \cdot \zeta_i \cdot q_i(0)}{\omega_{di}} \cdot \sin(\omega_{di} \cdot t) \right) \cdot e^{-\omega_i \cdot \zeta_i \cdot t}$$

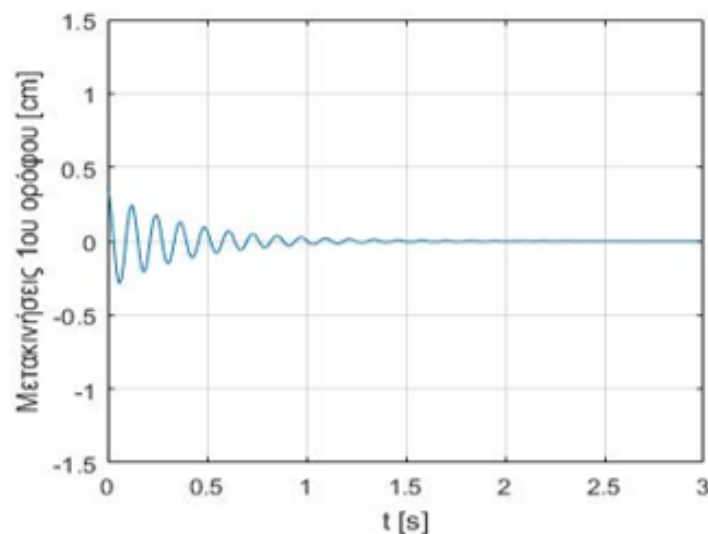
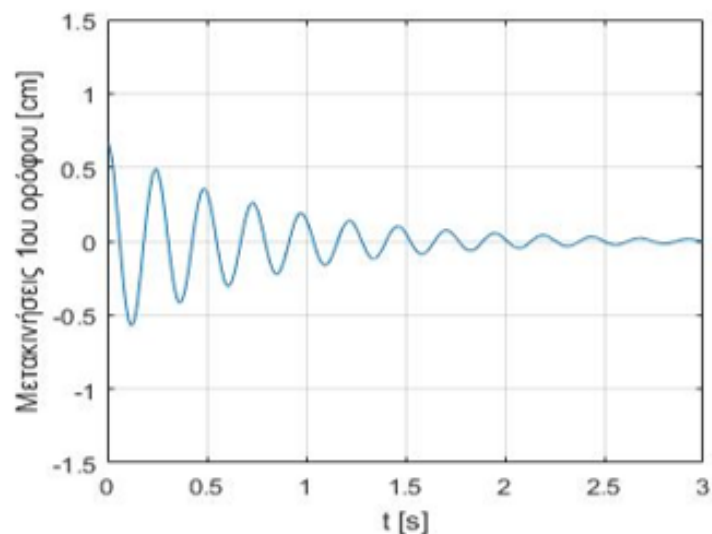
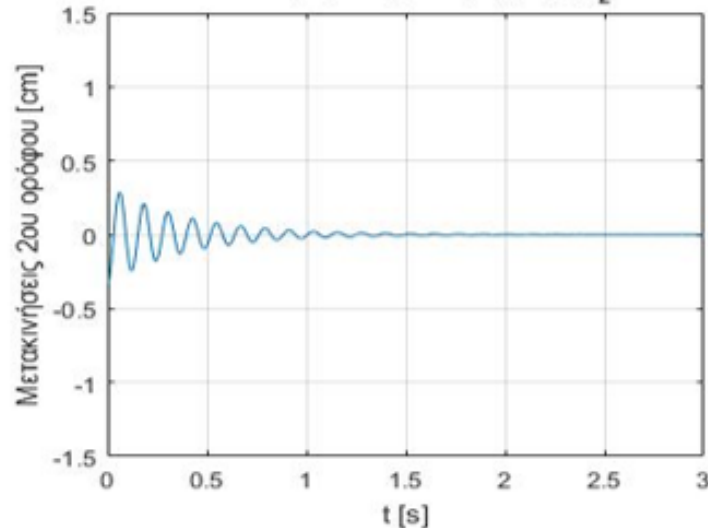
Ενώ οι συνολικές αποκρίσεις των δύο μαζών του ΠΒΣ παρέχονται από την επόμενη σχέση και παρουσιάζονται στο Σχήμα 12.13:

$$\Rightarrow \underline{u}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{u}_i(t) = \sum_{i=1}^N \underline{\varphi}_i \cdot q_i(t) = \underline{\varphi}_1 \cdot q_1(t) + \underline{\varphi}_2 \cdot q_2(t)$$

Συνεισφορά 1ης ιδιομορφής, φ_1



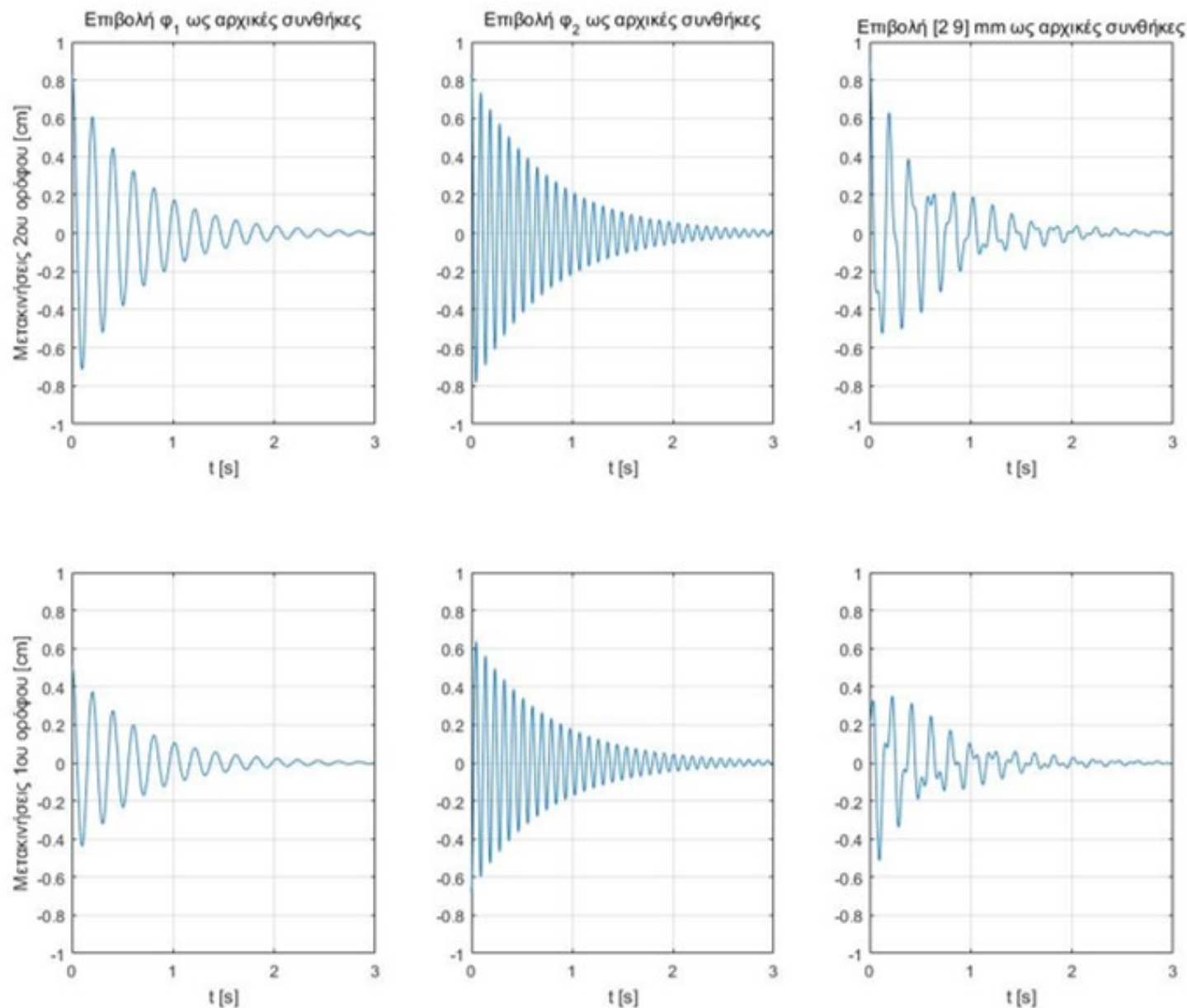
Συνεισφορά 2ης ιδιομορφής, φ_2



Σχήμα 12.12: Συνεισφορές της 1^{ης} (αριστερά) και της 2^{ης} (δεξιά) ιδιομορφής στη χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης του 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) ΠΒΣ (με λόγους ιξώδους απόσβεσης 5%) με αρχικές μεταθέσεις [1 1].

Στη συνέχεια υποβάλουμε το διώροφο πλαίσιο που είχαμε εξετάσει στο Σχήμα 12.4 σε ελεύθερη ταλάντωση, θεωρώντας ότι έχει απόσβεση με λόγο απόσβεσης για την 1^η ιδιομορφή $\zeta_1 = 5\%$ και για τη 2^η ιδιομορφή $\zeta_2 = 5\%$. Οι αναπόσβεστες ιδιοπερίοδοι του πλαισίου είχαν υπολογιστεί να είναι $T_1 = 0.2023\text{ s}$ και $T_2 = 0.0933\text{ s}$, ενώ λαμβάνοντας υπόψη την απόσβεση οι αποσβεσμένες ιδιοπερίοδοι είναι $T_{d1} = 0.2026\text{ s}$ και $T_{d2} = 0.0933\text{ s}$.

Η πρώτη στήλη του πιο κάτω σχήματος (Σχήμα 12.14) παρέχει την απόκριση των δύο μαζών (πάνω και κάτω, αντίστοιχα) στην περίπτωση επιβολής της ιδιομορφής $\underline{\varphi}_1$ ως αρχικές μεταθέσεις, η δεύτερη στήλη παρέχει την απόκριση των δύο μαζών (πάνω και κάτω, αντίστοιχα) στην περίπτωση επιβολής της ιδιομορφής $\underline{\varphi}_2$ ως αρχικές μεταθέσεις και η τρίτη στήλη παρέχει την απόκριση των δύο μαζών στην περίπτωση επιβολής της ιδιομορφής τυχαίων αρχικών μετατοπίσεων, 2 και 9 χιλιοστά. Παρατηρούμε ότι οι αποκρίσεις όταν επιβληθούν αρχικές συνθήκες σύμφωνα με μια ιδιομορφή είναι αρμονικές, διαφορετικά δεν είναι αρμονικές. Επιπλέον, φαίνεται η επίδραση του σχετικά μικρότερου λόγου ιξώδους απόσβεσης για τη 2^η ιδιομορφή, όταν επιβάλλονται οι αντίστοιχες αρχικές μεταθέσεις.



Σχήμα 12.14: Χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης 1^{ου} (κάτω) και 2^{ου} ορόφου (πάνω) ΠΒΣ με λόγους ιξώδους απόσβεσης $\zeta_1=5\%$ και $\zeta_2=2\%$.

Απόσβεση

Επειδή είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογιστούν οι συντελεστές του μητρώου απόσβεσης \underline{C} μιας κατασκευής από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της, εναλλακτικά μπορούν να εκτιμηθούν οι γενικευμένοι λόγοι απόσβεσης ζ_n για την κάθε n -ιδιομορφή. Αν χρησιμοποιηθεί ιδιομορφική ανάλυση τότε απλά για κάθε ιδιομορφή μπορεί να καθοριστεί ο λόγος απόσβεσης ζ_n . Για να γίνει αυτό πρέπει η απόσβεση της κατασκευής να είναι κλασσική, οπότε και ισχύει η ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών. Όμως για να μπορεί να μετασχηματιστεί το συζευγμένο σύστημα ΔE σε ένα σύστημα ανεξάρτητων ΔE πρέπει να ισχύει η ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών και για το μητρώο απόσβεσης. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να διασφαλιστεί εάν οριστεί το μητρώο απόσβεσης ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας, αφού για αυτά ισχύει η ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών.

Αν όμως χρησιμοποιηθεί απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος ΔE κίνησης, χωρίς οποιοδήποτε μετασχηματισμό, τότε πρέπει να σχηματιστεί το μητρώο απόσβεσης \underline{C} . Ο πιο απλός τρόπος είναι ο σχηματισμός μητρώων απόσβεσης κατά Rayleigh, ο οποίος είναι αποδεκτός όταν οι ιδιοσυχνότητες του κτηρίου είναι σε ικανοποιητικό βαθμό διαφορετικές.

Απόσβεση κατά *Rayleigh*

Σύμφωνα με την απόσβεση κατά *Rayleigh*, το μητρώο απόσβεσης είναι γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας, το οποίο εξασφαλίζει την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών και για το μητρώο απόσβεσης:

$$\underline{C} = \alpha \cdot \underline{M} + \beta \cdot \underline{K}$$

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για την n -ιδιομορφή

$$c_n = \alpha \cdot m_n + \beta \cdot k_n \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \mu_n \cdot \omega_n \cdot \zeta_n = \alpha \cdot \mu_n + \beta \cdot \omega_n^2 \cdot \mu_n$$

Έτσι προκύπτει η πιο κάτω σχέση για το λόγο απόσβεσης της n -ιδιομορφής

$$\zeta_n = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_n} + \frac{\beta \cdot \omega_n}{2}$$

Για να προσδιοριστούν οι δύο σταθερές α και β μπορούμε να ορίσουμε το λόγο απόσβεσης για δύο ιδιομορφές, ώστε να προκύψουν δύο εξισώσεις της πιο κάτω μορφής:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_i} + \frac{\beta \cdot \omega_i}{2}, \quad \zeta_j = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_j} + \frac{\beta \cdot \omega_j}{2}$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_i} + \frac{\beta \cdot \omega_i}{2}, \quad \zeta_j = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_j} + \frac{\beta \cdot \omega_j}{2}$$

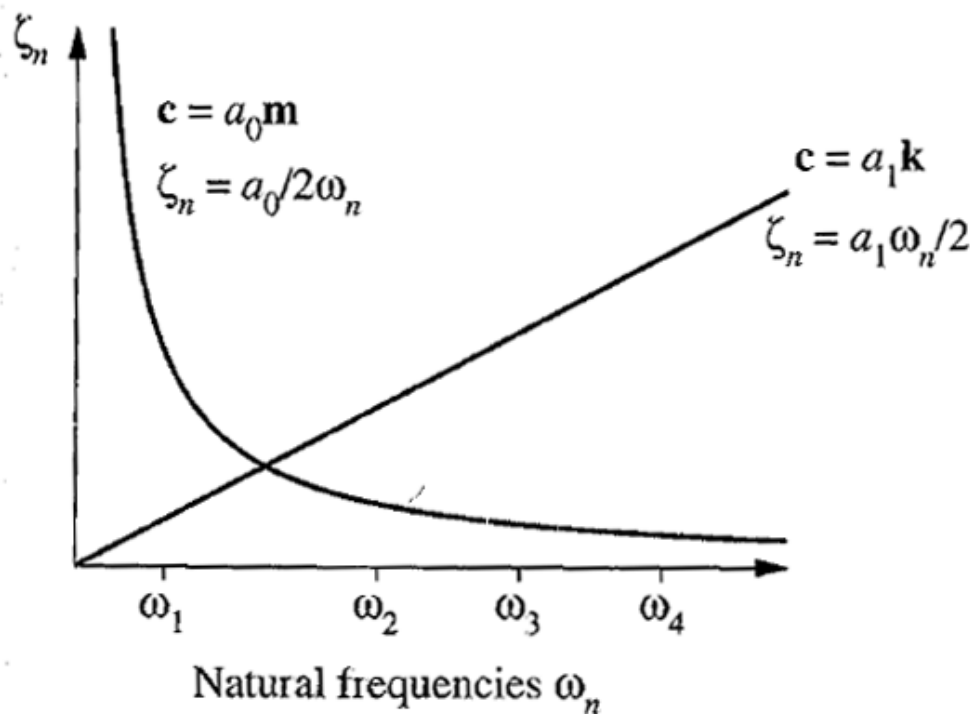
Λύνοντας το πιο κάτω 2×2 σύστημα γραμμικών εξισώσεων, προσδιορίζονται οι σταθερές α και β .

$$\begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(2 \cdot \omega_i) & \omega_i / 2 \\ 1/(2 \cdot \omega_j) & \omega_j / 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(2 \cdot \omega_i) & \omega_i / 2 \\ 1/(2 \cdot \omega_j) & \omega_j / 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{bmatrix}$$

Οι λόγοι απόσβεσης που αντιστοιχούν στις άλλες ιδιομορφές μπορούν να προσδιοριστούν με δεδομένες τις σταθερές α και β .

Αν και οι λόγοι απόσβεσης για τις ιδιομορφές μιας κατασκευής γενικά έχουν διαφορετικές τιμές, ο ακριβής υπολογισμός τους είναι πρακτικά αδύνατος. Έτσι, συχνά θεωρούνται ότι είναι ίσοι με τιμές για συνήθης κτηριακές κατασκευές γύρω στο 2-5 %.

(a)



(b)

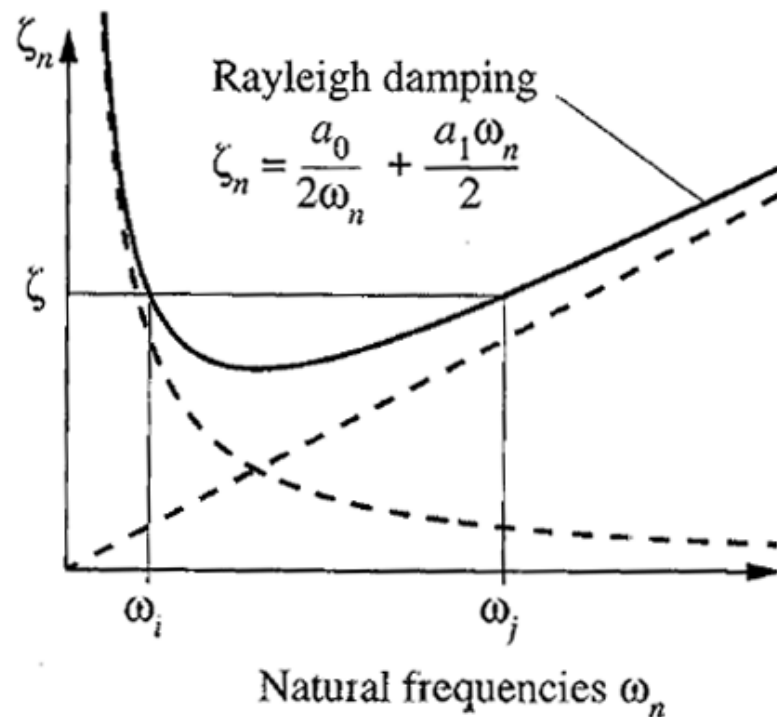


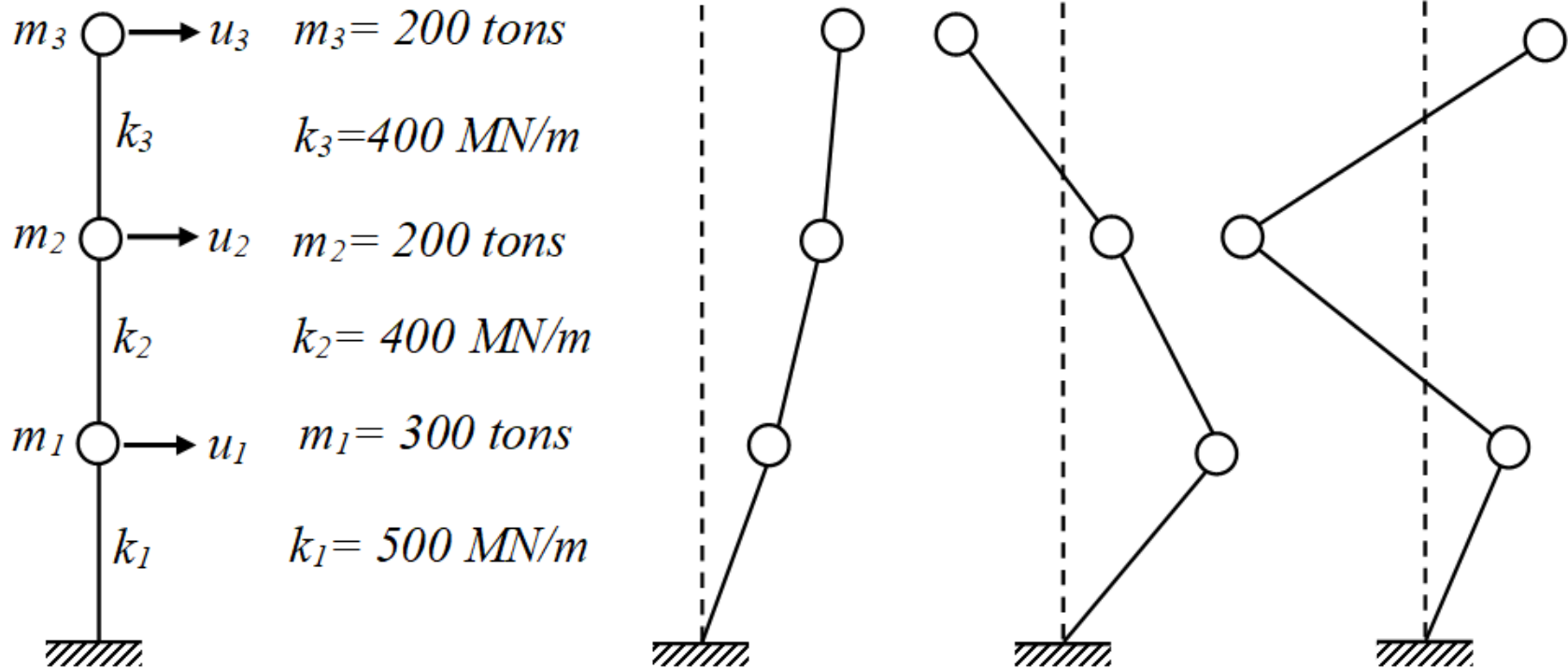
Figure 11.4.2 Variation of modal damping ratios with natural frequency: (a) mass-proportional damping and stiffness-proportional damping; (b) Rayleigh damping.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra

Παράδειγμα-3

Ζητείται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιομορφών του πιο κάτω πολυβάθμιου συστήματος (Σχήμα 12.15). Στη συνέχεια, θεωρώντας για την 1^η και την 3^η ιδιομορφή ποσοστά απόσβεσης ίσα με 5% και 2%, αντίστοιχα, ζητείται ο υπολογισμός του μητρώου απόσβεσης κατά Rayleigh.



Σχήμα 12.15: ΠΒΣ με 3 δυναμικούς ΒΕ και οι τρεις ιδιομορφές του.

Τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας μορφώνονται όπως πιο κάτω:

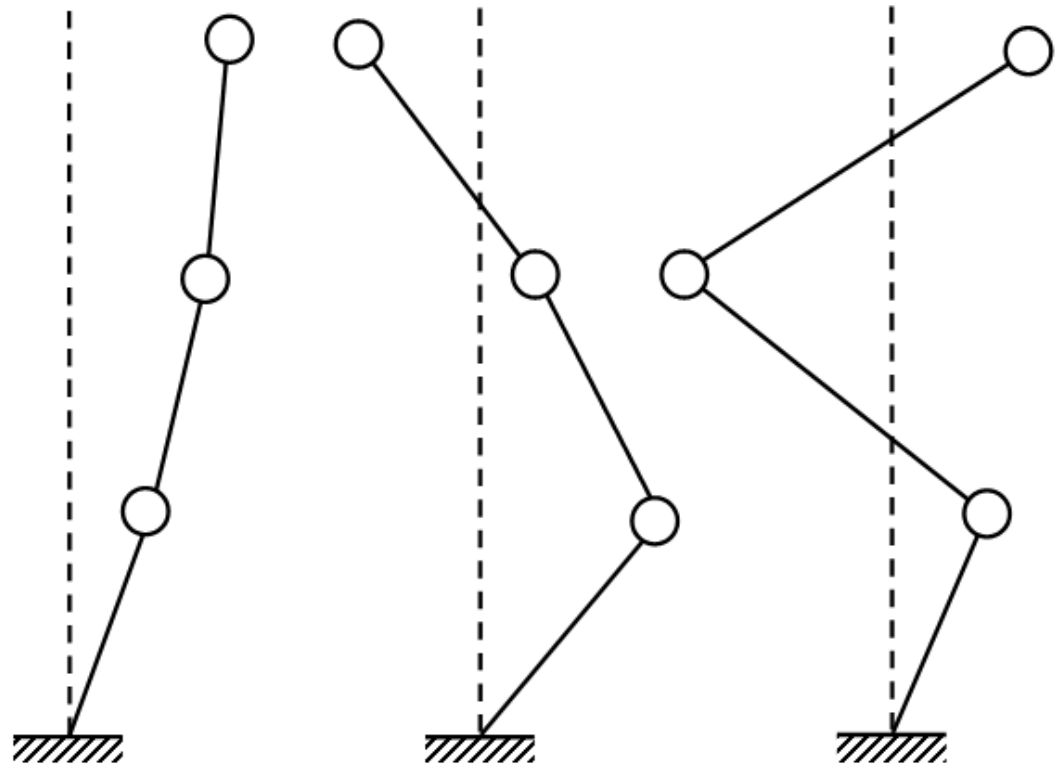
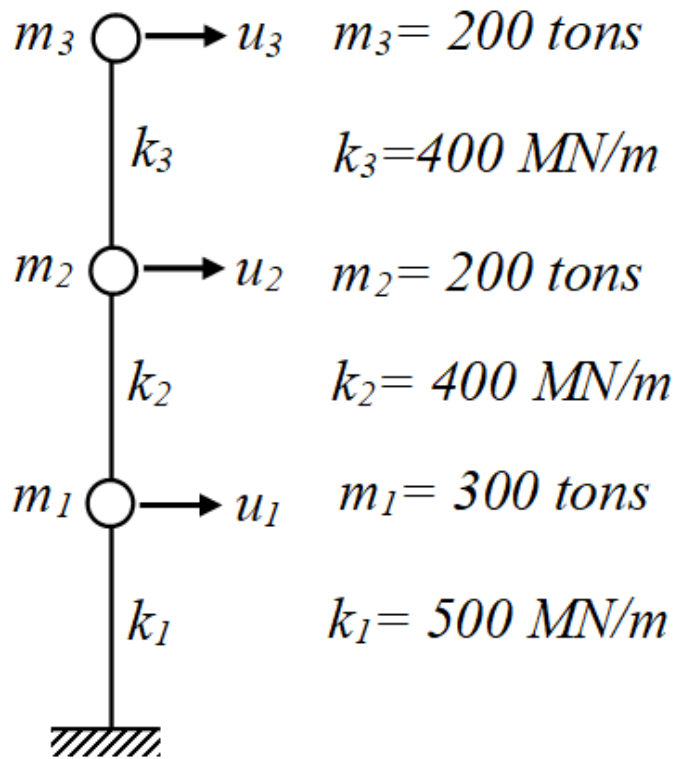
$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & -400 & 0 \\ -400 & 800 & -400 \\ 0 & -400 & 400 \end{bmatrix} \text{ MN / m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ tons}$$

Χρησιμοποιώντας το μαθηματικό πρόγραμμα Matlab, όπως φαίνεται πιο κάτω, μπορούμε να επιλύσουμε το ιδιοπρόβλημα $(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{M}} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\underline{\phi}}_n = 0$ και να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές της κατασκευής.

$$\Rightarrow \omega_1 = 20.63 \text{ rad / sec}, \quad \omega_2 = 51.44 \text{ rad / sec}, \quad \omega_3 = 77.0 \text{ rad / sec}$$

$$\Rightarrow T_1 = 0.3048 \text{ sec}, \quad T_2 = 0.1221 \text{ sec}, \quad T_3 = 0.0816 \text{ sec}$$



Τις ιδιομορφές της κατασκευής τις κανονικοποιούμε ως προς το μητρώο μάζας, \underline{M} .

$$\Rightarrow \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0.00067 \\ 0.00129 \\ 0.00164 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0.00149 \\ 0.00040 \\ -0.00122 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 0.00081 \\ -0.00178 \\ 0.00091 \end{bmatrix}$$

Ορίζοντας λόγους απόσβεσης 5% και 2% για την 1^η και την 3^η ιδιομορφή, αντίστοιχα, σχηματίζουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, το οποίο επιλύνουμε για να προσδιοριστούν οι σταθερές α και β .

$$\zeta_1 = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_1} + \frac{\beta \cdot \omega_1}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_3} + \frac{\beta \cdot \omega_3}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(2 \cdot \omega_1) & \omega_1/2 \\ 1/(2 \cdot \omega_3) & \omega_3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(2 \cdot \omega_1) & \omega_1/2 \\ 1/(2 \cdot \omega_3) & \omega_3/2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = 20.63 \text{ rad/sec}, & \zeta_1 = 5\% \\ \omega_3 = 77.00 \text{ rad/sec}, & \zeta_3 = 2\% \end{array} \Rightarrow \alpha = 1.9827 \quad \beta = 0.0001851$$

Έχοντας υπολογίσει τις σταθερές α και β , σχηματίζεται το μητρώο απόσβεσης.

$$\Rightarrow \underline{C} = \alpha \cdot \underline{M} + \beta \cdot \underline{K} = \begin{bmatrix} 761.4 & -74.0 & 0 \\ -74.0 & 544.6 & -74.0 \\ 0 & -74.0 & 470.6 \end{bmatrix} \text{KN} \cdot \text{sec/m}$$

Τέλος, το ποσοστό απόσβεσης για τη 2^η ιδιομορφή που αντιστοιχεί στο πιο πάνω μητρώο απόσβεσης κατά Rayleigh ισούται με

$$\Rightarrow \zeta_2 = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_2} + \frac{\beta \cdot \omega_2}{2} = \frac{1.9827}{2 \cdot 51.44} + \frac{0.0001851 \cdot 51.44}{2} = 0.024 = 2.4\%$$

Παράδειγμα 12.2: Εντολές Matlab

k1=500e6

k2=400e6

k3=400e6

m1=300e3

m2=200e3

m3=200e3

$$M = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$
$$K = \begin{bmatrix} k1+k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & k2+k3 & -k3 \\ 0 & -k3 & k3 \end{bmatrix}$$

[modes, eigenvalues2] = eig(K,M);

```
idiomorph1 = modes(:,1)/sqrt((modes(:,1))'*M*modes(:,1));
```

```
idiomorph2 = modes(:,2)/sqrt((modes(:,2))'*M*modes(:,2));
```

```
idiomorph3 = modes(:,3)/sqrt((modes(:,3))'*M*modes(:,3));
```

```
w1 = sqrt(eigenvalues2(1,1))
```

```
w2 = sqrt(eigenvalues2(2,2))
```

```
w3 = sqrt(eigenvalues2(3,3))
```

```
T1 = 2 * pi / w1
```

```
T2 = 2 * pi / w2
```

```
T3 = 2 * pi / w3
```

$z1 = 0.05;$

$z3 = 0.02;$

$\text{coef} = \text{inv}([1/2/w1 \quad w1/2 ; 1/2/w3 \quad w3/2])* [z1 ; z3];$

$a = \text{coef}(1);$

$b = \text{coef}(2);$

$C = a * M + b * K$

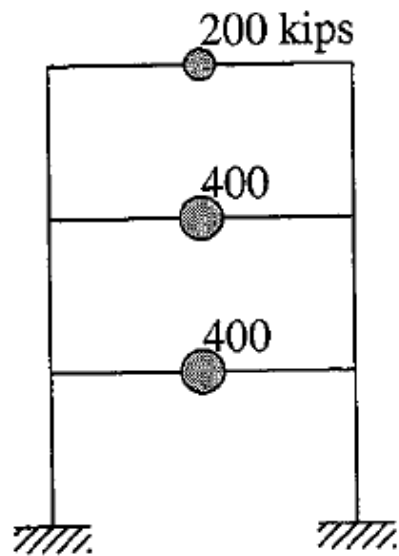
$z2 = a / 2 / w2 + b * w2 / 2$

```
subplot(2,1,1)
hold on
grid on
heights = 0:3;
scaling = 4*max(max(abs(modes)));
for i=1:3
    plot(1*i + [ 0 modes(:,i)' ]./scaling,heights, 'k')
    plot(1*i + modes(:,i)./scaling,heights(2:4),'o')
    plot([ 1*i 1*i],[0 9], '--')
end

axis([0 4 0 3.5])
xlabel('Idiomorfes')
ylabel('Orofoi')
```

Example 11.1

The properties of a three-story shear building are given in Fig. E11.1. These include the floor weights, story stiffnesses, natural frequencies, and modes. Derive a Rayleigh damping matrix such that the damping ratio is 5% for the first and second modes. Compute the damping ratio for the third mode.



k_{story} , kips/in.

610

610

610

$$\omega_n = 12.57, 34.33, 46.89 \text{ rad/sec}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.401 \\ 0.695 \\ 0.803 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 0.803 \\ 0 \\ -0.803 \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 0.401 \\ -0.695 \\ 0.803 \end{Bmatrix}$$

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure E11.1

Solution

1. Set up the mass and stiffness matrices.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{386} \begin{bmatrix} 400 & & \\ & 400 & \\ & & 200 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = 610 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

2. Determine a_0 and a_1 from Eq. (11.4.9).

$$\begin{bmatrix} 1/12.57 & 12.57 \\ 1/34.33 & 34.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

These algebraic equations have the following solution:

$$a_0 = 0.9198 \quad a_1 = 0.0021$$

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
- Anil K. Chopra (c)

3. Evaluate the damping matrix.

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3.55 & -1.30 & 0 \\ & 3.55 & -1.30 \\ (\text{sym}) & & 1.78 \end{bmatrix} \quad (d)$$

4. Compute ζ_3 from Eq. (11.4.8).

$$\zeta_3 = \frac{0.9198}{2(46.89)} + \frac{0.0021(46.89)}{2} = 0.0593 \quad (e)$$

Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων/ιδιομορφών με το πρόγραμμα Matlab

Η επίλυση του ιδιοπροβλήματος και η εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιομορφών είναι πολύ απλή με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος Matlab.

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση *eig()*, η οποία λαμβάνει ως παραμέτρους το μητρώο δυσκαμψίας και μάζας, επιστρέφει δύο μητρώα, τα οποία περιέχουν τα τετράγωνα των γωνιακών ιδιοσυχνοτήτων στη διαγώνιο του πρώτου μητρώου και τις ιδιομορφές στις στήλες του δεύτερου μητρώου.

Παραδείγματος χάριν, η κλήση της συνάρτησης *eig()*, στην οποία αποστέλλονται τα μητρώα δυσκαμψίας, K , και μάζας, M , επιστρέφει δύο πίνακες. Στις στήλες του πρώτου πίνακα, στον οποίο εδώ δώσαμε το όνομα *idionorfes*, παρέχονται οι ιδιομορφές, $\underline{\varphi}_i$ και στα διαγώνια στοιχεία του δεύτερου πίνακα, στον οποίο δώσαμε το όνομα *w2*, παρέχονται τα τετράγωνα των ιδιοσυχνοτήτων της κατασκευής, ω_i .

Με τις πιο κάτω εντολές, αφού επιστραφούν, στους πίνακες *idiomorfes* και *w2*, οι ιδιομορφές της κατασκευής και τα τετράγωνα των ιδιοσυχνοτήτων, αντίστοιχα, αποθηκεύονται στο διάνυσμα *w* οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής, ω_i , και στις στήλες του πίνακα *idiomorfes* οι κανονικοποιημένες ως προς το μητρών μάζας ιδιομορφές, $\underline{\varphi}_i$.

```
[idiomorfes , w2] = eig(K , M)
```

```
N = length(w2)
```

```
for i = 1 : N
```

```
    w(i) = sqrt(w2(i,i))
```

```
    fi =idiomorfes(:,i)
```

```
    idiomorfes(:,i) = fi / sqrt(fi' * M * fi)
```

```
end
```

Μέθοδος αντιστρόφου επανάληψης (Stodola-Vianello) για την εύρεση ιδιοτιμών/ιδιομορφών

Για να προσδιοριστούν αριθμητικά οι ιδιομορφές και οι ιδιοσυχνότητες μίας κατασκευής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αριθμητική μέθοδος, όπως ο αλγόριθμος αντίστροφης επανάληψης, άλλως μέθοδος Stodola-Vianello. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το ιδιοπρόβλημα: $\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\Phi} = \omega^2 \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\Phi}$

Αν τα μητρώα δυσκαμψίας, $\underline{\mathbf{K}}$, και μάζας, $\underline{\mathbf{M}}$, είναι θετικά ορισμένα τότε όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και η πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι η πιο μικρή:

$$0 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_N^2$$

Η 1^η γωνιακή ιδιοσυχνότητα, ω_1 , και η αντίστοιχη ιδιομορφή, $\underline{\phi}_1$, μπορούν να προσδιοριστούν ξεκινώντας με αυθαίρετο διάνυσμα $\underline{V}_1^{(0)}$ (έστω $\underline{V}_1^{(0)} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$), λαμβάνοντας υπόψη ότι τι ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα (ιδιομορφή) είναι γνωστό μόνο σαν μορφή και όχι με απόλυτες τιμές των στοιχείων του:

$$\underline{K} \cdot \underline{V}_1^{(1)} = \underline{M} \cdot \underline{V}_1^{(0)} \Rightarrow \underline{V}_1^{(1)} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_1^{(0)}$$

$$\underline{K} \cdot \underline{V}_1^{(2)} = \underline{M} \cdot \underline{V}_1^{(1)} \Rightarrow \underline{V}_1^{(2)} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_1^{(1)} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις το $\underline{V}_1^{(r)}$ συγκλίνει στο ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα Φ_1 καθώς $r \rightarrow \infty$.

Η 1^η ιδιοτιμή στο τετράγωνο ω_1^2 , δίνεται σαν ο λόγος των στοιχείων του τελευταίου διανύσματος προς το νέο διάνυσμα:

$$\omega_1^2 = \frac{V^{(r-1)}}{\underline{V}^{(r)}} = \frac{\underline{V}_1^{(r-1)}}{\underline{V}_1^{(r)}}$$

Επίσης, η ιδιοτιμή ω_1 , μπορεί να υπολογιστεί και από το πηλίκο του Rayleigh σαν:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\underline{V}_1^{(r)T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{V}_1^{(r)}}{\underline{V}_1^{(r)T} \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_1^{(r)}}}$$

Αφού υπολογίσουμε την 1^η ιδιομορφή στη συνέχεια μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις υπόλοιπες ιδιομορφές με παρόμοιο τρόπο.

Η 2^η ιδιοσυχνότητα ω_2 και η ιδιομορφή $\underline{\varphi}_2$, μπορούν να προσδιοριστούν επιλέγοντας ένα αυθαίρετο διάνυσμα το οποίο πρέπει να είναι ορθογωνικό ως προς την 1^η ιδιομορφή, χρησιμοποιώντας την ορθογωνοκανονικοποίηση κατά Gram-Schmidt.

$$\text{Επιλέγουμε } \underline{V}_2^{(0)} \Rightarrow \underline{\hat{V}}_2^{(0)} = \underline{V}_2^{(0)} - \frac{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_2^{(0)}}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} \cdot \underline{\varphi}_1$$

$$\underline{K} \cdot \underline{V}_2^{(1)} = \underline{M} \cdot \underline{\hat{V}}_2^{(0)} \Rightarrow \underline{V}_2^{(1)} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{\hat{V}}_2^{(0)}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{V}}_2^{(1)} = \underline{V}_2^{(1)} - \frac{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_2^{(1)}}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} \cdot \underline{\varphi}_1$$

$$\Rightarrow \underline{V}_2^{(2)} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{M} \cdot \underline{\hat{V}}_2^{(1)} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Μετά από r -επαναλήψεις, οι οποίες τερματίζονται όταν προσεγγίζεται ικανοποιητικά η λύση:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\underline{V}_2^{(m)T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{V}_2^{(m)}}{\underline{V}_2^{(m)T} \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_2^{(m)}}}$$

Με αυτόν τον τρόπο συνεχίζεται η εύρεση όλων των ιδιοτιμών και αντίστοιχων ιδιομορφών, επιλέγοντας αυθαίρετα ένα αρχικό διάνυσμα από το οποίο αφαιρούνται οποιεσδήποτε συνιστώσες των ιδιομορφών που έχουν ήδη προσδιορισθεί, ώστε να μη συγκλίνει σε εκείνες αλλά στην αμέσως επόμενη.

Δηλαδή, για τον υπολογισμό ανώτερων ιδιομορφών, ξεκινούμε από ένα αυθαίρετο διάνυσμα το οποίο ορθογωνοποιείται ως προς ήδη υπολογισθέντες $(N - 1)$ ιδιομορφές και προσδιορίζεται η ιδιομορφή $\underline{\varphi}_N$ και η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα $\underline{\omega}_N$.

$$\text{Έστω, } \underline{V}_N^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\underline{V}}_N^{(0)} = \underline{V}_N^{(0)} - \frac{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_N^{(0)}}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} \cdot \underline{\varphi}_1 - \frac{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_N^{(0)}}{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2} \cdot \underline{\varphi}_2 - \dots - \frac{\underline{\varphi}_{(N-1)}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V}_N^{(0)}}{\underline{\varphi}_{(N-1)}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_{(N-1)}} \cdot \underline{\varphi}_{N-1}$$

Προγραμματισμός αριθμητικού προσδιορισμού ιδιοτιμών και ιδιομορφών

findModes.m

% k(i) stiffness of i-story

k(1)=1000e6;

k(2)=1000e6;

k(3)=1000e6;

% m(i) mass of i-floor

m(1)= 500e3;

m(2)= 500e3;

m(3)= 500e3;

% N number of dynamic DOFs

N = length(k);

fprintf('\n Number of dynamic DOF: %d', N)

K = zeros(N,N);

M = zeros(N,N);


```

for i=1:N
    K(i,i) = k(i);
    M(i,i) = m(i);
    if i>1
        K(i,i-1) = K(i,i-1) - k(i);
        K(i-1,i) = K(i-1,i) - k(i);
        K(i-1,i-1) = K(i-1,i-1) + k(i);
    end
end

printMatrix(M,'Mass')
printMatrix(K,'Stiffness')

figureNumber=1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall

```

```

% Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιομορφών
[V,D] = eig(K,M);

for i=1:N
    w(i) = sqrt(D(i,i));
    T(i) = 2*pi/w(i);
    modes(:,i) = V(:,i)/V(N,i);
end

```

Manual Solution

```
TOL = 1e-6;
vOld = ones(N,1);
for j=1:N
    iteration = 0;
    wOld_2 = -100;
    while(1)
        iteration = iteration + 1;
        for h=1:1:j-1
            vOld = vOld -
                (idiomorfes(:,h)'*M*vOld) / (idiomorfes(:,h)'*M*idiomorfes(:,h))*idiomorfes(:,h);
            vOld = vOld/vOld(N);
        end
        vNew = inv(K) *M * vOld;
        wNew_2 = vOld ./ vNew;
        vNew = vNew / vNew(N);
        if(abs((wNew_2-wOld_2)/(sum(wOld_2)/N)) < TOL)
            break
        end
        vOld = vNew;
        wOld_2 = wNew_2;
    end

    wN(j) = sqrt((vNew'*K*vNew)/(vNew'*M*vNew));
    Tn(j) = 2 *pi/wN(j);
    idiomorfes(:,j) = vNew;
end
```

```

fprintf('\n\n ***** Eigenvalues Computed by Matlab *****')
fprintf('\n\n Mode Eigenperiod Eigenfrequency Cyclic Eigenfrequency')
for i=1:N
    fprintf('\n %d %.4f sec %.3f rad/sec %.3f Hz', i, Tn(i), wn(i), 1/Tn(i));
end

fprintf('\n\n ***** Eigenvalues Computed Manually *****')
fprintf('\n\n Mode Eigenperiod Eigenfrequency Cyclic Eigenfrequency')
for i=1:N
    fprintf('\n %d %.4f sec %.3f rad/sec %.3f Hz', i, T(i), w(i), 1/T(i));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf('\n\n ***** Modes *****')

for i=1:N
    fprintf('\n\n by Matlab Manually ERROR')
    for j=1:N
        fprintf('\n %f %f %e', modes(j,i), idiomorfes(j,i), modes(j,i)-
                                                    idiomorfes(j,i));
    end
    fprintf('\n(Matlab): f%d * M * f%d = %f', i, i, modes(:,i)'*M*modes(:,i));
    fprintf('\n(Manually): f%d * M * f%d = %f\n', i, i,
                                                    idiomorfes(:,i)'*M*idiomorfes(:,i));
end
end

```

```

% Plot modes
subplot(2,1,1)
hold on
grid on
heights = 0:N;
scaling = 4*max(max(abs(modes)));
for i=1:N
    plot(1*i + [ 0 modes(:,i) ]'./scaling,heights', 'k')
    plot(1*i + modes(:,i)./scaling,heights(2:N+1),'o')
    plot([ 1*i 1*i],[0 3*N], '--')
end
axis([0 (N+1) 0 N])
xlabel('Modes Computed with Matlab')

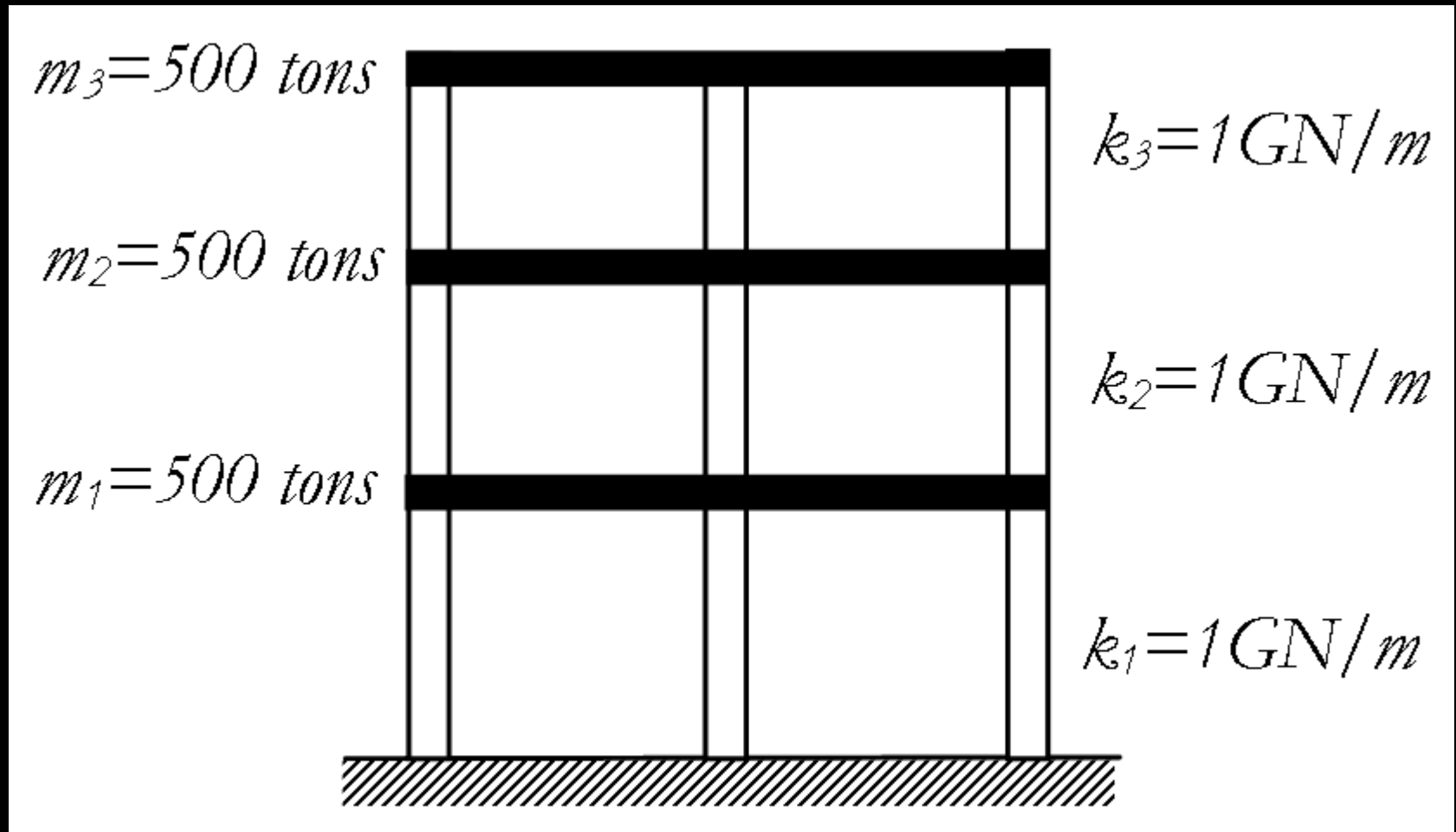
```

```

subplot(2,1,2)
hold on
grid on
heights = 0:N;
scaling = 4*max(max(abs(idiomorfes)));
for i=1:N
    plot(1*i + [ 0 idiomorfes(:,i) ]'./scaling,heights', 'k')
    plot(1*i + idiomorfes(:,i)./scaling,heights(2:N+1),'o')
    plot([ 1*i 1*i],[0 3*N], '--')
end
axis([0 (N+1) 0 N])
xlabel('Modes Computed Manually')

```

Παράδειγμα αριθμητικού υπολογισμού ιδιοτιμών και ιδιομορφών



```
>> findModes
```

```
Number of dynamic DOF: 3
```

```
***** Mass Matrix *****
```

```
5e+005 0 0  
0 5e+005 0  
0 0 5e+005
```

```
***** Stiffness Matrix *****
```

```
2e+009 -1e+009 0  
-1e+009 2e+009 -1e+009  
0 -1e+009 1e+009
```

```
***** Eigenvalues Computed by Matlab *****
```

