

6. Ανασκόπηση Δυναμικής Ανάλυσης Μονοβαθμίων Συστημάτων (ΜΒΣ)

Εαρινό εξάμηνο 2024

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>

Θέματα

- Εισαγωγή στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών
- Ελεύθερη ταλάντωση
- Απόκριση σε αρμονικές διεγέρσεις
- Απόκριση σε βηματικές και γραμμικές διεγέρσεις
- Αριθμητικός υπολογισμός δυναμικής απόκρισης
- Σεισμικές διεγέρσεις και αποκρίσεις μονοβάθμιων ταλαντωτών
- Φάσματα απόκρισης και φάσματα σχεδιασμού
- *Εισαγωγή στην ανελαστική σεισμική απόκριση (προαιρετικό)*

Εισαγωγή

- Με τη στατική ανάλυση, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση μιας κατασκευής υπό στατικές φορτίσεις ή δράσεις, προσδιορίζοντας τα εντατικά μεγέθη και τις αντίστοιχες μετακινήσεις και παραμορφώσεις.
- Όταν το μέγεθος και ο ρυθμός επιβολής μιας δράσης προκαλεί σημαντικά αδρανειακά φορτία τότε απαιτείται δυναμική ανάλυση της κατασκευής, στην οποία θα πρέπει να συμπεριληφθούν και οι αδρανειακές δυνάμεις. Στη δυναμική ανάλυση, αντί των αλγεβρικών εξισώσεων στατικής ισορροπίας, διαφορικές εξισώσεις (ΔE) περιγράφουν την κίνηση (και απόκριση) μιας κατασκευής υπό δυναμική φόρτιση.
- Στον ελληνικό χώρο, η πιο σημαντική δυναμική φόρτιση για τις κατασκευές πολιτικού μηχανικού είναι οι σεισμικές διεγέρσεις του εδάφους θεμελίωσης, οι οποίες συνήθως είναι πιο κρίσιμες από τα στατικά επιβαλλόμενα φορτία, όπως το ιδιοβάρος και τα κινητά φορτία. Με τη δυναμική ανάλυση, που είναι ιδιαίτερα σημαντική για το σχεδιασμό και τη διαστασιολόγηση μιας κατασκευής, υπολογίζονται οι μετακινήσεις, τα εντατικά μεγέθη και άλλες ποσότητες και μεγέθη συναρτήσει του χρόνου.

Κατηγοριοποίηση προβλημάτων δυναμικής ανάλυσης

Βάσει βαθμών ελευθερίας

▪ Μονοβάθμια Συστήματα
(single degree of freedom)



▪ Πολυβάθμια Συστήματα
(Multi degree of freedom)



▪ Διακριτά: πεπερασμένος αριθμός ΒΕ

▪ Κατανεμημένα: άπειροι ΒΕ

Βάσει γραμμικότητας εξισώσεων

▪ Γραμμικά (linear)



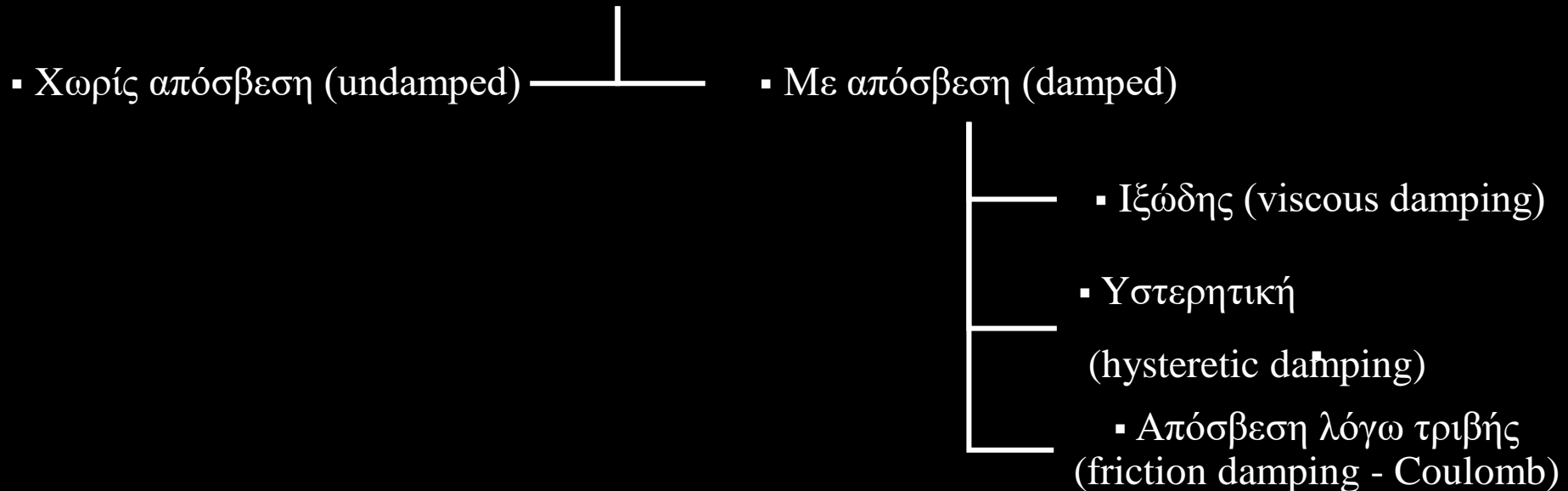
▪ Μη γραμμικά (nonlinear)