Mode	Eigenperiod	Eigenfrequency	Cyclic Eigenfrequency
1	0.3157 sec	19.903 rad/sec	3.168 Hz
2	0.1127 sec	55.767 rad/sec	8.876 Hz
3	0.0780 sec	80.585 rad/sec	12.826 Hz

***** Eigenvalues Computed Manually *****

Mode	Eigenperiod	Eigenfrequency	Cyclic Eigenfrequency
1	0.3157 sec	19.903 rad/sec	3.168 Hz
2	0.1127 sec	55.767 rad/sec	8.876 Hz
3	0.0780 sec	80.585 rad/sec	12.826 Hz

***** Modes *****

by Matlab	Manually	ERROR
0.445042	0.445042	-3.428265e-009
0.801938	0.801938	-2.746889e-009
1.000000	1.000000	0.000000e+000

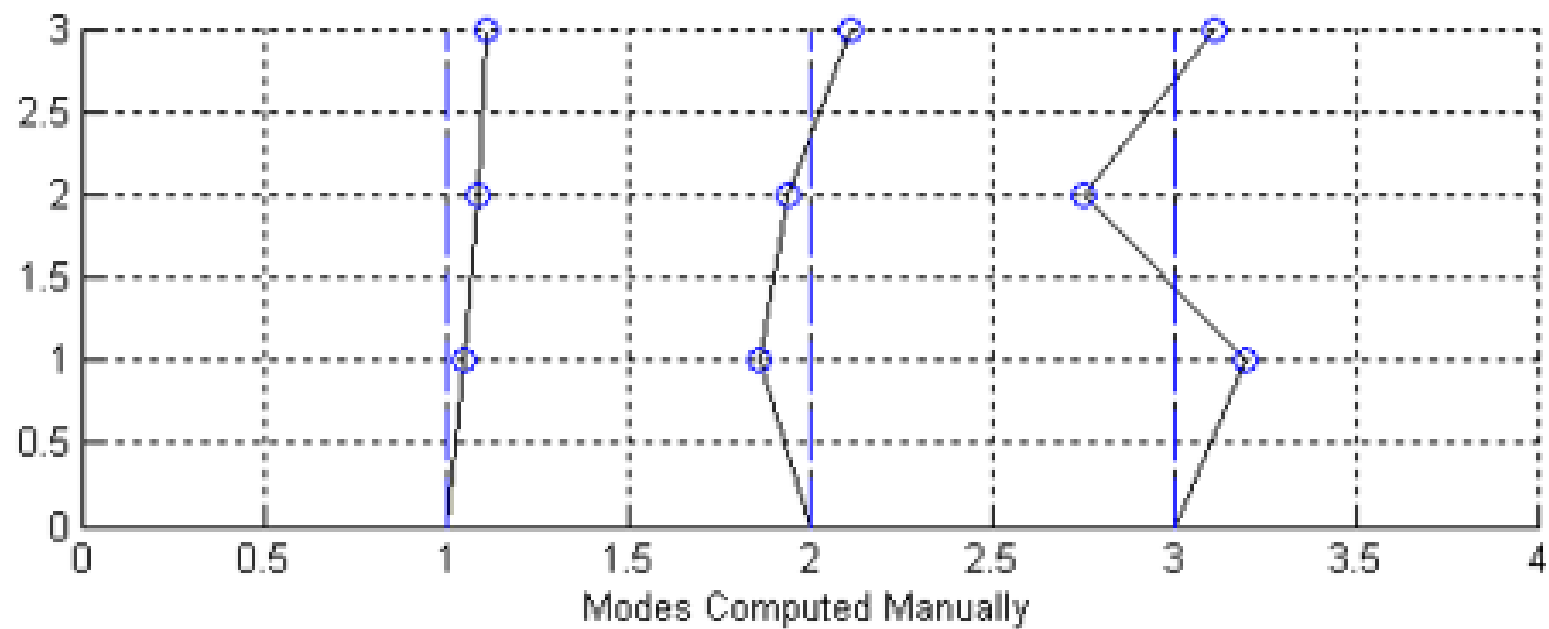
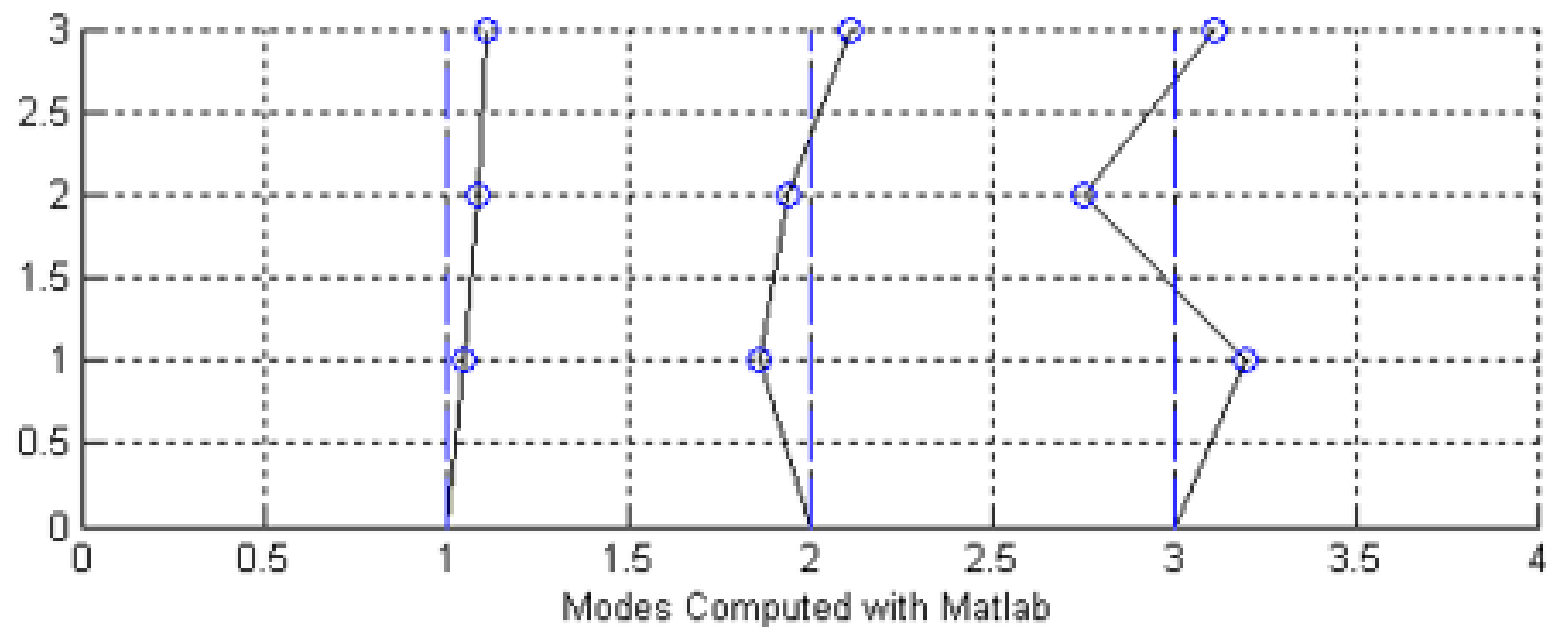
(Matlab): $f_1 * M * f_1 = 920583.198151$
(Manually): $f_1 * M * f_1 = 920583.201880$

by Matlab	Manually	ERROR
-1.246980	-1.246980	5.458757e-007
-0.554958	-0.554958	-3.597133e-007
1.000000	1.000000	0.000000e+000

(Matlab): $f_2 * M * f_2 = 1431468.330229$
(Manually): $f_2 * M * f_2 = 1431468.811299$

by Matlab	Manually	ERROR
1.801938	1.801934	3.984753e-006
-2.246980	-2.246977	-2.211262e-006
1.000000	1.000000	0.000000e+000

(Matlab): $f_3 * M * f_3 = 4647948.471620$
(Manually): $f_3 * M * f_3 = 4647936.322692$



Overview of analysis procedures

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

MDF System Analysis

```
graph TD; A[MDF System Analysis] --> B[Chapters 12, 13]; A --> C[Chapter 15];
```

Chapters 12, 13

Classical (uncoupled) modal analysis for

- Linear systems
- Classical damping

Solutions

- Closed form for simple excitation
- Numerical for complex excitation

Chapter 15

Direct analysis for

- Linear or nonlinear systems
- Classical or nonclassical damping

Solutions

- Numerical

Figure 9.11.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Δυναμική ανάλυση ΠΒΣ με επαλληλία των ιδιομορφών

- Εξωτερικά επιβαλλόμενα δυναμικά φορτία

Στη γενικευμένη περίπτωση, θεωρώντας ότι το ΠΒΣ χαρακτηρίζεται από κλασική απόσβεση, το σύστημα ΔΕ κίνησης του έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{P}(t)$$

Οι ΔΕ αυτές είναι συζευγμένες λόγω των εκτός των διαγώνιων στοιχείων των μητρώων. Εκφράζοντας τις μετακινήσεις συναρτήσει των ιδιομορφών, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το συζευγμένο $N \times N$ σύστημα ΔΕ σε N ανεξάρτητες ΔΕ αξιοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών.

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\ddot{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n$$

Το σύστημα ΔΕ κίνησης μετασχηματίζεται όπως πιο κάτω:

$$\underline{M} \cdot \sum_{j=1}^N \ddot{q}_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j + \underline{C} \cdot \sum_{j=1}^N \dot{q}_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j + \underline{K} \cdot \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j = \underline{P}(t)$$

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \sum_{j=1}^N \ddot{q}_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j + \underline{\mathbf{C}} \cdot \sum_{j=1}^N \dot{q}_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j + \underline{\mathbf{K}} \cdot \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \underline{\varphi}_j = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

Στη συνέχεια, προ-πολλαπλασιάζοντας με την n -ιδιομορφή $\underline{\Phi}_n^T$:

$$\sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\varphi}_j \cdot \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\varphi}_j \cdot \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\varphi}_j \cdot q_j(t) = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{\mathbf{P}}(t)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ορθογωνικότητα των ιδιομορφών ως προς τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας, προκύπτουν N ανεξάρτητες ΔΕ:

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + c_n \cdot \dot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = P_n(t)$$

Διαιρώντας την κάθε ΔΕ δια την αντίστοιχη γενικευμένη μάζα m_n :

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = \frac{P_n(t)}{m_n}$$

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + c_n \cdot \dot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = P_n(t)$$

Διαιρώντας την κάθε ΔΕ δια την αντίστοιχη γενικευμένη μάζα m_n :

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = \frac{P_n(t)}{m_n}$$

όπου, όπως έχουμε δει:

$$m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \quad \text{έχει οριστεί η γενικευμένη μάζα}$$

$$c_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varphi}_n \quad \text{έχει οριστεί η γενικευμένη απόσβεση}$$

$$k_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n \quad \text{έχει οριστεί η γενικευμένη δυσκαμψία}$$

ζ_n είναι ο λόγος απόσβεσης της n-ιδιομορφής

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n}} = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

$P_n(t)$ είναι η γενικευμένη φόρτιση

Υπολογίζοντας την απόκριση της κάθε ανεξάρτητης ΔΕ, η οποία ουσιαστικά είναι αντίστοιχη με τη ΔΕ εξίσωση κίνησης ενός ΜΒΣ:

$$m \cdot \ddot{h}(t) + c \cdot \dot{h}_n(t) + k \cdot h(t) = P(t)$$

προσδιορίζεται η ιδιομορφική συνιστώσα $q_n(t)$ για την κάθε ιδιομορφή.

Εάν η γενικευμένη φόρτιση, $P_n(t)$, είναι απλής μορφής, όπως π.χ. αρμονικής μορφής, η ιδιομορφική συνιστώσα, $q_n(t)$, μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Διαφορετικά, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια αριθμητική μέθοδος, όπως αυτές που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Συνδυάζοντας τη συνεισφορά της κάθε n-ιδιομορφής στις μετακινήσεις, $\underline{u}_n(t)$, υπολογίζονται οι συνολικές μετακινήσεις $\underline{u}(t)$:

$$\underline{u}_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t)$$

Υπολογίζοντας την απόκριση της κάθε ανεξάρτητης ΔΕ, η οποία ουσιαστικά είναι αντίστοιχη με τη ΔΕ εξίσωση κίνησης ενός ΜΒΣ:

$$m \cdot \ddot{h}(t) + c \cdot \dot{h}_n(t) + k \cdot h(t) = P(t)$$

προσδιορίζεται η ιδιομορφική συνιστώσα $q_n(t)$ για την κάθε ιδιομορφή.

Εάν η γενικευμένη φόρτιση, $P_n(t)$, είναι απλής μορφής, όπως π.χ. αρμονικής μορφής, η ιδιομορφική συνιστώσα, $q_n(t)$, μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Διαφορετικά, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια αριθμητική μέθοδος, όπως αυτές που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Συνδυάζοντας τη συνεισφορά της κάθε n-ιδιομορφής στις μετακινήσεις, $\underline{u}_n(t)$, υπολογίζονται οι συνολικές μετακινήσεις $\underline{u}(t)$:

$$\underline{u}_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t)$$

Συνδυάζοντας τη συνεισφορά της κάθε n -ιδιομορφής στις μετακινήσεις, $\underline{u}_n(t)$, υπολογίζονται οι συνολικές μετακινήσεις $\underline{u}(t)$:

$$\underline{u}_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t)$$

Συνήθως, η συνεισφορά των πρώτων ιδιομορφών και συγκεκριμένα της πρώτης ή θεμελιώδους ιδιομορφής σε επίπεδα προσομοιώματα, είναι πολύ πιο σημαντική στη συνολική απόκριση μιας κατασκευής. Αλλά αυτό εξαρτάται από το φορτίο, αφού κάποια φορτία, όπως π.χ. αρμονικά φορτία με συχνότητες διέγερσης κοντά σε ανώτερες ιδιοσυχνότητες, μπορεί να διεγείρουν υψηλότερες ιδιομορφές με αποτέλεσμα οι συνεισφορές τους να είναι πιο σημαντικές από ότι των πρώτων ιδιομορφών.

Η συνεισφορά της κάθε ιδιομορφής στα εντατικά μεγέθη μπορεί να υπολογιστεί βάσει των ιδιομορφικών μετακινήσεων $\underline{u}_n(t)$. Αφού προσδιοριστούν και οι αντίστοιχες μετακινήσεις των στατικών ΒΕ, με δεδομένα τα μητρώα δυσκαμψίας του κάθε μέλους, μπορούν να υπολογιστούν τα εντατικά μεγέθη $\underline{s}_n(t)$ βάσει των μετακινήσεων των άκρων του κάθε μέλους.

Εναλλακτικά, τα εντατικά μεγέθη που προκαλεί η κάθε ιδιομορφή μπορούν να υπολογιστούν από στατική ανάλυση της κατασκευής υπό ισοδύναμα στατικά φορτία που αντιστοιχούν στις μετακινήσεις $\underline{u}_n(t)$ της n-ιδιομορφής.

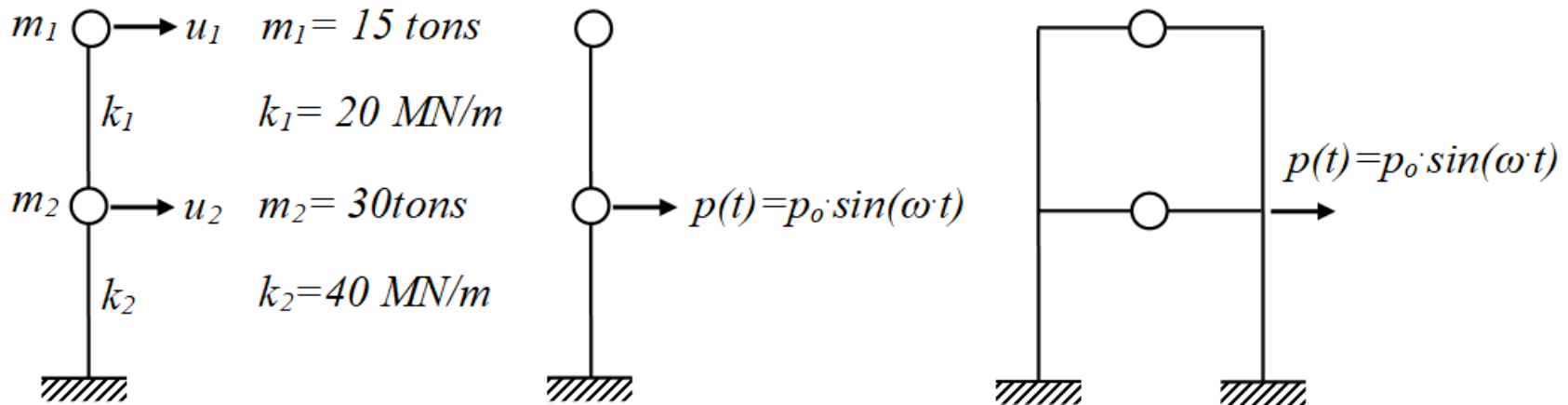
$$\underline{F}_n(t) = \underline{K} \cdot \underline{u}_n(t)$$

Η τιμή του εντατικού μεγέθους $s(t)$ συνολικά προκύπτει από την επαλληλία των συνεισφορών των ιδιομορφών στο εντατικό μέγεθος:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t)$$

Παράδειγμα-4

Επιλύστε το πολυβάθμιο σύστημα του Παραδείγματος-12.1 για την περίπτωση που ημιτονοειδής φόρτιση, μορφής $p(t) = p_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, ασκείται στην κάτω μάζα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.17, όπου $p_0 = 20\text{KN}$. Χάριν απλότητας, θεωρήστε ότι το σύστημα δεν έχει μηχανισμούς απόσβεσης.



Σχήμα 12.17: ΠΒΣ με 2 δυναμικούς ΒΕ στον κάτω όροφο του οποίου ασκείται αρμονικό φορτίο.

Από το Παράδειγμα-12.2 έχουν ήδη υπολογιστεί οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές, οι οποίες έχουν κανονικοποιηθεί ως προς το μητρώο μάζας ώστε οι γενικευμένες μάζες να είναι μοναδιαίες:

$$\Rightarrow \omega_1 = 25.82 \text{ rad / sec}, \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0.006667 \\ 0.003333 \end{bmatrix} \Rightarrow m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 1.0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 51.64 \text{ rad / sec}, \quad \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0.004714 \\ -0.004714 \end{bmatrix} \Rightarrow m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = 1.0$$

Το γενικευμένο φορτίο μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$P_1(t) = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{P}(t) = [0.00667 \quad 0.00333] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ p_o \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{bmatrix} = 0.00333 \cdot p_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$P_2(t) = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{P}(t) = [0.00471 \quad -0.00471] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ p_o \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{bmatrix} = -0.00471 \cdot p_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Οι ιδιομορφικές εξισώσεις έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$m_1 \cdot \ddot{q}_1(t) + k_1 \cdot q_1(t) = 0.00333 \cdot p_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$m_2 \cdot \ddot{q}_2(t) + k_2 \cdot q_2(t) = -0.00471 \cdot p_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Όπου οι γενικευμένες μάζες και δυσκαμψίες ισούνται με:

$$m_1 = 1.0, \quad k_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_1 = 666.67$$

$$m_2 = 1.0, \quad k_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_2 = 2666.67$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης: $m \cdot \ddot{h}(t) + k \cdot h(t) = F_o \cdot \sin(\omega \cdot t)$

ισούται με:
$$h(t) = \frac{F_o}{k} \cdot \frac{1}{1 - (\omega / \omega_N)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης: $m \cdot \ddot{h}(t) + k \cdot h(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

ισούται με:
$$h(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - (\omega / \omega_N)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

Συνεπώς, η λύση της κάθε ιδιομορφικής εξίσωσης ισούται με:

$$q_1(t) = \frac{0.00333 \cdot p_0}{k_1} \cdot \frac{1}{1 - (\omega / \omega_1)^2} \sin(\omega \cdot t) = \frac{0.0999}{1 - (\omega / 25.82)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

$$q_2(t) = \frac{-0.00471 \cdot p_0}{k_2} \cdot \frac{1}{1 - (\omega / \omega_2)^2} \sin(\omega \cdot t) = \frac{-0.0353}{1 - (\omega / 51.64)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

Έτσι, οι ιδιομορφικές αποκρίσεις, δηλαδή οι μετακινήσεις και των δύο μαζών λόγω της κάθε ιδιομορφής, ισούνται με:

$$\Rightarrow \underline{u}_1(t) = \underline{\varphi}_1 \cdot q_1(t) = \begin{bmatrix} 0.006667 \\ 0.003333 \end{bmatrix} \cdot \frac{0.0999}{1 - (\omega / 25.82)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

- Λόγω 1^{ης} ιδιομορφής: $\underline{u}_1(t) = \begin{bmatrix} 6.66 \\ 3.33 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 25.82)^2}$

$$\Rightarrow \underline{u}_2(t) = \underline{\varphi}_2 \cdot q_2(t) = \begin{bmatrix} 0.004714 \\ -0.004714 \end{bmatrix} \cdot \frac{-0.0353}{1 - (\omega / 51.64)^2} \sin(\omega \cdot t)$$

- Λόγω 2^{ης} ιδιομορφής: $\underline{u}_2(t) = \begin{bmatrix} -1.66 \\ 1.66 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 51.64)^2}$

Οι συνολικές μετακινήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ των δύο μαζών, λόγω και των δύο ιδιομορφών, ισούνται με:

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \begin{bmatrix} 6.66 \\ 3.33 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 25.82)^2} + \begin{bmatrix} -1.66 \\ 1.66 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 51.64)^2}$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.66 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 25.82)^2} + -1.66 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 51.64)^2} \\ 3.33 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 25.82)^2} + 1.66 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t) \cdot 10^{-4}}{1 - (\omega / 51.64)^2} \end{bmatrix}$$

Ανάλυση ΠΒΣ σε σεισμικές διεγέρσεις

Εξετάζουμε τη δυναμική ανάλυση ΠΒΣ υπό σεισμική διέγερση, με τη μέθοδο της *Επαλληλίας των Ιδιομορφών* για τη χρονική ολοκλήρωση των ΔΕ κίνησης. Η παρουσίαση γίνεται για την περίπτωση συμμετρικών σε κάτοψη πολυώροφων κτιρίων με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου και σεισμική διέγερση στη μια διεύθυνση. Όμως, οι βασικές αρχές ανάλυσης με τη Μέθοδο της Επαλληλίας των Ιδιομορφών ισχύουν γενικότερα.

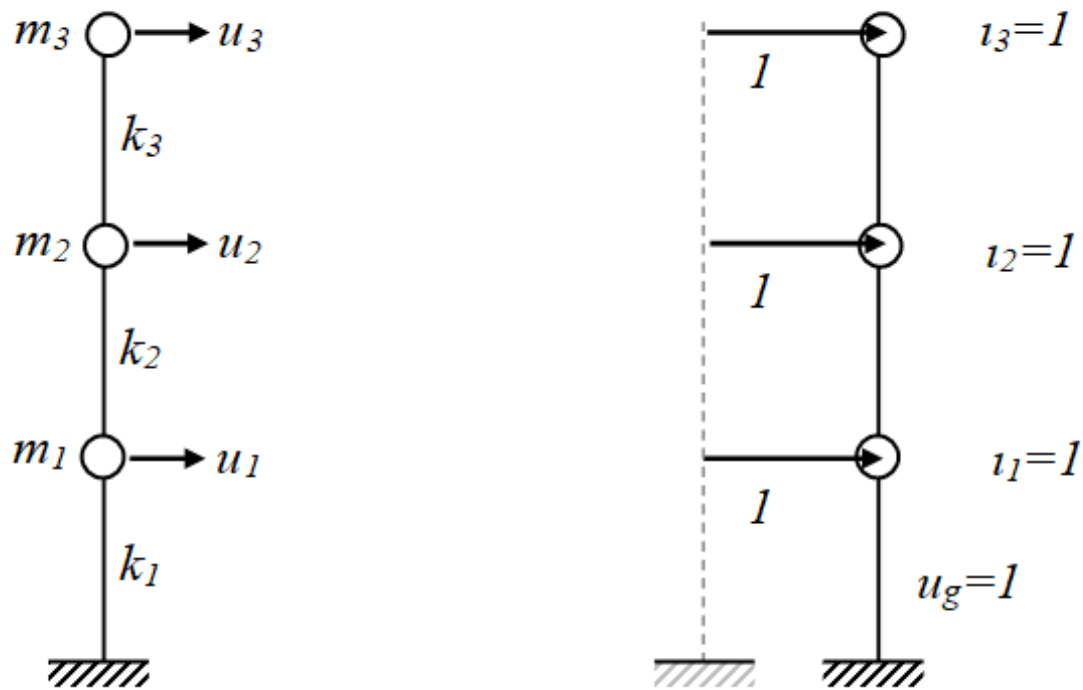
Οι ΔΕ κίνησης ενός ΠΒΣ έχουν γενικά την εξής μορφή:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t) = \underline{P}_{\text{eff}}(t)$$

Ενώ στην πράξη τα μητρώα δυσκαμψίας και μάζας πρέπει να προσδιοριστούν, το μητρώο απόσβεσης δεν χρειάζεται να καθοριστεί για αυτήν τη μέθοδο, αφού για κάθε ιδιομορφή μπορεί να καθοριστεί ο αντίστοιχος λόγος ιξώδους απόσβεσης, ζ_n .

Οι επιταχύνσεις του εδάφους, $\ddot{u}_g(t)$, δίνονται ανά κάποιο πολύ μικρό χρονικό διάστημα, συνήθως ανά 0.01 δευτερόλεπτα ή και λιγότερο, όπως καταγράφονται από επιταχυνσιογράφους κατά τη διάρκεια ισχυρών σεισμικών διεγέρσεων.

Το διάνυσμα επιρροής, $\underline{1}$, μπορεί να προσδιοριστεί από στατική εφαρμογή μοναδιαίας μετακίνησης του εδάφους θεμελίωσης της κατασκευής. Σε περιπτώσεις προσομοίωσης κτιρίων ως επίπεδων πλαισίων με διατμητική συμπεριφορά και οριζόντια σεισμική διέγερση στη μια μόνο διεύθυνση, το διάνυσμα επιρροής, $\underline{1}$, είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, $\underline{1}$.



Σχήμα 12.18: Προσδιορισμός διανύσματος επιρροής, $\underline{1}$, με στατική εφαρμογή $u_g = 1$.

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t) = \underline{P}_{\text{eff}}(t)$$

Οι μετακινήσεις μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ιδιομορφών:

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \underline{\ddot{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \cdot \underline{\varphi}_n$$

Λόγω της ιδιότητας της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών προκύπτουν N ανεξάρτητες ΔΕ της μορφής:

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + c_n \cdot \dot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = -\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t) = -\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{P}_{\text{eff}}(t)$$

Διαιρώντας την κάθε μία από τις N ανεξάρτητες ΔΕ με την αντίστοιχη γενικευμένη μάζα, m_n , προκύπτουν N ανεξάρτητες ΔΕ της πιο κάτω μορφής:

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = -\frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t)}{m_n} = -\Gamma_n \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Όπου ο ιδιομορφικός συντελεστής, Γ_n , ορίζεται ως το πηλίκο:

$$\Gamma_n = \frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{L_n}{m_n}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή της ΔΕ που χαρακτηρίζει την κίνηση ενός ΜΒΣ, όπως την είχαμε μελετήσει και επιλύσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, για οποιαδήποτε κυκλική ιδιοσυχνότητα, ω_n , και λόγο απόσβεσης, ζ_n :

$$\begin{aligned}\ddot{D}(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{D}(t) + \omega_n^2 \cdot D(t) &= -\ddot{u}_g(t) \\ \Rightarrow D(t) &= D(t, \omega_n, \zeta_n)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ΔΕ που χαρακτηρίζει την ιδιομορφική απόκριση, έχει ακριβώς την ίδιο μορφή, με μόνη διαφορά ότι το ενεργό φορτίο, λόγω αδρανειακών δυνάμεων, στο δεξί μέρος της εξίσωσης, είναι ο συντελεστής Γ_n :

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = -\Gamma_n \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Αυτό σημαίνει ότι, θεωρούμε γραμμική ελαστική συμπεριφορά, η απόκριση $q_n(t)$ της ιδιομορφικής εξίσωσης θα είναι αναλογικά Γ_n φορές πιο μεγάλη από την απόκριση του ΜΒΣ, $D(t)$:

$$q_n(t) = \Gamma_n \cdot D(t)$$

$$m_n \cdot \ddot{q}_n(t) + c_n \cdot \dot{q}_n(t) + k_n \cdot q_n(t) = -\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t) = -\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{P}_{\text{eff}}(t)$$

Το διάνυσμα της ενεργής (ή ισοδύναμης) φόρτισης, $\underline{P}_{\text{eff}}(t)$, σχηματίζεται από τον πολλαπλασιασμό $\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t)$, όπου λαμβάνεται υπόψη η κατανομή και επιρροή των μαζών από το διάνυσμα επιρροής, $\underline{1}$.

Το γινόμενο του μητρώου μάζας επί το διάνυσμα επιρροής, $\underline{M} \cdot \underline{1}$, το οποίο εκφράζει την κατανομή των αδρανειακών δυνάμεων μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα των ιδιομορφικών κατανομών των αδρανειακών δυνάμεων \underline{F}_i^M :

$$\underline{M} \cdot \underline{1} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i^M$$

Προ-πολλαπλασιάζοντας την πιο πάνω σχέση με $\underline{\varphi}_n^T$, το οποίο είναι απαραίτητο κατά τη χρησιμοποίηση της ιδιότητας της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών για να μετασχηματιστεί το συζευγμένο σύστημα σε ένα σύστημα ανεξάρτητων εξισώσεων, προκύπτει ότι:

$$\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_i = \Gamma_n \cdot \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$$

$$\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cdot \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_i = \Gamma_n \cdot \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$$

Λόγω της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών προκύπτει η πιο κάτω σχέση για τον ιδιομορφικό συντελεστή Γ_n :

$$\Gamma_n = \frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{L_n}{m_n}$$

Ο ιδιομορφικός συντελεστής Γ_n , εκφράζει κατά κάποιο τρόπο το βαθμό συμμετοχής της κάθε ιδιομορφής αν και εξαρτάται από τον τρόπο κανονικοποίησης των ιδιομορφών.

Η συνεισφορά της κάθε ιδιομορφής εκφράζεται πιο αντιπροσωπευτικά στην απόκριση του συστήματος με την ενεργή ιδιομορφική μάζα M_n^{eff} , η οποία δίνεται από την πιο κάτω σχέση.

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{\left(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}\right)^2}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{\left(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}\right)^2}{m_n}$$

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{m_n}$$

Το άθροισμα όλων των ενεργών ιδιομορφικών μαζών ισούται με τη συνολική μάζα της κατασκευής:

$$\Rightarrow M_{\text{total}} = \sum_{n=1}^N M_n^{\text{eff}} = \sum_{i=1}^{\text{ορόφοι}} m_i$$

Έτσι, διαιρώντας την ενεργή ιδιομορφική μάζα με τη συνολική μάζα της κατασκευής, παίρνουμε το ποσοστό της συνολικής μάζας που ταλαντώνεται κατά κάποιο τρόπο σύμφωνα με τη συγκεκριμένη ιδιομορφή.

Το φορτίο $\underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$, εκφράζει τη συνεισφορά της n-ιδιομορφής στα ισοδύναμα (ή άλλως ενεργά) σεισμικά φορτία.

Έτσι η κάθε ΔE , που αντιστοιχεί στην n-ιδιομορφή, διαιρώντας την με τη γενικευμένη μάζα m_n , παίρνει την εξής μορφή:

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = -\Gamma_n \cdot \ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = -\Gamma_n \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Η επίλυση της αντίστοιχης ΔΕ κίνησης ενός ΜΒΣ, όπως η πιο κάτω, μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας μια αριθμητική μέθοδο για χρονική ολοκλήρωση ΜΒΣ:

$$\ddot{D}(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{D}(t) + \omega_n^2 \cdot D(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad \Rightarrow \quad D(t) = D(t, \omega_n, \zeta_n)$$

Η μόνη διαφορά της ΔΕ της ιδιομορφικής απόκρισης από τη ΔΕ κίνησης ΜΒΣ είναι ο συντελεστής Γ_n . Έτσι η ιδιομορφική απόκριση προκύπτει με πολλαπλασιασμό της απόκρισης $D(t)$ ενός ΜΒΣ με Γ_n , εφόσον το σύστημα είναι γραμμικά ελαστικό:

$$\underline{u}_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot \Gamma_n \cdot D_n(t)$$

Συνεπώς, οι συνολικές μετακινήσεις προκύπτουν από απλή επαλληλία των συνεισφορών της κάθε ιδιομορφής:

$$\underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\varphi}_n \cdot \Gamma_n \cdot D_n(t)$$

Ακολουθως, το κάθε εντατικό μέγεθος $s_n(t)$ λόγω της κάθε n-ιδιομορφής, μπορεί να υπολογιστεί είτε από τις αντίστοιχες μετακινήσεις $\underline{u}_n(t)$ και τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών, είτε από στατική ανάλυση της κατασκευής με επιβαλλόμενα ισοδύναμα στατικά φορτία και τις μετακινήσεις $\underline{u}_n(t)$. Τα ισοδύναμα στατικά φορτία που πρέπει να επιβληθούν υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$\underline{F}_n(t) = \underline{K} \cdot \underline{u}_n(t) = \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot q_n(t) = \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot \Gamma_n \cdot D_n(t)$$

Εφόσον ισχύει η σχέση: $\underline{K} \cdot \underline{\Phi}_n = \omega_n^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_n$

$$\Rightarrow \underline{F}_n(t) = \omega_n^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot \Gamma_n \cdot D_n(t) = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \cdot S_a^n(t)$$

όπου $S_a^n(t) = \omega_n^2 \cdot D_n(t)$, είναι η ψευδοεπιτάχυνση του αντίστοιχου με την ιδιομορφική εξίσωση ΜΒΣ.

$$\underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_n(t) = \underline{F}_n^M \cdot S_a^n(t)$$

Τα ισοδύναμα στατικά φορτία $\underline{F}_n(t)$ για την κάθε ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n$ ισούνται με το γινόμενο του διανύσματος των δυνάμεων κατανομής της μάζας \underline{F}_n^M επί την ψευδοεπιτάχυνση $S_a^n(t)$ που αντιστοιχούν στην ιδιομορφή $\underline{\varphi}_n$.

Εφόσον το διάνυσμα της κάθε ιδιομορφικής κατανομής των αδρανειακών δυνάμεων για την κάθε n ιδιομορφή, \underline{F}_n^M , είναι ανεξάρτητο του χρόνου, μπορούμε για οποιοδήποτε εντατικό μέγεθος να υπολογίσουμε τη στατική απόκριση του με στατική επιβολή του φορτίου αυτού. Στη συνέχεια, εφόσον η συμπεριφορά είναι γραμμική-ελαστική, πολλαπλασιάζοντας με τις ψευδοεπιταχύνσεις $S_a^n(t)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την εκάστοτε τιμή του εντατικού μεγέθους $s_n(t)$ συναρτήσει του χρόνου κατά τη διάρκεια της σεισμικής διέγερσης. Το συνολικό μέγεθος των εντατικών μεγεθών προκύπτει από επαλληλία των συνεισφορών όλων των ιδιομορφών.

$$s_n(t) = s_n^{\text{static}} \cdot S_a^n(t)$$

$$\Rightarrow s(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t) = \sum_{n=1}^N s_n^{\text{static}} \cdot S_a^n(t)$$

Έτσι για να υπολογιστεί ένα εντατικό μέγεθος $s(t)$ συναρτήσει του χρόνου, χρειάζεται για κάθε μια από τις N -ιδιομορφές, στατική ανάλυση της κατασκευής με επιβαλλόμενα φορτία \underline{F}_n^M και μια δυναμική ανάλυση ΜΒΣ που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιομορφική εξίσωση για σεισμική διέγερση $\ddot{u}_g(t)$. Δηλαδή, συνολικά απαιτούνται N -στατικές αναλύσεις του ΠΒΣ και N -δυναμικές αναλύσεις ΜΒΣ (Σχήμα 12.19).

Αφού προσδιοριστεί η συνεισφορά της κάθε ιδιομορφής, αθροίζοντας τις επιμέρους συνεισφορές, όλων ή τουλάχιστον ενός αριθμού ιδιομορφών των οποίων η αντίστοιχη ενεργή ιδιομορφική μάζα αντιπροσωπεύει ένα σημαντικό μέρος της συνολικής μάζας της κατασκευής, προκύπτει, επακριβώς ή προσεγγιστικά, αντίστοιχα, η συνολική απόκριση της κατασκευής και τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν.

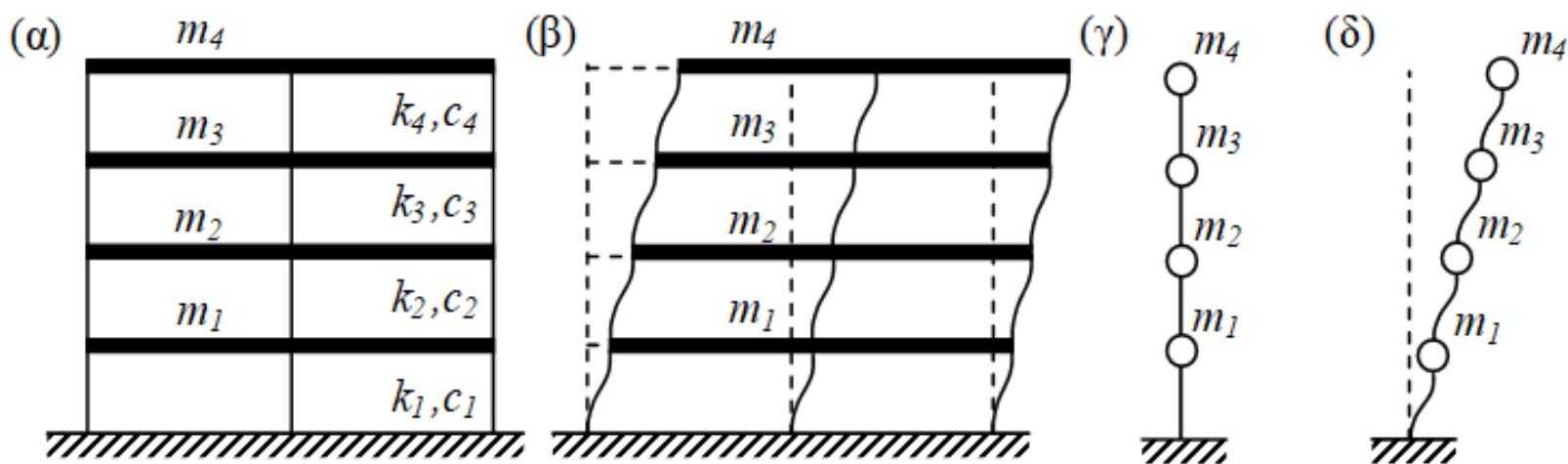
ϕ_i	Στατική ανάλυση ΠΒΣ	Δυναμική ανάλυση ΜΒΣ	Συνεισφορά
1			$s_1(t) = s_1^{st} \cdot \omega_1^2 \cdot D_1(t)$
2			$s_2(t) = s_2^{st} \cdot \omega_2^2 \cdot D_2(t)$
...
N			$s_N(t) = s_N^{st} \cdot \omega_N^2 \cdot D_N(t)$

$$s_n(t) = s_n^{static} \cdot S_a^n(t)$$

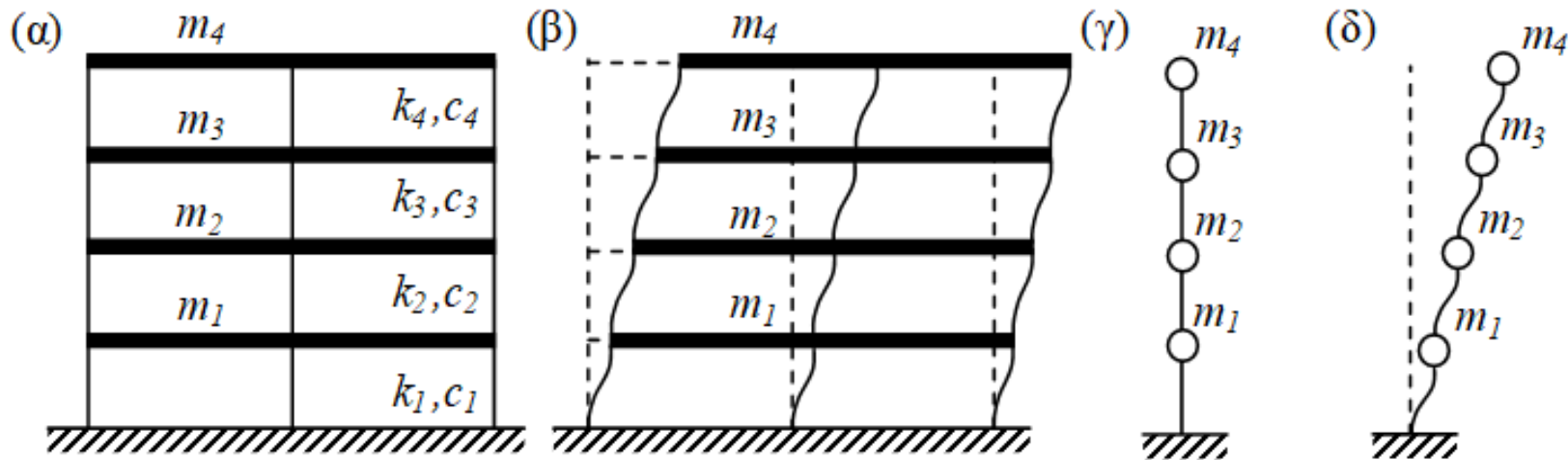
$$s(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t) = \sum_{n=1}^N s_n^{static} \cdot S_a^n(t)$$

Συνολική απόκριση:
$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) = \sum_{i=1}^N s_i^{st} \cdot \omega_i^2 \cdot D_i(t) = \sum_{i=1}^N s_i^{st} \cdot S_a^i(t)$$

Συχνά, τα συνήθη πολυώροφα κτίρια μπορούν να προσομοιωθούν θεωρώντας αμελητέες τις αξονικές παραμορφώσεις, άκαμπτα τα οριζόντια μέλη και τις μάζες συγκεντρωμένες στους ορόφους με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου (Σχήμα 12.20.α-β). Επιπλέον, ένα συμμετρικό σε κάτοψη κτίριο, όσο αφορά μάζα και δυσκαμψία ώστε να μην υπάρχει εκκεντρότητα μεταξύ κέντρου μάζας και δυσκαμψίας, μπορεί να αναλυθεί για σεισμική διέγερση σε μια διεύθυνση ξεχωριστά με ένα δυναμικό ΒΕ ανά όροφο (Σχήμα 12.20.γ-δ).



Σχήμα 12.20: (α) πολυώροφο κτίριο (β) συμπεριφορά διατμητικού προβόλου (γ) ΠΒΣ (δ) μετακίνηση ΠΒΣ.



Σχήμα 12.20: (α) πολώροφο κτίριο (β) συμπεριφορά διατμητικού προβόλου (γ) ΠΒΣ (δ) μετακίνηση ΠΒΣ.

Οι ΔΕ κίνησης του πολώροφου κτιρίου με συμπεριφορά διατμητικού προβόλου για σεισμική διέγερση στη μία διεύθυνση, έχουν τη μορφή:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}(t) + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{u}}(t) = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\ddot{u}}}_g(t)$$

Το μητρώο μάζας $\underline{\underline{M}}$ είναι διαγώνιο με τη μάζα των ορόφων στα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία, ενώ το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{\underline{K}}$ έχει συγκεκριμένη μορφή με μη μηδενικά στοιχεία σε μια ζώνη γύρω από τη διαγώνιο, το πλάτος της οποίας εξαρτάται από την αρίθμηση των ΒΕ. Επίσης, το διάνυσμα $\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}}$ έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα.

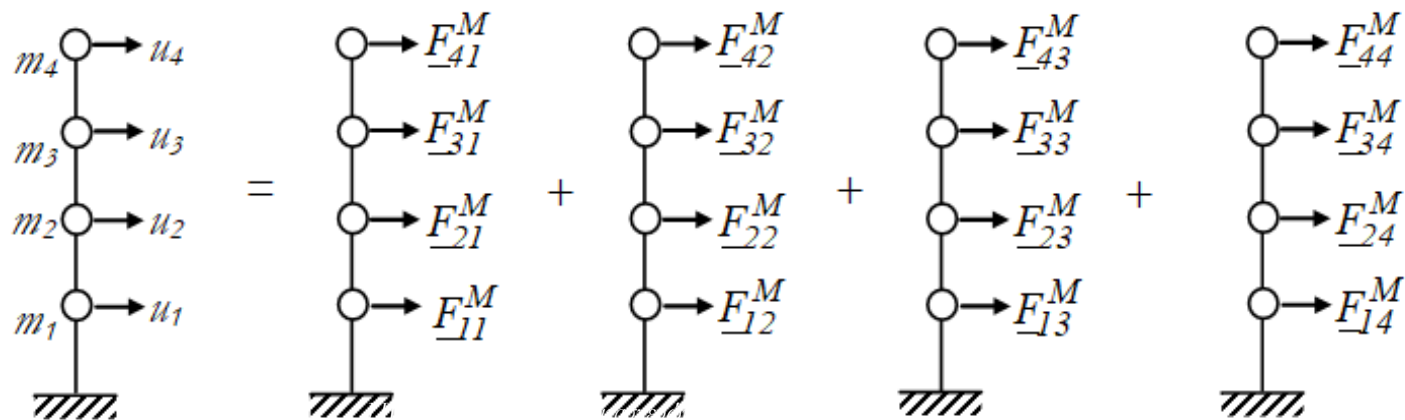
Παραδείγματος χάριν, τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας του φορέα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.20.α έχουν τις εξής μορφές:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

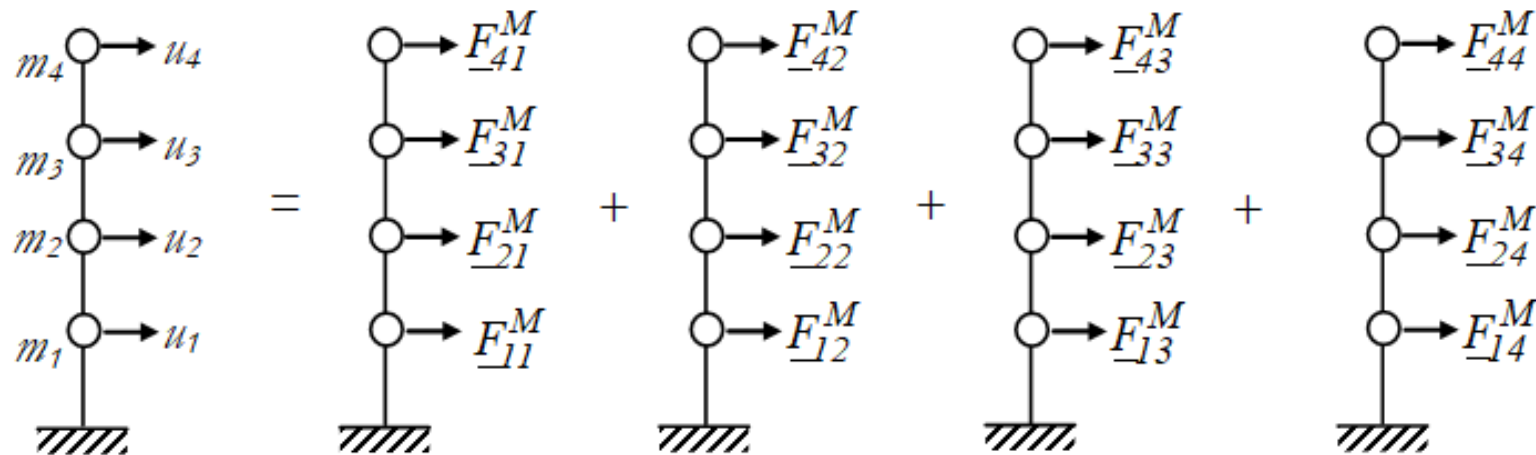
Η ιδιομορφική κατανομή του $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}}$ ισούται με (Σχήμα 12.21):

$$\underline{\underline{F}}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\phi}}_n, \quad \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} = \sum_{n=1}^N \underline{\underline{F}}_n^M$$

Οι δυνάμεις αυτές επιβάλλονται στο φορέα με τους 4 ΒΕ και υπολογίζονται οι αντίστοιχες ιδιομορφικές στατικές αποκρίσεις, S_n^{static} .



$$\underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n, \quad \underline{M} \cdot \underline{1} = \sum_{n=1}^N \underline{F}_n^M$$



Σχήμα 12.21: Ιδιομορφική κατανομή των μαζών, $\underline{M} \cdot \underline{1}$.

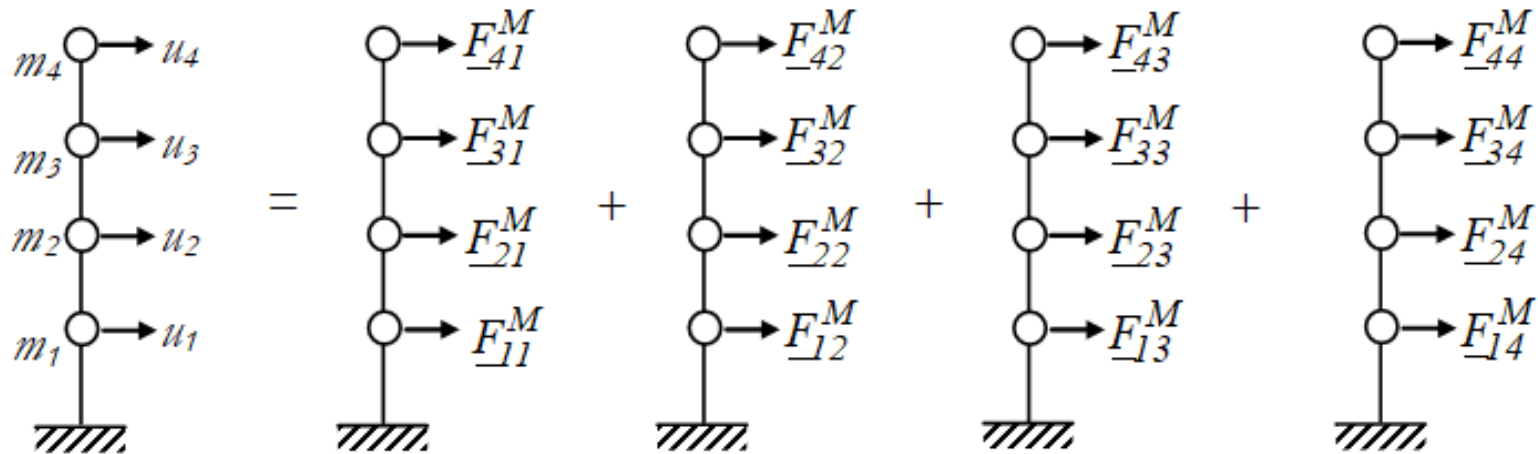
Συγκεκριμένα, οι στατικές αποκρίσεις της τέμνουσας και της ροπής ανατροπής στον κάθε i -όροφο λόγω της n -ιδιομορφής ισούνται, αντίστοιχα, με :

$$V_{i,n}^{st} = \sum_{j=i}^N F_{jn}^M, \quad M_{i,n}^{st} = \sum_{j=i}^N F_{j,n}^{st} \cdot (h_j - h_i)$$

Η σχετική με το έδαφος μετακίνηση, καθώς και η σχετική μεταξύ των δύο ορόφων μετακίνηση του ορόφου j ισούνται με:

$$u_j^{st} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \cdot \varphi_{jn}, \quad \Delta u_j^{st} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2} \cdot (\varphi_{jn} - \varphi_{j-1,n})$$

$$\underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n, \quad \underline{M} \cdot \underline{1} = \sum_{n=1}^N \underline{F}_n^M$$



Σχήμα 12.21: Ιδιομορφική κατανομή των μαζών, $\underline{M} \cdot \underline{1}$.

Αντίστοιχα, η τέμνουσα βάσης και η ροπή ανατροπής βάσης λόγω της n -ιδιομορφής από στατική επιβολή των ιδιομορφικών κατανομών \underline{F}_n^M ισούνται με:

$$V_{b,n}^{st} = \sum_{j=1}^N F_{j,n}^{st} \equiv M_n^{eff}, \quad M_{b,n}^{st} = \sum_{j=1}^N F_{j,n}^{st} \cdot h_j = h_n^{eff} \cdot M_n^{eff}$$

Οι ποσότητες M_n^{eff} και h_n^{eff} είναι η ενεργή ή ισοδύναμη ιδιομορφική μάζα, την οποία είχαμε αναφέρει και νωρίτερα, και το ενεργό ιδιομορφικό ύψος αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στα ισοδύναμα ΜΒΣ. Τα μεγέθη αυτά, είναι ανεξάρτητα του τρόπου κανονικοποίησης των ιδιομορφών. Η φυσική σημασία της ενεργής ιδιομορφικής μάζας βάσης M_n^{eff} , είναι ότι μόνο αυτό το ποσοστό της μάζας συμμετέχει ενεργά στην ανάπτυξη τέμνουσας λόγω της n-ιδιομορφής:

$$\sum_{n=1}^N M_n^{\text{eff}} = \sum_{j=1}^N M_j = M_{\text{total}}$$

Το ενεργό ιδιομορφικό ύψος h_n^{eff} , εξαρτάται από την κατανομή των μαζών καθ' ύψος του κτιρίου και τη μορφή των ιδιομορφών και είναι πάντα μικρότερο από το συνολικό ύψος του κτιρίου. Είναι το ύψος στο οποίο θα ήταν η μάζα του αντίστοιχου ΜΒΣ για να προκύπτει η σωστή ροπή ανατροπής για τη συγκεκριμένη ιδιομορφή. Δηλαδή, οι ροπές των ενεργών ιδιομορφικών μαζών M_n^{eff} , εφαρμοζόμενες στα αντίστοιχα ενεργά ιδιομορφικά ύψη h_n^{eff} ισούνται με τη ροπή ανατροπής βάσης:

$$M_{bn} = h_n^{\text{eff}} \cdot M_n^{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad M_b = \sum_{n=1}^N h_n^{\text{eff}} \cdot M_n^{\text{eff}}$$

Κάνοντας δυναμική ανάλυση για τα ΜΒΣ που αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες ιδιομορφικές εξισώσεις, δηλαδή στη γενικευμένη μάζα $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$, τη γενικευμένη δυσκαμψία $k_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi}_n$ και το λόγο απόσβεσης ζ_n , υπό συγκεκριμένη σεισμική διέγερση $\ddot{u}_g(t)$, υπολογίζουμε την ιδιομορφική απόκριση. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι συνεισφορές των ιδιομορφών στα στατικά μεγέθη $s_n(t)$, στις σχετικές μετακινήσεις $u_n(t)$ και στις απόλυτες επιταχύνσεις $\ddot{u}_n^{\text{total}}(t)$ και η συνολική απόκριση από επαλληλία των ιδιομορφών.

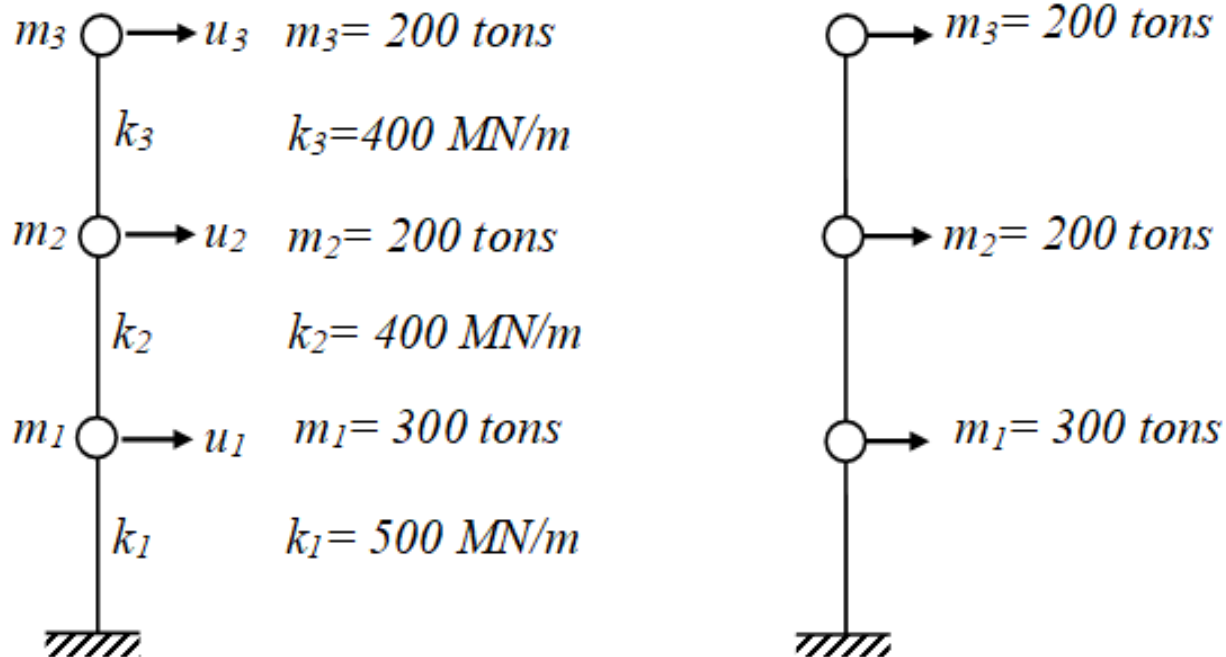
$$s_n(t) = s_n^{\text{static}} \cdot A_n(t) \quad \Rightarrow \quad s(t) = \sum_{n=1}^N s_n(t)$$

$$\underline{u}_n(t) = \Gamma_n \cdot \underline{\varphi}_n \cdot h_n(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{u}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{u}_n(t)$$

$$\ddot{\underline{u}}^{\text{total}}(t) = \sum_{n=1}^N \ddot{\underline{u}}_n(t) + \ddot{u}_g(t) \cdot \underline{1}$$

Παράδειγμα-5

Ζητούνται να υπολογιστούν: (α) Οι ιδιομορφικοί συντελεστές, Γ_n , (β) οι ιδιομορφικές κατανομές του $\underline{M} \cdot \underline{1}$, δηλαδή τα \underline{F}_n^M , και (γ) οι ενεργές ιδιομορφικές μάζες, M_n^{eff} , του φορέα που έχουμε μελετήσει στο Παράδειγμα 12.3 με 3 ΒΕ (Σχήμα 12.22).



Σχήμα 12.22: ΠΒΣ με 3 δυναμικούς ΒΕ και την κατανομή των μαζών του.

Τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας είχαν ήδη μορφωθεί όπως πιο κάτω:

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 900 & -400 & 0 \\ -400 & 800 & -400 \\ 0 & -400 & 400 \end{bmatrix} \text{ MN/m} , \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ tons}$$

Η συνολική μάζα της κατασκευής είναι:

$$m_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{\text{ορόφοι}} m_i = 300 + 200 + 200 = 700 \text{ tons}$$

Και, οι ιδιομορφές της κατασκευής έχουν υπολογιστεί και κανονικοποιηθεί ως προς το μητρώο μάζας, $\underline{\underline{M}}$:

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi}}_1 = \begin{bmatrix} 0.00067 \\ 0.00129 \\ 0.00164 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\phi}}_2 = \begin{bmatrix} 0.00149 \\ 0.00040 \\ -0.00122 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\phi}}_3 = \begin{bmatrix} 0.00081 \\ -0.00178 \\ 0.00091 \end{bmatrix}$$

Εφόσον το επίπεδο ΠΒΣ έχει διατμητική συμπεριφορά, το διάνυσμα επιρροής, $\underline{\underline{1}}$, ισούται με το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, $\underline{\underline{1}} = [1 \ 1 \ 1]^T$.

(α) Οι ιδιομορφικοί συντελεστές υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\Gamma_n = \frac{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{L_n}{m_n}$$

όπου: $L_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}$ και $m_n = \underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$

$$L_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \text{ και } m_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 1$$

$$L_1 = [0.00067 \quad 0.00129 \quad 0.00164] \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 784.70$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 = \frac{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} = \frac{L_1}{m_1} = 784.70$$

$$L_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \text{ και } m_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = 1$$

$$L_2 = [0.00149 \quad 0.00040 \quad -0.00122] \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 282.05$$

$$\Rightarrow \Gamma_2 = \frac{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2} = \frac{L_2}{m_2} = 282.05$$

$$L_3 = \underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = \underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \quad \text{και} \quad m_3 = \underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_3 = 1$$

$$L_3 = [0.00081 \quad -0.00178 \quad 0.00091] \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 68.52$$

$$\Rightarrow \Gamma_3 = \frac{\underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_3} = \frac{L_3}{m_3} = 68.52$$

(β) οι ιδιομορφικές κατανομές \underline{F}_n^M υπολογίζονται ως: $\underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$

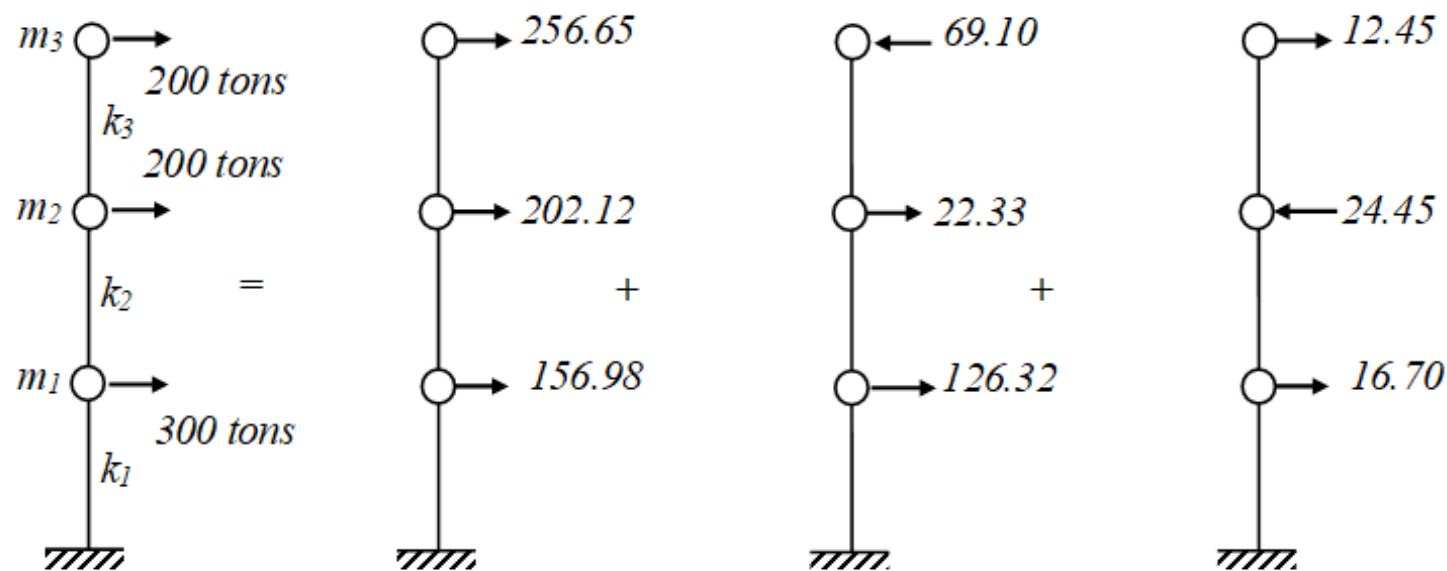
$$\underline{F}_1^M = \Gamma_1 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 784.70 \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00067 \\ 0.00129 \\ 0.00164 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \underline{F}_1^M = \begin{bmatrix} 156.98 \\ 202.12 \\ 256.65 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2^M = \Gamma_2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = 784.70 \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00149 \\ 0.00040 \\ -0.00122 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \underline{F}_2^M = \begin{bmatrix} 126.32 \\ 22.33 \\ -69.10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_3^M = \Gamma_3 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_3 = 68.52 \cdot \begin{bmatrix} 300000 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 200000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00081 \\ -0.00178 \\ 0.00091 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{F}_3^M = \begin{bmatrix} 16.70 \\ -24.45 \\ 12.45 \end{bmatrix}$$

Προσθέτοντας τις ιδιομορφικές κατανομές, \underline{F}_n^M , ανά όροφο, προκύπτει το $\underline{M} \cdot \underline{1}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.23.



Σχήμα 12.23: Ιδιομορφικές κατανομές, \underline{F}_n^M του $\underline{M} \cdot \underline{1}$.

(γ) Οι ενεργές ιδιομορφικές μάζες, M_n^{eff} , δίνονται από τη σχέση:

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n} = \frac{(\underline{\varphi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{m_n}$$

$$\Rightarrow M_1^{\text{eff}} = \frac{(\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{\underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1} = \frac{(784.70)^2}{1} = 615.75 \text{ tons} \approx 88\% \cdot m_{\text{total}}$$

$$\Rightarrow M_2^{\text{eff}} = \frac{(\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{\underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2} = \frac{(282.05)^2}{1} = 79.55 \text{ tons} \approx 11.4\% \cdot m_{\text{total}}$$

$$\Rightarrow M_3^{\text{eff}} = \frac{(\underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1})^2}{\underline{\varphi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_3} = \frac{(68.52)^2}{1} = 4.70 \text{ tons} \approx 0.6\% \cdot m_{\text{total}}$$

Από τον υπολογισμό των ενεργών ιδιομορφικών μαζών, καταδεικνύεται η σημασία της 1ης ιδιομορφής σε αυτό το επίπεδο ΠΒΣ.

Ελέγχοντας το άθροισμα των ενεργών ιδιομορφικών μαζών, θα πρέπει να προκύπτει η συνολική μάζα της κατασκευής:

$$M_{\text{total}} = \sum_{n=1}^N M_n^{\text{eff}} = M_1^{\text{eff}} + M_2^{\text{eff}} + M_3^{\text{eff}} = 615.75 + 79.55 + 4.70 = 700 \text{ tons} = m_{\text{total}}$$

Φασματική Ανάλυση

Η δυναμική ανάλυση με χρήση της Επαλληλίας των Ιδιομορφών (*Modal Analysis*) υπολογίζει τη χρονοϊστορία της απόκρισης (*Response History Analysis*) κατά τη διάρκεια μιας σεισμικής διέγερσης συναρτήσει του χρόνου. Στην πράξη όμως, τόσο για το σχεδιασμό μιας νέας κατασκευής όσο και για την αποτίμηση της επάρκειας μιας υφιστάμενης κατασκευής, αρκούν οι μέγιστες τιμές της απόκρισης κατά τη διάρκεια μιας σεισμικής δράσης.

Όπως είχαμε δει στην ανάλυση ΜΒΣ, αντί δυναμικής ανάλυσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αντίστοιχα φάσματα απόκρισης τα οποία παρέχουν τις μέγιστες αποκρίσεις, όσον αφορά μετακινήσεις, επιταχύνσεις, κ.λπ., συναρτήσει της ιδιοπεριόδου ή ιδιοσυχνότητας για μια σειρά διαφορετικών λόγων απόσβεσης. Παρομοίως, η Φασματική Ανάλυση (*Response Spectrum Analysis*) αξιοποιεί τα φάσματα απόκρισης για να υπολογιστούν οι μέγιστες αποκρίσεις που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιομορφική εξίσωση.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται επαλληλία των μέγιστων αποκρίσεων των ιδιομορφών για να εκτιμηθεί, με κάποιο κατάλληλο κανόνα συνδυασμού, η συνολική μέγιστη απόκριση, αφού οι μέγιστες ιδιομορφικές αποκρίσεις συμβαίνουν σε διαφορετική χρονική στιγμή. Για αυτό το λόγο, τα αποτελέσματα της Φασματικής Ανάλυσης είναι απλές εκτιμήσεις της μέγιστης απόκρισης σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της Μεθόδου της Επαλληλίας των Ιδιομορφών, τα οποία είναι ακριβή όταν λαμβάνονται υπόψη οι συνεισφορές όλων των ιδιομορφών.

Μέγιστες ιδιομορφικές αποκρίσεις και οι συνδυασμοί τους

Η μέγιστη τιμή ενός εντατικού μεγέθους, s , λαμβάνοντας υπόψη τη συνεισφορά της n -ιδιομορφής, s_n^{\max} , μπορεί να προσδιοριστεί από το φάσμα απόκρισης ενός σεισμού ή από το φάσμα σχεδιασμού βάσει της αντίστοιχης ψευδοεπιτάχυνσης:

$$A_n^{\max} = S_a(\omega_n, \zeta_n) \quad \Rightarrow \quad s_n^{\max} = s_n^{\text{st}} \cdot S_a(\omega_n, \zeta_n)$$

Όμως, η μέγιστη απόκριση και το αντίστοιχο μέγιστο εντατικό μέγεθος δεν συμβαίνουν γενικά στην ίδια χρονική στιγμή. Συνεπώς, αθροίζοντας τις μέγιστες αποκρίσεις λόγω όλων των ιδιομορφών, είναι πολύ συντηρητική παραδοχή, αφού είναι το άθροισμα των απόλυτων τιμών των μέγιστων ιδιομορφικών αποκρίσεων.

$$\text{Κανόνας ABSSUM (Absolute sum): } S_{\max} = \sum_{n=1}^N |s_n^{\max}|$$

Πολύ πιο ρεαλιστικός τρόπος εκτίμησης των μέγιστων συνολικά αποκρίσεων παρέχει ο τύπος SRSS (Square Root of Sum of Squares), που βασίζεται στην τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των μέγιστων ιδιομορφικών αποκρίσεων.

$$\text{Κανόνας SRSS: } S_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^N (s_n^{\max})^2} = \sqrt{(s_1^{\max})^2 + (s_2^{\max})^2 + \dots + (s_N^{\max})^2}$$

$$\text{Κανόνας SRSS: } S_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^N (S_n^{\max})^2} = \sqrt{(S_1^{\max})^2 + (S_2^{\max})^2 + \dots + (S_N^{\max})^2}$$

Αυτός ο προσεγγιστικός κανόνας δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα εφόσον οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής είναι αρκετά διαχωρισμένες. Όταν οι ιδιοσυχνότητες συμπίπτουν, υπάρχει άλλη πιο ακριβής μέθοδος, η CQC (complete quadratic combination).

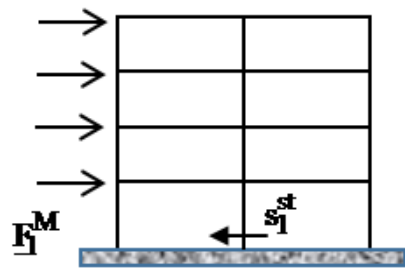
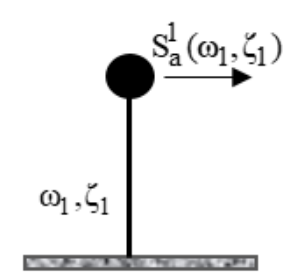
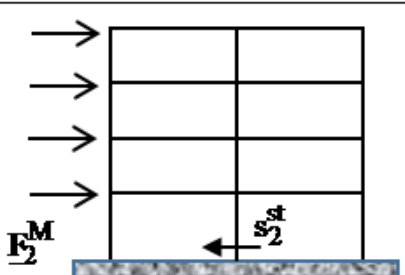
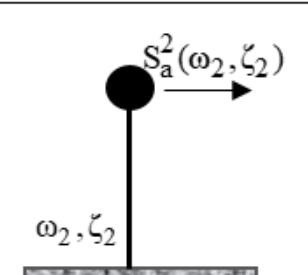
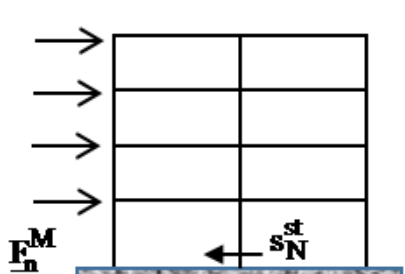
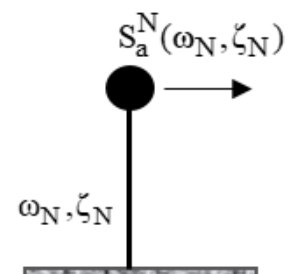
Ενώ το πρόσημο της μέγιστης ψευδοεπιτάχυνσης S_a είναι πάντα θετικό, το S_n^{st} μπορεί να είναι και αρνητικό. Έτσι, κατά την εφαρμογή του SRSS πρέπει να διατηρείται το πρόσημο της μέγιστης ιδιομορφικής απόκρισης S_n^{\max} . Επίσης, είναι σημαντικό η μέγιστη τιμή της απόκρισης ενός συγκεκριμένου μεγέθους να εκτιμάται από το συνδυασμό των μέγιστων τιμών αυτού του μεγέθους και όχι από συνδυασμό εκτιμήσεων των μέγιστων τιμών άλλων ποσοτήτων.

Παρομοίως με τη διαδικασία που ακολουθείται κατά την ανάλυση ενός ΠΒΣ για τον υπολογισμό της χρονοϊστορίας απόκρισης με τη μέθοδο επαλληλίας, χρησιμοποιούμε τις ιδιομορφικές κατανομές, \underline{F}_i^M , υπό τις οποίες πραγματοποιούνται μέχρι N (όπου N ο αριθμός των δυναμικών ΒΕ) στατικές αναλύσεις του ΠΒΣ, για να υπολογιστεί η στατική τιμή του μεγέθους που θέλουμε να υπολογίσουμε, S_i^{st} .

$$\text{Κανόνας SRSS: } S_{\max} = \sqrt{\sum_{n=1}^N (S_n^{\max})^2} = \sqrt{(S_1^{\max})^2 + (S_2^{\max})^2 + \dots + (S_N^{\max})^2}$$

Όμως, αντί N δυναμικών αναλύσεων ΜΒΣ, για την κάθε ιδιομορφή (ω_i, ζ_i) , χρησιμοποιείται κάποιο φάσμα απόκρισης ή φάσμα σχεδιασμού για να προσδιοριστεί η μέγιστη φασματική επιτάχυνση, S_a^i , που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα και λόγο απόσβεσης (ω_i, ζ_i) .

Πολλαπλασιάζοντας, για κάθε ιδιομορφή, τη στατική τιμή του μεγέθους που θέλουμε να υπολογίσουμε, S_i^{st} , με τη μέγιστη φασματική επιτάχυνση, S_a^i , υπολογίζεται η μέγιστη τιμή του συγκεκριμένου μεγέθους S_i^{\max} από τη συνεισφορά της $\underline{\phi}_i$ ιδιομορφής. Επειδή, οι μέγιστες τιμές συμβαίνουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιος κανόνας για το συνδυασμό των συνεισφορών των ιδιομορφών, όπως π.χ. ο Κανόνας του SRSS.

φ_i	Στατική ανάλυση ΠΒΣ	Από φάσμα απόκρισης ή φάσμα σχεδιασμού	Συνεισφορά
1			$s_1^{\max} =$ $s_1^{\text{st}} \cdot S_a^1(\omega_1, \zeta_1)$
2			$s_2^{\max} =$ $s_2^{\text{st}} \cdot S_a^2(\omega_2, \zeta_2)$
...
N			$s_N^{\max} =$ $s_N^{\text{st}} \cdot S_a^N(\omega_N, \zeta_N)$

Συνολική απόκριση:
$$s_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N (s_i^{\max})^2} = \sqrt{(s_1^{\max})^2 + (s_2^{\max})^2 + \dots + (s_N^{\max})^2}$$

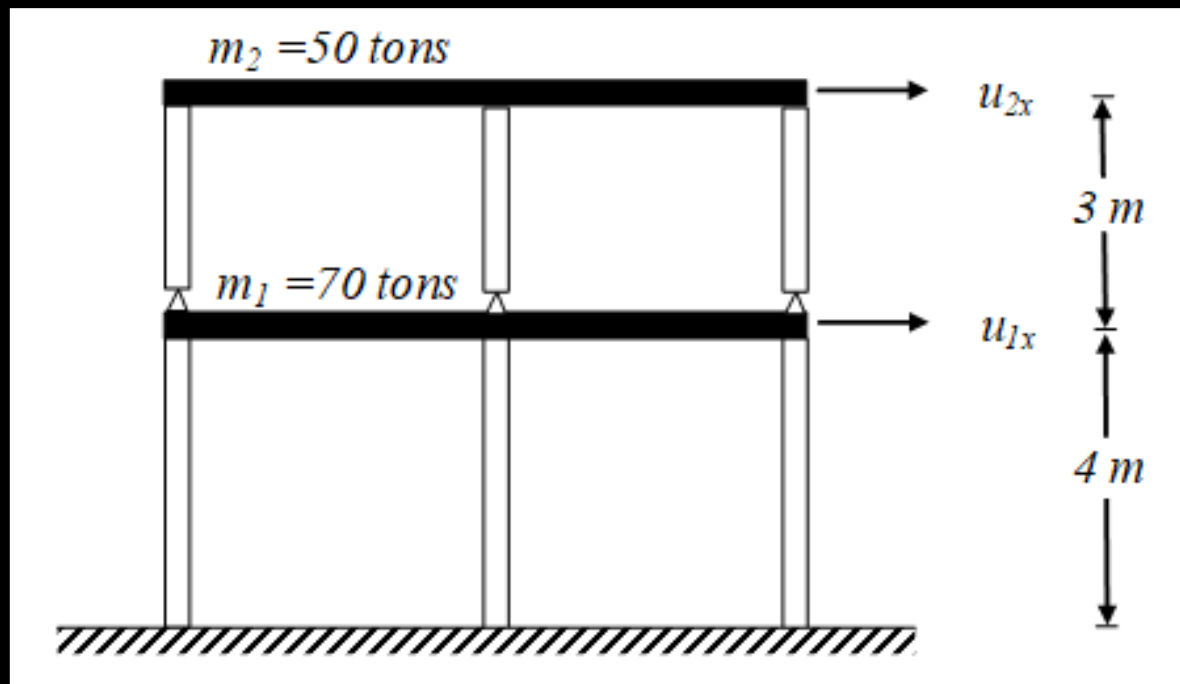
Χρήση Ισοδύναμων Στατικών Δυνάμεων Σεισμού

- Παλαιότερα λόγω περιορισμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων, οι σεισμικές δράσεις λαμβάνονταν υπόψη στατικά, με χρήση ισοδύναμων σεισμικών φορτίων.
- Τα ισοδύναμα σεισμικά στατικά φορτία ασκούνται στατικά στο κέντρο βάρους του κάθε ορόφου, αφού αντιπροσωπεύουν τις αδρανειακές δυνάμεις.
- Η συνολική τέμνουσα βάσης ισούται προφανώς με το άθροισμα των ισοδύναμων με το σεισμό στατικών φορτίων τα οποία ασκούνται στους ορόφους καθ' ύψος του κτιρίου.
- Η καθ' ύψος κατανομή των ισοδύναμων σεισμικών φορτίων είχε συνήθως τριγωνική μορφή βάσει της απόκρισης και συνεισφοράς της θεμελειώδους ιδιόμορφης.

- Σε συνήθης κτιριακές κατασκευές είναι συχνά προτιμότερο να μην δοθούν τιμές μάζας ανά όγκο στα δομικά στοιχεία κατά την προσομοίωση και να δοθούν απευθείας συγκεντρωμένες μάζες στα κέντρα μάζας των οροφών, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφραγματική λειτουργία των πλακών των ορόφων.
- Με αυτή την παραδοχή, μειώνονται σημαντικά οι δυναμικοί ΒΕ που πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά τη δυναμική ανάλυση.
- Έτσι, για μια χωρική δυναμική ανάλυση μιας τρισδιάστατης κατασκευής θα έχουμε περιορισμένο αριθμό δυναμικών βαθμών ελευθερίας.

Παράδειγμα

Το δώροφο πλαίσιο στο σχήμα, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει συμπεριφορά διατμητικού προβόλου με δύο βαθμούς ελευθερίας, υποβάλλεται σε οριζόντια σεισμική διέγερση $\ddot{u}_g(t)$ του εδάφους θεμελίωσης του. Η μάζα του 1^{ου} ορόφου είναι 70 τόνοι και του 2^{ου} ορόφου είναι 50 τόνοι ($1 \text{ ton} = 1000 \text{ kg}$). Οι διατομές των υποστυλωμάτων είναι τετραγωνικές 50 εκατοστών και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται με 30 GPa. Θεωρήστε ότι ο λόγος απόσβεσης είναι 2 % για κάθε ιδιομορφή.



(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης αυτού του πλαισίου, παρουσιάζοντας τα στοιχεία των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας, χωρίς να αναπτύξετε το μητρώο απόσβεσης.

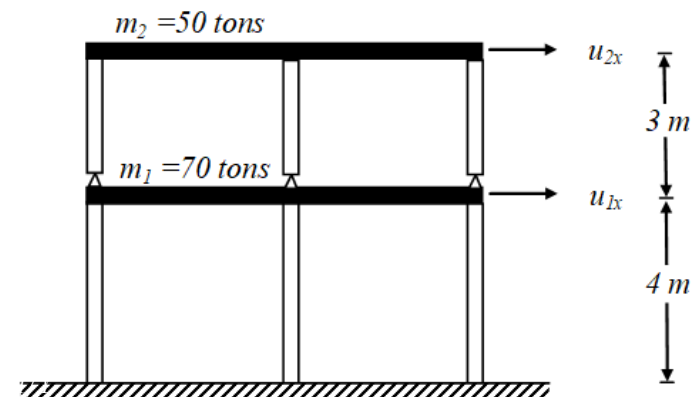
(β) Αν η λύση της ΔΕ $m \cdot \ddot{h}(t) + c \cdot \dot{h}(t) + k \cdot h(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t)$ ενός ΜΒΣ, κάτω από την ίδια σεισμική διέγερση $\ddot{u}_g(t)$, ισούται με $h(t) = h(t, \omega_N, \zeta_N)$, υπολογίστε τις μετακινήσεις των ορόφων λόγω της κάθε ιδιομορφής αλλά και συνολικά.

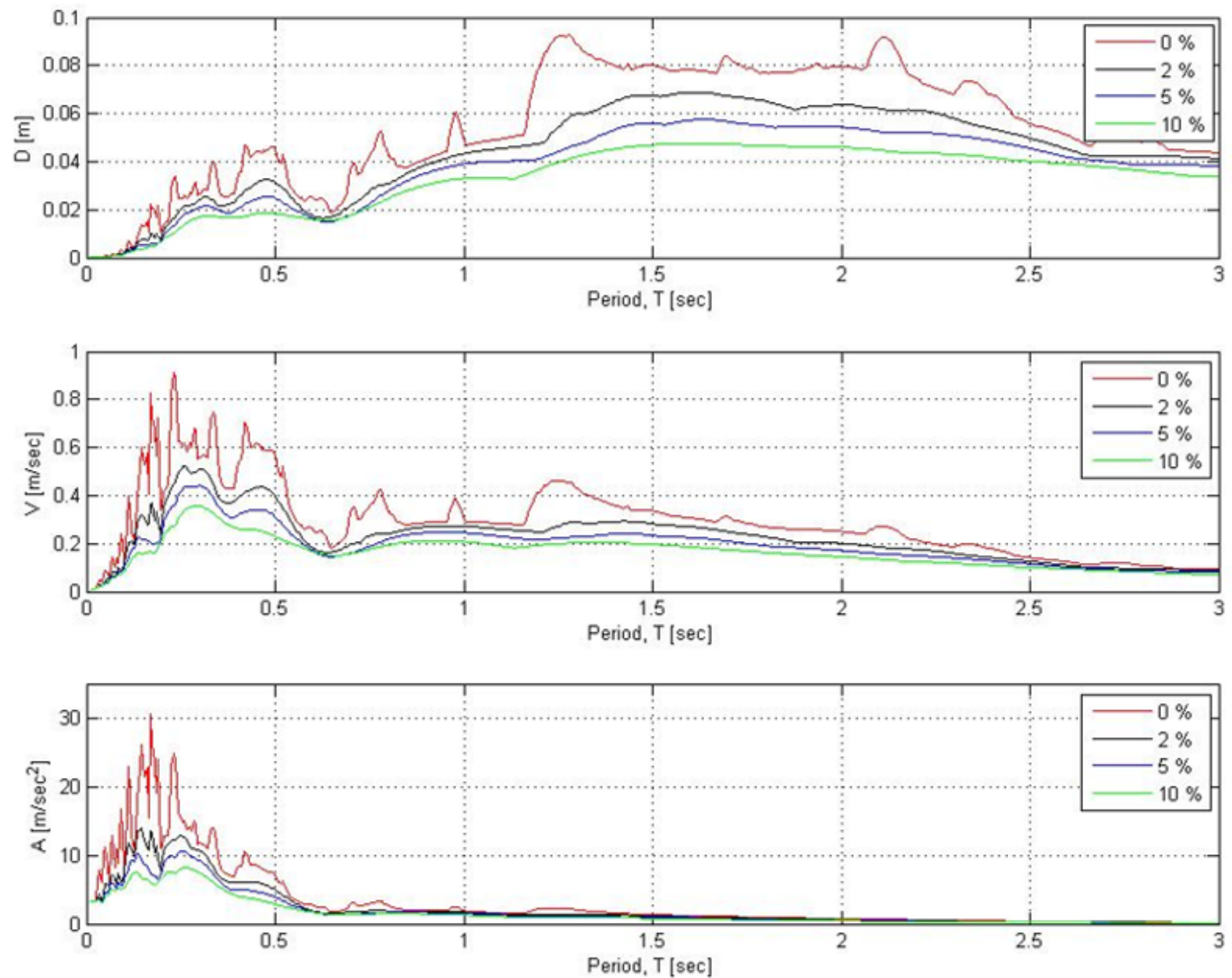
(γ) Σας δίνεται το φάσμα απόκρισης της σεισμικής διέγερσης των Αθηνών- Σεπόλια, (Σχήμα 12.26), για λόγους απόσβεσης 0 %, 2 %, 5 %, 10 % και 20 %, και ζητείται όπως εκτιμήσετε:

- (i) τις μέγιστες μετακινήσεις των ορόφων.
- (ii) τη μέγιστη τέμνουσα βάσης.
- (iii) τη μέγιστη ροπή ανατροπής βάσης.
- (iv) τη μέγιστη ροπή στη βάση του κάθε υποστυλώματος του κάθε ορόφου.
- (v) τη μέγιστη σχετική μετακίνηση μεταξύ των δύο ορόφων.

(δ) Τέλος, από το φάσμα απόκρισης (Σχήμα 12.26) της συγκεκριμένης σεισμικής διέγερσης, εκτιμήστε:

- (i) τη μέγιστη επιτάχυνση του εδάφους.
- (ii) τη μέγιστη μετακίνηση του εδάφους.





Σχήμα 12.26: Φάσματα μετακινήσεων, ψευδοταχυτήτων και ψευδοεπιταχύνσεων σεισμού Αθήνας-Σεπόλια, 7 Σεπτεμβρίου 1999, $PGA = 3.201 \text{ m/s}^2 = 0.326 \text{ g}$.

(α) Εξισώσεις κίνησης του πλαισίου

Αρχικά θα πρέπει να υπολογισθούν τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά του διώροφου πλαισίου:

$$I = (0.5\text{m})^4 / 12 = 0.00521\text{m}^4$$

$$k_1 = 3 \cdot \frac{12EI}{h_1^3} = 3 \cdot \frac{12 \cdot 30 \cdot 10^9 \text{Pa} \cdot 0.00521\text{m}^4}{(4\text{m})^3} = 87.891 \cdot 10^6 \text{N/m}$$

$$k_2 = 3 \cdot \frac{3EI}{h_2^3} = 3 \cdot \frac{3 \cdot 30 \cdot 10^9 \text{Pa} \cdot 0.00521\text{m}^4}{(3\text{m})^3} = 52.083 \cdot 10^6 \text{N/m}$$

Έτσι, τα μητρώα μάζας \underline{M} και δυσκαμψίας \underline{K} έχουν ως εξής:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{Kg}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139.974 & -52.083 \\ -52.083 & 52.083 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{N/m}$$

και το μητρώο απόσβεσης ισούται με: $\underline{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$

Επομένως, η εξίσωση κίνησης του διώροφου πλαισίου είναι :

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{1}} \cdot \ddot{u}_g(t)$$

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Kg},$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139.974 & -52.083 \\ -52.083 & 52.083 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

(β) Δυναμική ανάλυση με επαλληλία των ιδιομορφών

Για την ανάλυση της πιο πάνω κατασκευής με επαλληλία των ιδιομορφών, θα πρέπει να υπολογισθούν οι ιδιομορφές της κατασκευής.

Με επίλυση του ιδιοπροβλήματος $(\underline{K} - \underline{M} \cdot \omega_n^2) \cdot \underline{\Phi}_n = 0$, προσδιορίζονται αρχικά οι ιδιοσυχνότητες και ακολούθως οι ιδιομορφές :

$$\omega_1 = 22.77 \text{ rad/sec} \quad \underline{\varphi}_1 = [0.502 \quad 1.0]^T$$

$$\omega_2 = 50.23 \text{ rad/sec} \quad \underline{\varphi}_2 = [-1.422 \quad 1]^T$$

Οι μετακινήσεις των ορόφων λόγω της n-ιδιομορφής $\underline{\Phi}_n$ ισούνται με:

$$\underline{u}_n(t) = \underline{\varphi}_n \cdot \Gamma_n \cdot h_n(t) = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου: } \Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} = \frac{\underline{\Phi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\Phi}_n^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_n}$$

Έτσι, για την 1^η ιδιομορφή:

$$L_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = [0.502 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 85.14 \cdot 10^3$$

$$M_1 = \underline{\varphi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = [0.502 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.502 \\ 1 \end{bmatrix} = 67.64 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 = \frac{L_1}{M_1} = 1.259$$

Για την 2^η ιδιομορφή:

$$L_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} = [-1.422 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -49.54 \cdot 10^3$$

$$M_2 = \underline{\varphi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = [-1.422 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1.422 \\ 1 \end{bmatrix} = 191.54 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow \Gamma_2 = \frac{L_2}{M_2} = -0.259$$

Επομένως, οι μετακινήσεις των ορόφων λόγω της 1^{ης} ιδιομορφής ισούνται με:

$$\underline{u}_1(t) = \underline{\varphi}_1 \cdot \Gamma_1 \cdot h_1(t) = \begin{bmatrix} 0.502 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1.259 \cdot h_1(t) = \begin{bmatrix} 0.632 \\ 1.259 \end{bmatrix} \cdot h_1(t) = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

ενώ οι μετακινήσεις των ορόφων λόγω της 2^{ης} ιδιομορφής ισούνται με:

$$\underline{u}_2(t) = \underline{\varphi}_2 \cdot \Gamma_2 \cdot h_2(t) = \begin{bmatrix} -1.422 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-0.259) \cdot h_2(t) = \begin{bmatrix} 0.368 \\ -0.259 \end{bmatrix} \cdot h_2(t) = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

Έτσι, οι συνολικές μετακινήσεις των 2 ορόφων προκύπτουν με επαλληλία των ιδιομορφών ως εξής :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) = \begin{bmatrix} 0.632 \\ 1.259 \end{bmatrix} \cdot h_1(t) + \begin{bmatrix} 0.368 \\ -0.259 \end{bmatrix} \cdot h_2(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

(γ) Φασματική ανάλυση

Βάσει των δύο ιδιοπεριόδων, οι οποίες ισούνται με $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.276 \text{ sec}$ και

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.125 \text{ sec}$, από το φάσμα απόκρισης για $\zeta = 2\%$ μπορούμε να εκτιμήσουμε τις

μέγιστες τιμές των σχετικών μετακινήσεων αντίστοιχων ΜΒΣ:

$$S_{d1} = 0.0220 \text{ m} \Rightarrow S_{a1} = \omega_1^2 \cdot S_{d1} = 11.44 \text{ m / sec}^2$$

$$S_{d2} = 0.0040 \text{ m} \Rightarrow S_{a2} = \omega_2^2 \cdot S_{d2} = 10.09 \text{ m / sec}^2$$

(i) Συνεπώς, οι μέγιστες μετακινήσεις των δύο ορόφων λόγω της 1^{ης} ιδιομορφής

$$\text{ισούνται με: } \underline{u}_1^{\max} = \underline{\varphi}_1 \cdot \Gamma_1 \cdot S_{d1} = \begin{bmatrix} 0.502 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1.259 \cdot 0.0220 \text{ m} = \begin{bmatrix} 0.0139 \\ 0.0277 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} u_{11}^{\max} \\ u_{21}^{\max} \end{bmatrix}$$

ενώ, οι μέγιστες μετακινήσεις των 2 ορόφων λόγω της 2^{ης} ιδιομορφής ισούνται με:

$$\underline{u}_2^{\max} = \underline{\varphi}_2 \cdot \Gamma_2 \cdot S_{d2} = \begin{bmatrix} -1.422 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-0.259) \cdot 0.0040 \text{ m} = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ -0.0010 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} u_{12}^{\max} \\ u_{22}^{\max} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_1^{\max} = \underline{\varphi}_1 \cdot \Gamma_1 \cdot S_{d1} = \begin{bmatrix} 0.502 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1.259 \cdot 0.0220 \text{m} = \begin{bmatrix} 0.0139 \\ 0.0277 \end{bmatrix} \text{m} = \begin{bmatrix} u_{11}^{\max} \\ u_{21}^{\max} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_2^{\max} = \underline{\varphi}_2 \cdot \Gamma_2 \cdot S_{d2} = \begin{bmatrix} -1.422 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-0.259) \cdot 0.0040 \text{m} = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ -0.0010 \end{bmatrix} \text{m} = \begin{bmatrix} u_{12}^{\max} \\ u_{22}^{\max} \end{bmatrix}$$

Η συνολική μέγιστη μετακίνηση του 1^{ου} ορόφου μπορεί να εκτιμηθεί βάσει του κανόνα της Τετραγωνικής Ρίζας των Τετραγώνων (*SRSS – Square Root of the Sum of Squares*):

$$u_1^{\max} = \sqrt{\left(u_{11}^{\max}\right)^2 + \left(u_{12}^{\max}\right)^2} = \sqrt{(0.0139)^2 + (0.0015)^2} = 0.0144 \text{m}$$

Αντίστοιχα, η συνολική μέγιστη μετακίνηση του 2^{ου} ορόφου εκτιμάται σαν:

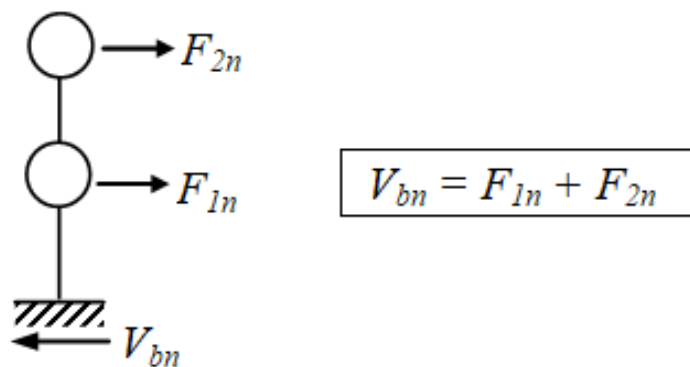
$$u_2^{\max} = \sqrt{\left(u_{21}^{\max}\right)^2 + \left(u_{22}^{\max}\right)^2} = \sqrt{(0.0277)^2 + (-0.0010)^2} = 0.0277 \text{m}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της μέγιστης τέμνουσας βάσης λόγω της n -ιδιομορφής, αρκεί να εφαρμόσουμε στατικά τα $\underline{F}_n = \underline{F}_n^M \cdot S_{an}$ στο μοντέλο της κατασκευής (Σχήμα 12.27), και να το επιλύσουμε.

$$\underline{F}_n = \underline{F}_n^M \cdot S_{an}, \text{ όπου } \underline{F}_n^M = \Gamma_n \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_n$$

$$\underline{F}_1^M = \Gamma_1 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_1 = 1.259 \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.502 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.24 \\ 62.95 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$\underline{F}_2^M = \Gamma_2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\varphi}_2 = (-0.259) \cdot \begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1.422 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.78 \\ -12.95 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Kg}$$



Σχήμα 12.27: Υπολογισμός τέμνουσας βάσης.

Μέγιστη τέμνουσα βάσης λόγω 1^{ης} ιδιομορφής :

$$F_1 = \underline{F}_1^M \cdot S_{a1} = \begin{bmatrix} 44.24 \\ 62.95 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Kg} \cdot 11.44 \text{ m / sec}^2 = \begin{bmatrix} 506.11 \\ 720.15 \end{bmatrix} \text{ KN} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{b1}^{\max} = F_{11} + F_{21} = 1226.30 \text{ KN}$$

Μέγιστη τέμνουσα βάσης λόγω 2^{ης} ιδιομορφής :

$$F_2 = \underline{F}_2^M \cdot S_{a2} = \begin{bmatrix} 25.78 \\ -12.95 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Kg} \cdot 10.09 \text{ m / sec}^2 = \begin{bmatrix} 260.12 \\ -130.66 \end{bmatrix} \text{ KN} = \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{b2}^{\max} = F_{12} + F_{22} = 129.44 \text{ KN}$$

Συνολική μέγιστη τέμνουσα βάσης :

$$V_b^{\max} = \sqrt{\left(V_{b1}^{\max}\right)^2 + \left(V_{b2}^{\max}\right)^2} = \sqrt{(1226.30)^2 + (129.44)^2} = 1252.80 \text{ KN}$$

(iii) Μέγιστη ροπή ανατροπής βάσης λόγω 1^{ης} ιδιομορφής :

$$M_{b1}^{\max} = F_{11} \cdot 4 \text{ m} + F_{21} \cdot 7 \text{ m} = 506.11 \text{ KN} \cdot 4 \text{ m} + 720.15 \text{ KN} \cdot 7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow M_{b1}^{\max} = 7066.50 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Μέγιστη ροπή ανατροπής βάσης λόγω 2^{ης} ιδιομορφής :

$$M_{b2}^{\max} = F_{12} \cdot 4 \text{ m} + F_{22} \cdot 7 \text{ m} = 260.12 \text{ KN} \cdot 4 \text{ m} + (-130.66 \text{ KN}) \cdot 7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow M_{b2}^{\max} = 125.86 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Συνολική μέγιστη ροπή ανατροπής βάσης:

$$M_b^{\max} = \sqrt{\left(M_{b1}^{\max}\right)^2 + \left(M_{b2}^{\max}\right)^2} = \sqrt{(7066.50 \text{ KNm})^2 + (125.86 \text{ KNm})^2} = 7067.70 \text{ KNm}$$

(iv) Η ροπή στη βάση του κάθε υποστυλώματος του 2^{ου} ορόφου είναι μηδενική αφού υπάρχουν αρθρώσεις σε εκείνα τα σημεία.

Η μέγιστη ροπή στις βάσεις των υποστυλωμάτων του 1^{ου} ορόφου μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από την εκτίμηση της μέγιστης σχετικής μετακίνησης του 1^{ου} ορόφου και τις δυσκαμψίες των υποστυλωμάτων.

$$I = \frac{(0.5\text{m})^3 \cdot 0.5}{12}, \quad h_1 = 4\text{m}$$

Για τη ροπή M_1 στη βάση του κάθε υποστυλώματος του 1^{ου} ορόφου:

$$\text{Λόγω της 1ης ιδιομορφής: } M_1^1 = \frac{6EI}{h_1^2} \cdot u_{11}^{\max} = 814.453\text{KN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Λόγω της 2ης ιδιομορφής: } M_2^1 = \frac{6EI}{h_1^2} \cdot u_{12}^{\max} = 87.891\text{KN} \cdot \text{m}$$

Συνολική μέγιστη ροπή στη βάση του κάθε υποστυλώματος του 1^{ου} ορόφου:

$$M_1^{\max} = \sqrt{(M_1^1)^2 + (M_2^1)^2} = \sqrt{(814.453\text{KN})^2 + (87.891\text{KNm})^2}$$
$$\Rightarrow M_1^{\max} = 846.031\text{KNm}$$

(v) Η μέγιστη σχετική μετακίνηση Δu_{\max}^1 μεταξύ των δύο ορόφων λόγω της $\underline{\Phi}_1$:

$$\Delta u_{\max}^1 = 0.0277 - 0.0139 = 0.0138 \text{ m}$$

Η μέγιστη σχετική μετακίνηση Δu_{\max}^2 μεταξύ των δύο ορόφων λόγω της $\underline{\Phi}_2$:

$$\Delta u_{\max}^2 = -0.0010 - 0.0015 = -0.0025 \text{ m}$$

Η συνολική μέγιστη σχετική μετακίνηση Δu_{\max} :

$$\Delta u_{\max} = \sqrt{\left(\Delta u_{\max}^1\right)^2 + \left(\Delta u_{\max}^2\right)^2} = 0.0140 \text{ m}$$

(δ) Εκτίμηση μέγιστης επιτάχυνσης και τη μέγιστης μετακίνησης του εδάφους

Από το φάσμα απόκρισης μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέγιστη επιτάχυνση και τη μέγιστη μετακίνηση του εδάφους.

(i) Η μέγιστη επιτάχυνση του εδάφους ισούται με τη μέγιστη επιτάχυνση ενός πολύ δύσκαμπτου ΜΒΣ, το οποίο θεωρητικά κινείται μαζί με το έδαφος όταν η ιδιοπερίοδος του τείνει στο μηδέν:

$$\left(\ddot{u}_g\right)_0 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

(ii) Η μέγιστη μετακίνηση του εδάφους μπορεί να εκτιμηθεί από το φάσμα απόκρισης για πολύ εύκαμπτα ΜΒΣ, τα οποία οριακά είναι τόσο εύκαμπτα που μένουν ακίνητα χωρίς απόλυτες μετακινήσεις κατά το σεισμό. Έτσι για πολύ μεγάλες περιόδους η μετακίνηση που δίνει το φάσμα απόκρισης είναι μια εκτίμηση της μέγιστης μετακίνησης του εδάφους.

$$\left(u_g\right)_0 \approx 3.9 \text{ cm}$$

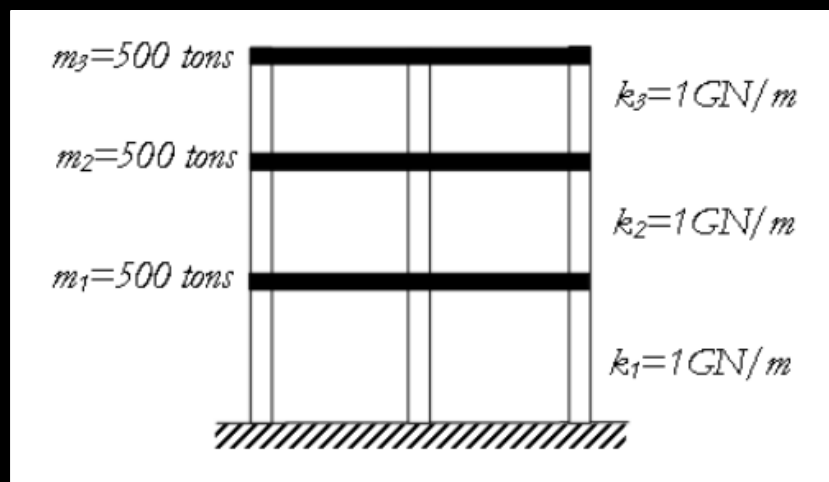
Σε αυτήν την περίπτωση το φάσμα απόκρισης δίνεται για ιδιοπεριόδους ΜΒΣ μέχρι μόνο 3 δευτερόλεπτα, ενώ ενδεχομένως η μέγιστη μετακίνηση του εδάφους να είναι μικρότερη της τάξης των 3.0 cm.

Προγραμματισμός Επαλληλίας των Ιδιομορφών

- Με τη Μέθοδο της Επαλληλίας των Ιδιομορφών για να πραγματοποιηθεί δυναμική ανάλυση, λαμβάνεται υπόψη η συνεισφορά της κάθε ιδιομορφής στον υπολογισμό των χρονοϊστοριών των μετακινήσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων, όπως και των εντατικών και οποιοδήποτε άλλων μεγεθών κατά τη διάρκεια μιας δυναμικής φόρτισης.
- Αφού το συζευγμένο σύστημα ΔΕ αντικαθίσταται από N (αριθμός δυναμικών ΒΕ) ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις της μορφής ΜΒΣ, αυτές επιλύνονται με τη χρήση των προγραμμάτων δυναμικής ανάλυσης ΜΒΣ (CDM, Newmark, κ.λπ.) που έχουμε αναπτύξει για τα ΜΒΣ και μετά οι συνεισφορές των ιδιομορφών επαλληλίζονται για να προσδιοριστεί η συνολικά απόκριση, χρονοϊστορίες των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις ιδιομορφές.

Παράδειγμα

- Δυναμική ανάλυση με τη μέθοδο της επαλληλίας των ιδιομορφών
- Σεισμική διέγερση: Σεισμός του Kobe (αρχείο: kobeAccel)
- Αρχείο δεδομένων: *inputData1.m*
- Τριώροφο (ΠΒΣ με 3 δυναμικούς ΒΕ)
- Οριζόντια δυσκαμψία ορόφων: 1GN/m
- Μάζα ορόφων: 500 tons
- Λόγος απόσβεσης: $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.05$



```
clear

% Fortwsh epitaxynsewn edafoys
eq = load('kobeAccel');|
t = eq(:,1);
ag = eq(:,2);

% k(i) stiffness of i-story
k(1)=1000e6;
k(2)=1000e6;
k(3)=1000e6;

% m(i) mass of i-floor
m(1)= 500e3 ;
m(2)= 500e3 ;
m(3)= 500e3 ;

% z(i) damping ratio of i-mode
z(1)= 0.05;
z(2)= 0.05;
z(3)= 0.05;

% N number of dynamic DOFs
N = length(k);
```

modalSuperposition.m

```
% s = input('Input data filename: ', 's')
s = 'inputData1'
eval(s)

fprintf('\n Number of dynamic DOF: %d ', N)
K = zeros(N,N);
M = zeros(N,N);
for i=1:N
    K(i,i) = k(i);
    M(i,i) = m(i);
    if i>1
        K(i,i-1) = K(i,i-1) - k(i);
        K(i-1,i) = K(i-1,i) - k(i);
        K(i-1,i-1) = K(i-1,i-1) + k(i);
    end
end

printMatrix(M, 'Mass')
printMatrix(K, 'Stiffness')

% Computing PGA
dt = t(2)-t(1);
numberPoints = length(t);
g=9.81;
pga=abs(ag(1));
tPGA=t(1);

for i=2:numberPoints
    if pga < abs(ag(i))
        pga=abs(ag(i));
        tPGA=t(i);
    end
end

fprintf('\n\n Exoyn diabastei %d times epitaxynsewn edafoys ana %.3f sec', numberPoints, dt)
fprintf('\n Megisth epitaxynsh edafoys = %.2f m/sec^2 = %.3f g sta %.3f sec\n', pga, pga/g, tPGA)
```

```

% Plot accelogram
figureNumber=1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall
subplot(3,1,1)
plot(t,ag)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Ground accelerations, Ag [m/s^2]')
% Ypologismos idiotimwn kai idiomorfwn
[V,D] = eig(K,M);

for i=1:N
    w(i) = sqrt(D(i,i));
    T(i) = 2*pi/w(i);
    modes(:,i) = V(:,i)/V(N,i);
end

fprintf('\n\n Mode      Eigenperiod      Eigenfrequency      Cyclic Eigenfrequency')
for i=1:N
    fprintf('\n   %d      %.4f sec      %.3f rad/sec      %.3f Hz', i, T(i), w(i), 1/T(i));
end

fprintf('\n\n ***** Modes *****')
for i=1:N
    mode = modes(:,i);
    fprintf('\n\n Mode-%d:  f%d * M * f%d = %f', i, i, i , mode'*M*mode);
    for j=1:N
        fprintf('\n   %f', mode(j));
    end
end
end

```

```

% Plot modes
subplot(2,1,2)
hold on
grid on
heights = 0:N;
scaling = 4*max(max(abs(modes)));
for i=1:N
    plot(1*i + [ 0 modes(:,i)' ]./scaling,heights', 'k')
    plot(1*i + modes(:,i)./scaling,heights(2:N+1),'o')
    plot([ 1*i 1*i],[0 3*N], '--')
end
axis([0 (N+1) 0 N])
one = ones(N,1);
mTotal = 0;
for mode=1:N
    f = modes(:,mode);
    Ln(mode) = (f'*M*one);
    Mn(mode) = f'*M*f;
    Gn(mode) = Ln(mode)/Mn(mode);
    Meff(mode) = Gn(mode)*Ln(mode);
    Kn(mode) = f'*K*f;
    Cn(mode) = 2*Mn(mode)*z(mode)*w(mode);
    mTotal = mTotal + Meff(mode);
end

fprintf('\n\n Mode-n          Ln          Mn          Gn = Ln/Mn          M*/Mtotal ')
for mode=1:N
    fprintf('\n   %d          %+9.4f          %9.5f          %+9.4f          %+7.3f %%', mode, Ln(mode), Mn(mode), Gn(mode), Meff(mode)/mTotal*100);
end
fprintf('\n')

```

```

% Range of plot values
xMin = 0;
xMax = t(numberPoints);
yMin = -0.20;
yMax = 0.20;

% Ari8mhtikh oloklhrwsh
u0 = 0;
v0 = 0;
U = zeros(N,numberPoints);
baseShear = zeros(numberPoints, N);
totalBaseShear = 0;
floorAccelerations = zeros(N,numberPoints);
    for mode=1:N
        P = -Mn(mode)*ag;

        % Ari8mhtikh oloklhrwsh me th CDM
        fprintf('\n***** Xrisi Central Difference Method *****')
        [u,v,a] = cdm(numberPoints, dt, t, P, Kn(mode), Mn(mode), Cn(mode), u0, v0);

        %Ari8mhtikh oloklhrwsh me th me8odo Newmark
        %fprintf('\n***** Xrisi Newmark Method *****')
        %[u,v,a] = newmark(numberPoints, dt, t, P, Kn(mode), Mn(mode),
        %Cn(mode), u0, v0);

figureNumber = figureNumber + 1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall
baseShearStatic = 0;
for floor=1:N
    baseShearStatic = baseShearStatic + Gn(mode)*m(floor)*modes(floor,mode);
    floorAccelerations(floor,:) = floorAccelerations(floor,:) + Gn(mode)*modes(floor,mode)*a;
    subplot(N,1,N-floor+1)
    plot(t,Gn(mode)*modes(floor,mode)*u)
    grid on

```

```

        grid on
        xlabel('Time, t [sec]')
        s = sprintf('Floor-%d displacements [m]',floor);
        ylabel(s)
        U(floor,:) = U(floor,:)+ Gn(mode)*modes(floor,mode)*u;
        axis([xMin xMax yMin yMax])
    end
    s = sprintf('Displacements due to mode: %d ', mode);
    title(s)
    baseShear(:,mode) = baseShearStatic * w(mode)^2 * u;
    totalBaseShear = totalBaseShear + baseShear(:,mode);
end

for floor=1:N
    floorAccelerations(floor,:) = floorAccelerations(floor,:) + ag';
end

% Plot floor displacements
figureNumber = figureNumber + 1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall
for floor=1:N
    subplot(N,1,N-floor+1)
    plot(t,U(floor,:))
    grid on
    xlabel('Time, t [sec]')
    s=sprintf('Floor-%d displacements [m]',floor);
    ylabel(s)
    axis([xMin xMax yMin yMax])
end
title('Floor displacements considering all modes')

```

```

% Plot interstory deflections
figureNumber = figureNumber + 1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall

for floor=1:N
    subplot(N,1,N-floor+1)
    if floor>1
        plot(t,U(floor,:)-U(floor-1,:))
    else
        plot(t,U(floor,:))
    end
    grid on
    xlabel('Time, t [sec]')
    s=sprintf('Floor-%d [m]',floor);
    ylabel(s)
    axis([xMin xMax yMin yMax])
end
title('Interstory deflections considering all modes')

```

```

% Plot base shear forces
figureNumber = figureNumber + 1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall
peakBaseShear = max(max(abs(totalBaseShear)));
for floor=1:N
    subplot(N+1,1,floor)
    axis([xMin xMax -peakBaseShear/1e6 peakBaseShear/1e6])
    plot(t,baseShear(:,floor)/1e6)
    grid on
    xlabel('Time, t [sec]')
    s=sprintf('Mode-%d contribution[MN]',floor);
    ylabel(s)
end
    title('Base shear force nodal contributions')

subplot(N+1,1,N+1)
axis([xMin xMax -peakBaseShear/1e6 peakBaseShear/1e6])
plot(t,totalBaseShear/1e6)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
s=sprintf('Total base shear force',i);
ylabel(s)
title('Base shear forces')

```

```

% Plot absolute floor accelerations
figureNumber = figureNumber + 1;
figure(figureNumber)
clf
orient tall

for floor=1:N
    subplot(N,1,N-floor+1)
    peakAccel = max(abs(floorAccelerations(floor,:)));
    axis([xMin xMax -peakAccel peakAccel])
    plot(t,floorAccelerations(floor,:))
    grid on
    xlabel('Time, t [sec]')
    s=sprintf('Floor-%d Accelerations [m/s2]',floor);
    ylabel(s)
end
title('Total floor accelerations considering all modes')

```

```

fprintf('\n\n ***** Maximum values *****\n')
fprintf('\n Floor      Maximum interstory deflections');
for floor=1:N
    if floor>1
        duMax = max(abs(U(floor,:)-U(floor-1,:)));
    else
        duMax = max(abs(U(floor,:)));
    end
    fprintf('\n %d          %.4f cm ', floor, duMax*100);
end

fprintf('\n\n Floor      Maximum absolute floor accelerations');
for floor=1:N
    fprintf('\n %d          %.4f m/sec^2 ', floor,max(abs(floorAccelerations(floor,:)));
end

fprintf('\n\n Maximum base shear force = %g MN', peakBaseShear/1e6);
fprintf('\n')

```



```
function [u,v,a]=cdm(n, dt, t, P, k, m, c, u0, v0)
% Μεθoδος Kentrikhs diaforas
```

```
% Elegxos eysta8eias CDM
```

```
wN = sqrt(k/m);
checkStability(dt,wN)
```

```
kEff = m/(dt*dt)+c/(2*dt);
pEff_1 = k-2*m/(dt*dt);
pEff_2 = m/(dt*dt)-c/(2*dt);
```

```
u(1)=u0;
v(1)=v0;
up=u(1);
a(1)=(P(1)-c*v(1)-k*u(1))/m;
upp=up-dt*v(1)+(0.5*dt*dt)*a(1);
```

```
for i=1:n-1
    pEff = P(i) - pEff_1*up - pEff_2*upp;
    u(i+1) = pEff/kEff;
    a(i) = (u(i+1)-2*up+upp) / (dt*dt);
    v(i) = (u(i+1)-up) / (2*dt);
    upp=up;
    up=u(i+1);
end
```

```
pEff = P(n) - pEff_1*u(i+1) - pEff_2*u(i);
uNext = pEff/kEff;
a(n) = (uNext-2*up+upp) / (dt*dt);
v(n) = (uNext-up) / (2*dt);
```

```
end
```

cdm.m

checkStability.m

```
function checkStability(dt, wN)
% Elegxos eysta8eias me8odoy
```

```
DTcr=2/wN;
```

```
if (DTcr/dt)<1
    fprintf('\n The time step is larger than the critical time step!!!! ')
end
```

```
return
```

```
function [u,v,a]=newmark(n, dt, t, P, k, m, c, u0, v0)
% Me8odos Newmark
```

```
alpha=0.25;
delta=0.5;
```

```
a0=1/(alpha*dt*dt);
a1=delta/(alpha*dt);
a2=1/(alpha*dt);
a3=1/(2*alpha)-1;
a4=delta/alpha-1;
a5=dt/2*(delta/alpha-2);
a6=dt*(1-delta);
a7=delta*dt;
```

```
kEff = k + a0*m + a1*c;
pEff_1 = k-2*m/(dt*dt);
pEff_2 = m/(dt*dt)-c/(2*dt);
```

```
u(1)=u0;
v(1)=v0;
a(1)=(P(1)-c*v(1)-k*u(1))/m;
up=u(1);
vp=v(1);
ap=a(1);
```

```
for i=1:n-1
    pEff = P(i+1) + m*(a0*up+a2*vp+a3*ap) + c*(a1*up+a4*vp+a5*ap);
    u(i+1) = pEff/kEff;
```

```
    a(i+1) = a0*(u(i+1)-up) - a2*vp - a3*ap;
    v(i+1) = vp+a6*ap+a7*a(i+1);
```

```
    up=u(i+1);
    vp=v(i+1);
    ap=a(i+1);
```

```
end
```

```
end
```

newmark.m

```
function printMatrix(A,name)

fprintf('\n\n***** %s Matrix *****', name)
[M,N]=size(A);
for i=1:M
    fprintf('\n')
    for j=1:N
        fprintf(' %.3g', A(i,j))
    end
end

return
```

printMatrix.m

```
EDITOR PUBLISH VIEW
+ New Open Save Compare Print FILE
Go To Find Bookmark NAVIGATE
Refactor CODE
Profiler Analyze ANALYZE
1 clear
2
3 % Fortwsh epitaxynsewn edafoys
4 eq = load('kobeAccel');
5 t = eq(:,1);
6 ag = eq(:,2);
7
8 % k(i) stiffness of i-story
9 k(1)=1000e6;
10 k(2)=1000e6;
11 k(3)=1000e6;
12
13 % m(i) mass of i-floor
14 m(1)= 500e3 ;
15 m(2)= 500e3 ;
16 m(3)= 500e3 ;
17
18 % z(i) damping ratio of i-mode
19 z(1)= 0.05;
20 z(2)= 0.05;
21 z(3)= 0.05;
22
23 % N number of dynamic DOFs
24 N = length(k);
25
```

```
>> modalSuperposition
```

```
s =
```

```
    'inputData1'
```

```
Number of dynamic DOF: 3
```

```
***** Mass Matrix *****
```

```
5e+05  0  0  
0  5e+05  0  
0  0  5e+05
```

```
***** Stiffness Matrix *****
```

```
2e+09  -1e+09  0  
-1e+09  2e+09  -1e+09  
0  -1e+09  1e+09
```

```
Exoyn diabastei 2401 times epitaxynsewn edafoys ana 0.020 sec  
Megisth epitaxynsh edafoys = 8.06 m/sec^2 = 0.821 g sta 8.540 sec
```

Mode	Eigenperiod	Eigenfrequency	Cyclic Eigenfrequency
1	0.3157 sec	19.903 rad/sec	3.168 Hz
2	0.1127 sec	55.767 rad/sec	8.876 Hz
3	0.0780 sec	80.585 rad/sec	12.826 Hz

***** Modes *****

Mode-1: $f_1 * M * f_1 = 920583.198151$
 0.445042
 0.801938
 1.000000

Mode-2: $f_2 * M * f_2 = 1431468.330229$
 -1.246980
 -0.554958
 1.000000

Mode-3: $f_3 * M * f_3 = 4647948.471620$
 1.801938
 -2.246980
 1.000000

Mode-n	Ln	Mn	Gn = Ln/Mn	M*/Mtotal
1	+1123489.8019	920583.19815	+1.2204	+91.408 %
2	-400968.8679	1431468.33023	-0.2801	+7.488 %
3	+277479.0660	4647948.47162	+0.0597	+1.104 %

***** Xrisi Central Difference Method *****
 ***** Xrisi Central Difference Method *****
 ***** Xrisi Central Difference Method *****

***** Maximum values *****

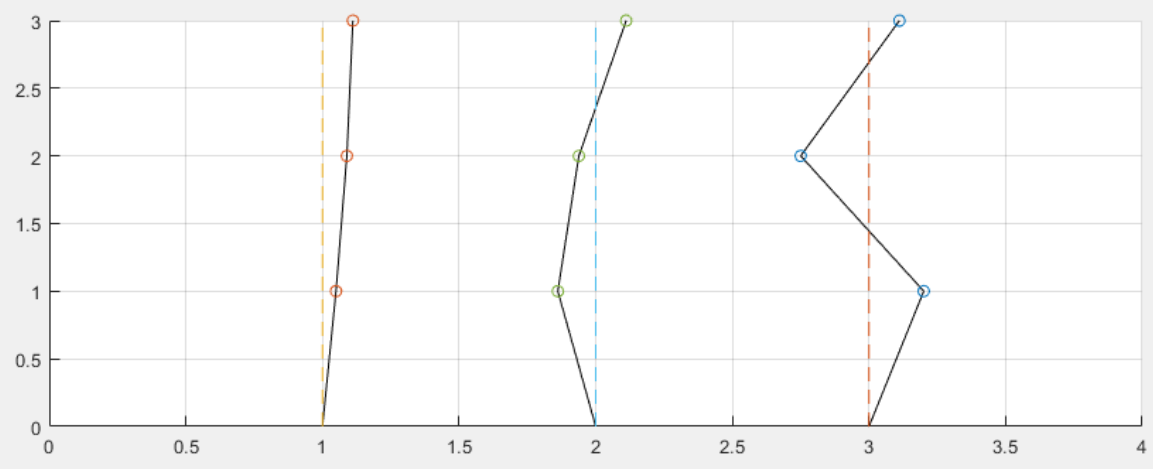
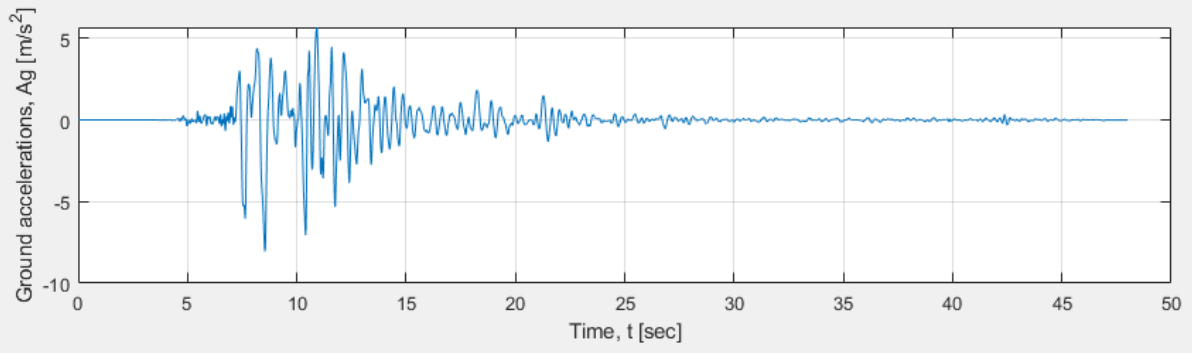
Floor Maximum interstory deflections

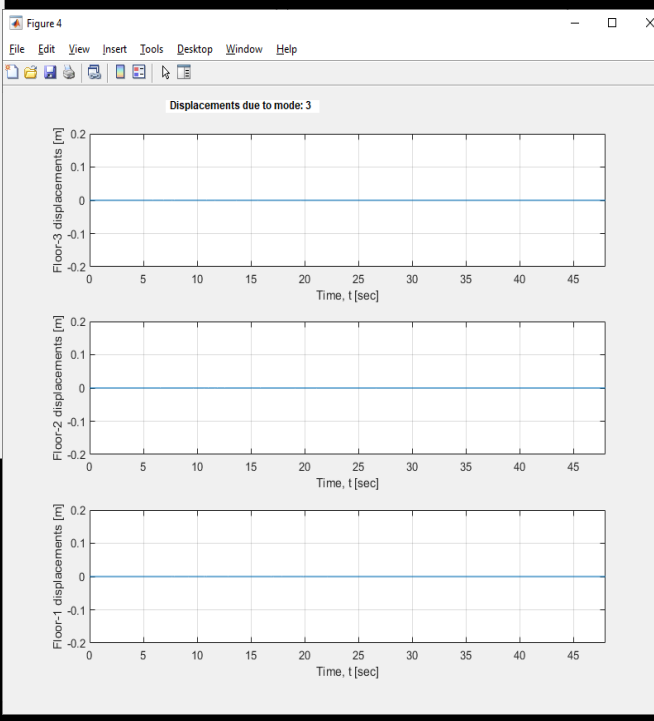
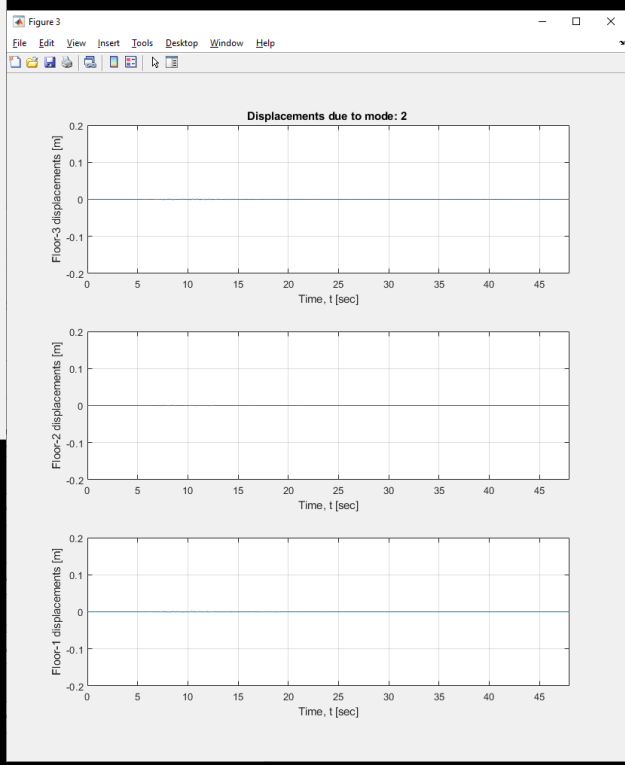
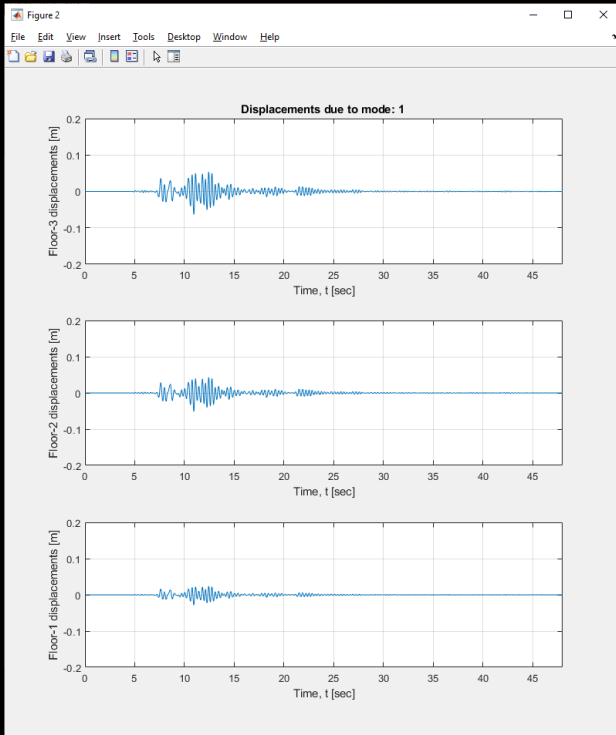
1	2.9194 cm
2	2.2093 cm
3	1.1844 cm

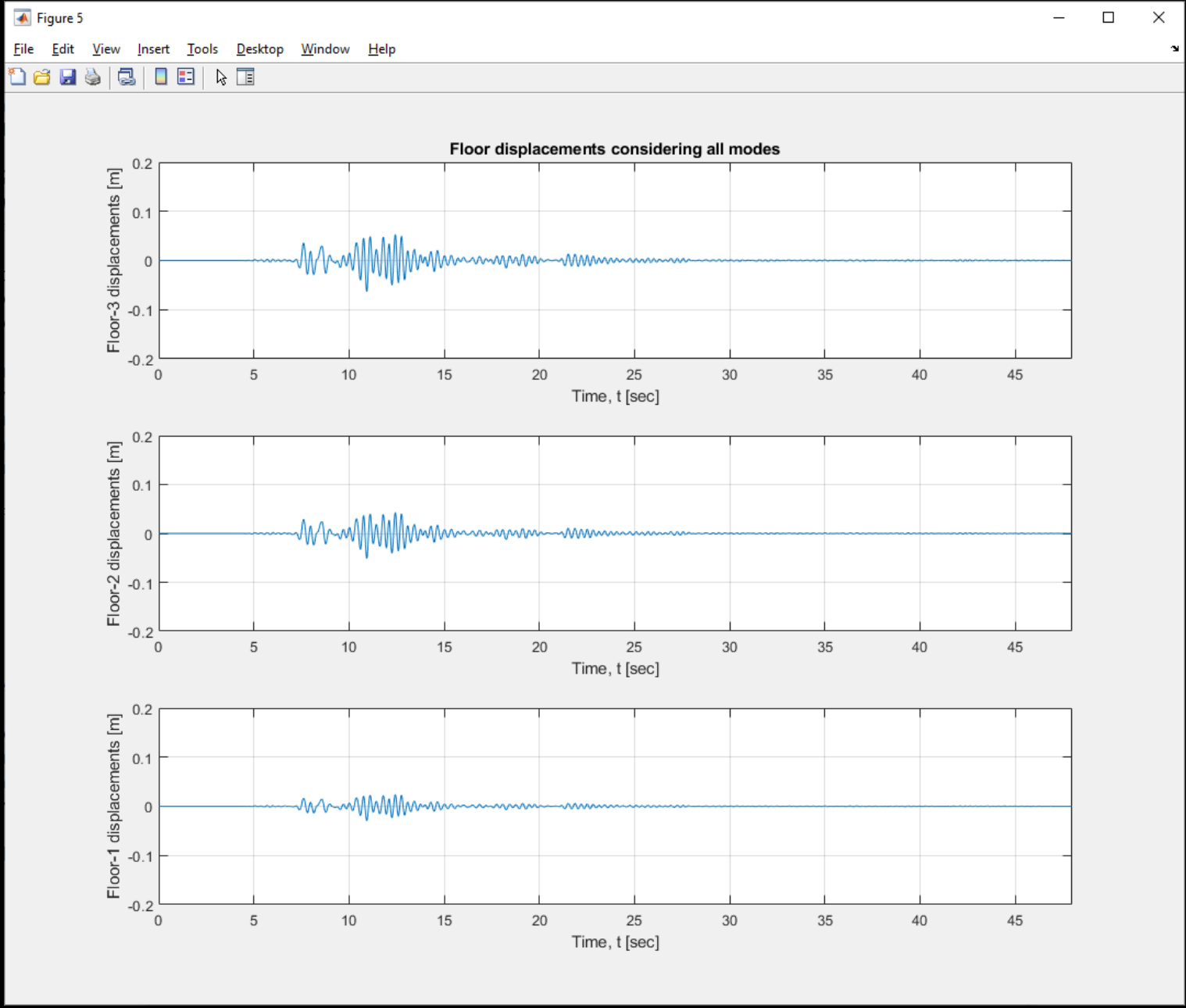
Floor Maximum absolute floor accelerations

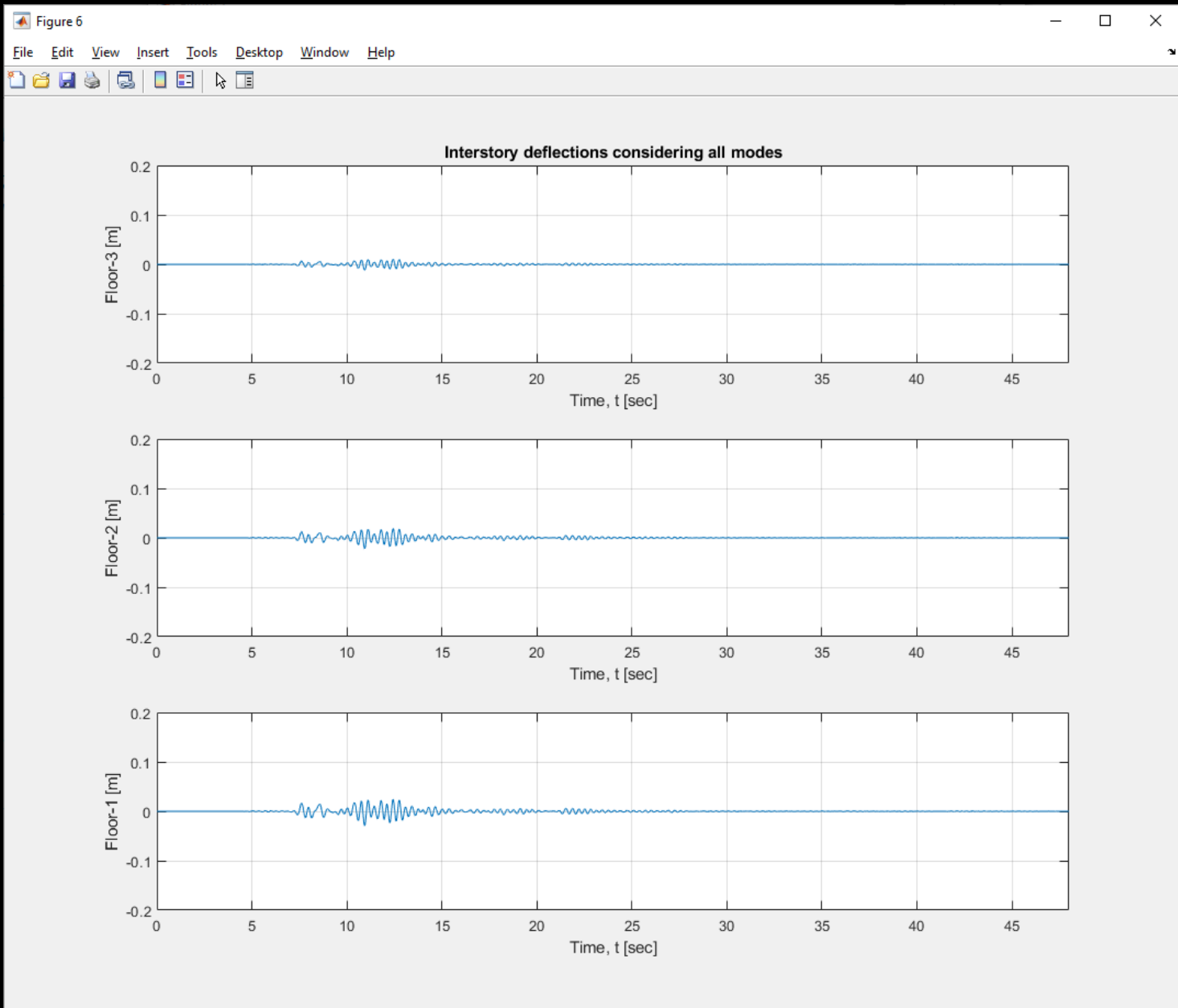
1	14.5068 m/sec ²
2	20.3360 m/sec ²
3	23.5133 m/sec ²

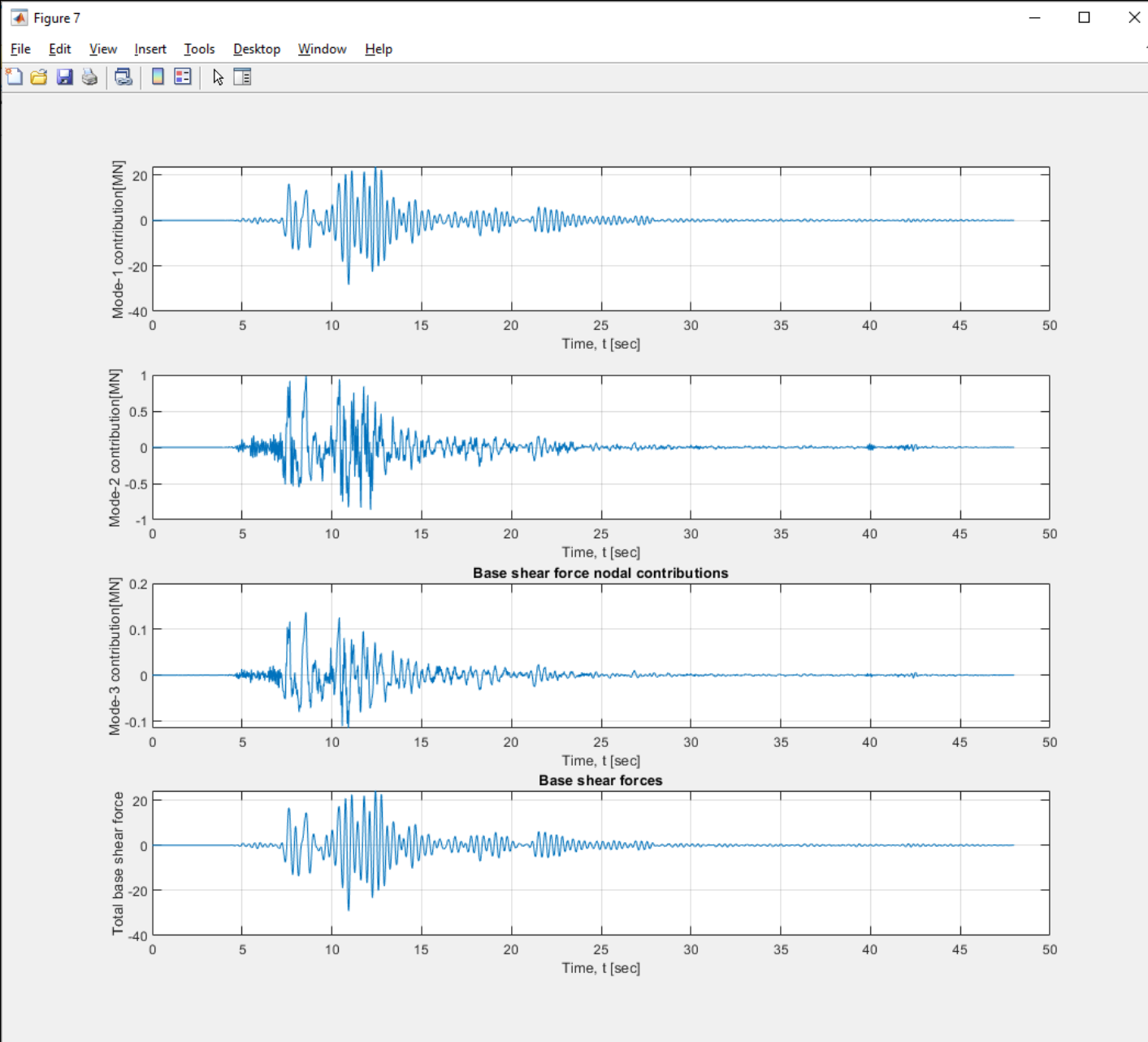
Maximum base shear force = 29.1938 MN











Απευθείας ολοκλήρωση των ΔΕ κίνησης

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{u}_g(t) = \underline{P}_{eff}(t)$$

- Εναλλακτικά της μεθόδου επαλληλίας, ή υπέρθεσης, των ιδιομορφών, το σύστημα των ΔΕ που χαρακτηρίζουν την κίνηση ενός ΠΒΣ μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά απευθείας χωρίς οποιοδήποτε μετασχηματισμό.
- Η επίλυση με την επαλληλία των ιδιομορφών απαιτεί κάποιους υπολογισμούς τόσο για την επίλυση του ιδιοπρόβληματος και τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών και ιδιομορφών, όσο και για τον μετασχηματισμό του συζευγμένου συστήματος ΔΕ σε ένα σύστημα ασύζευκτων ΔΕ που μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα.
- Όμως το συνολικό υπολογιστικό κόστος για την απευθείας επίλυση του συζευγμένου συστήματος ΔΕ, όπως θα δούμε πιο κάτω, είναι αρκετά σημαντικό, παρά το ότι ο προγραμματισμός του είναι σχετικά πολύ απλός.

- Επιπλέον, με τη μέθοδο της υπέρθεσης των ιδιομορφών μπορούν να ληφθούν μόνο κάποιες ιδιομορφές, περιορίζοντας περαιτέρω το υπολογιστικό κόστος.
- Περαιτέρω, η μέθοδος της υπέρθεσης των ιδιομορφών αξιοποιείται και στη φασματική ανάλυση, κατά την οποία δεν χρειάζεται καν να διενεργηθεί οποιαδήποτε δυναμική ανάλυση, εφόσον είναι διαθέσιμο το σχετικό φάσμα απόκρισης ή σχεδιασμού, βάσει του οποίου μπορούν να εκτιμηθούν οι μέγιστες αποκρίσεις της κατασκευής.
- Οι μέθοδοι που είχαμε δει για την αριθμητική ολοκλήρωση ΜΒΣ, στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούν να γενικευτούν για την κατευθείαν αριθμητική ολοκλήρωση των ΔΕ κίνησης, για αυτό και ονομάζονται Μέθοδοι Απευθείας Ολοκλήρωσης (Direct Integration Methods) αφού κανένας μετασχηματισμός των εξισώσεων δεν χρησιμοποιείται.
- Για την επίλυση ΠΒΣ, αντί απλών μεταβλητών και συντελεστών που έχουμε στα ΜΒΣ, στα συστήματα εξισώσεων που θα πρέπει να επιλυθούν υπάρχουν μητρώα και διανύσματα.

Μέθοδος κεντρικής διαφοράς για ΠΒΣ

Χρησιμοποιώντας τις εξής σχέσεις για τις ταχύτητες $\underline{\dot{u}}(t)$ και επιταχύνσεις $\underline{\ddot{u}}(t)$:

$$\underline{\dot{u}}(t) = \frac{\underline{u}(t + \Delta t) - \underline{u}(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t}$$

$$\underline{\ddot{u}}(t) = \frac{\underline{u}(t + \Delta t) - 2 \cdot \underline{u}(t) + \underline{u}(t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

και αντικαθιστώντας τις πιο πάνω σχέσεις στο σύστημα ΔΕ:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{P}(t)$$

προκύπτει η πιο κάτω μητρική σχέση:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right) \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \underline{P}(t) - \left(\underline{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \underline{M} \right) \cdot \underline{u}(t) - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} - \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right) \cdot \underline{u}(t - \Delta t)$$

Οι μόνοι άγνωστοι στην πιο πάνω σχέση είναι οι μετακινήσεις $\underline{u}(t + \Delta t)$ οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν από την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\underline{\hat{K}} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \underline{\hat{P}}(t)$$

$$\hat{\underline{K}} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \hat{\underline{P}}(t)$$

$$\text{όπου: } \hat{\underline{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \underline{C}$$

$$\hat{\underline{P}}(t) = \underline{P}(t) - \left(\underline{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \underline{M} \right) \underline{u}(t) - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} - \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right) \underline{u}(t - \Delta t)$$

Για να μπορεί να ξεκινήσει η μέθοδος, πρέπει να υπολογιστούν οι μετακινήσεις στη χρονική στιγμή $(-\Delta t)$ η οποία μπορεί να αποδειχτεί, βάσει των παραδοχών που έγιναν, ότι ισούται με:

$$\underline{u}(-\Delta t) = \underline{u}(0) - \Delta t \cdot \underline{\dot{u}}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \underline{\ddot{u}}(0)$$

Οι επιταχύνσεις στη χρονική στιγμή $t = 0$ μπορούν να υπολογιστούν από την αντίστοιχη εξίσωση κίνησης σε εκείνη τη χρονική στιγμή με δεδομένες τις αρχικές μετακινήσεις και ταχύτητες:

$$\underline{\ddot{u}}(0) = \underline{M}^{-1} \cdot (\underline{P}(0) - \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(0) - \underline{K} \cdot \underline{u}(0))$$

$$\underline{\hat{K}} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \underline{\hat{P}}(t)$$

Οι μετακινήσεις στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\underline{u}(t + \Delta t) = \underline{\hat{K}}^{-1} \cdot \underline{\hat{P}}(t)$$

Στην πράξη όμως δεν χρησιμοποιείται ο αντίστροφος πίνακας για τον υπολογισμό των μετακινήσεων γιατί έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Αντί της αντιστρόφου χρησιμοποιείται κάποια μέθοδος επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

Για να είναι ευσταθής η μέθοδος, πρέπει το χρονικό βήμα Δt της αριθμητικής ολοκλήρωσης να είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_{min}}{\pi} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

όπου T_{min} είναι η μικρότερη ιδιοπερίοδος και ω_{max} η μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα της κατασκευής.

Μέθοδος Newmark για ΠΒΣ

Η αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος ΔΕ με τη μέθοδο Newmark βασίζεται στις πιο κάτω προσεγγιστικές σχέσεις για τις ταχύτητες και μετακινήσεις των δυναμικών ΒΕ:

$$\underline{\dot{u}}(t + \Delta t) = \underline{\dot{u}}(t) + \frac{(\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t) + \underline{\ddot{u}}(t))}{2} \cdot \Delta t$$

$$\underline{u}(t + \Delta t) = \underline{u}(t) + \underline{\dot{u}}(t) \cdot \Delta t + \frac{\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t) + \underline{\ddot{u}}(t)}{2} \cdot \Delta t^2$$

Με δεδομένη τη λύση μέχρι τη χρονική στιγμή t , λύνοντας τη 2^η σχέση ως προς $\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t)$, το οποίο στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην 1^η σχέση, έχουμε δύο σχέσεις οι οποίες εκφράζουν τις ταχύτητες $\underline{\dot{u}}(t + \Delta t)$ και επιταχύνσεις, $\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t)$, συναρτήσει του $\underline{u}(t + \Delta t)$ και άλλα γενικά μεγέθη.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τις ταχύτητες $\underline{\dot{u}}(t + \Delta t)$ και επιταχύνσεις $\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t)$ στο σύστημα ΔΕ κίνησης για τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$\underline{M} \cdot \underline{\ddot{u}}(t + \Delta t) + \underline{C} \cdot \underline{\dot{u}}(t + \Delta t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \underline{P}(t + \Delta t)$$

Μετά από κάποιες πράξεις και διαχωρίζοντας τα άγνωστα μεγέθη από τα γνωστά, προκύπτει μια σχέση της μορφής:

$$\underline{\hat{K}} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \underline{\hat{P}}(t + \Delta t)$$

$$\hat{\underline{K}} \cdot \underline{u}(t + \Delta t) = \hat{\underline{P}}(t + \Delta t)$$

όπου: $\hat{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \cdot \underline{M} + a_1 \cdot \underline{C}$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{P}}(t + \Delta t) = & \underline{P}(t + \Delta t) + \underline{M} \cdot (a_0 \cdot \underline{u}(t) + a_2 \cdot \dot{\underline{u}}(t) + a_3 \cdot \ddot{\underline{u}}(t)) \\ & + \underline{C} \cdot (a_1 \cdot \underline{u}(t) + a_4 \cdot \dot{\underline{u}}(t) + a_5 \cdot \ddot{\underline{u}}(t)) \end{aligned}$$

όπου: $a_0 = \frac{4}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{2}{\Delta t}$, $a_2 = \frac{4}{\Delta t}$, $a_3 = a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = \frac{\Delta t}{2}$

Η συγκεκριμένη διατύπωση της Μεθόδου Newmark είναι γνωστή ως $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{4}$, η οποία διασφαλίζει ευστάθεια της μεθόδου χωρίς οποιουσδήποτε περιορισμούς στο χρονικό βήμα της ολοκλήρωσης.

Έτσι οι μετακινήσεις στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ μπορούν να υπολογιστούν σαν:

$$\underline{u}(t + \Delta t) = \hat{\underline{K}}^{-1} \cdot \hat{\underline{P}}(t + \Delta t)$$

Έτσι οι μετακινήσεις στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ μπορούν να υπολογιστούν σαν:

$$\underline{u}(t + \Delta t) = \underline{\hat{K}}^{-1} \cdot \underline{\hat{P}}(t + \Delta t)$$

Στη συνέχεια οι επιταχύνσεις και ταχύτητες σε χρόνο $t + \Delta t$ μπορούν να προσδιοριστούν από τις πιο κάτω σχέσεις:

$$\underline{\ddot{u}}(t + \Delta t) = a_0 \cdot (\underline{u}(t + \Delta t) - \underline{u}(t)) - a_2 \cdot \underline{\dot{u}}(t) - a_3 \cdot \underline{\ddot{u}}(t)$$

$$\underline{\dot{u}}(t + \Delta t) = \underline{\dot{u}}(t) + a_6 \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + a_7 \cdot \underline{\ddot{u}}(t + \Delta t)$$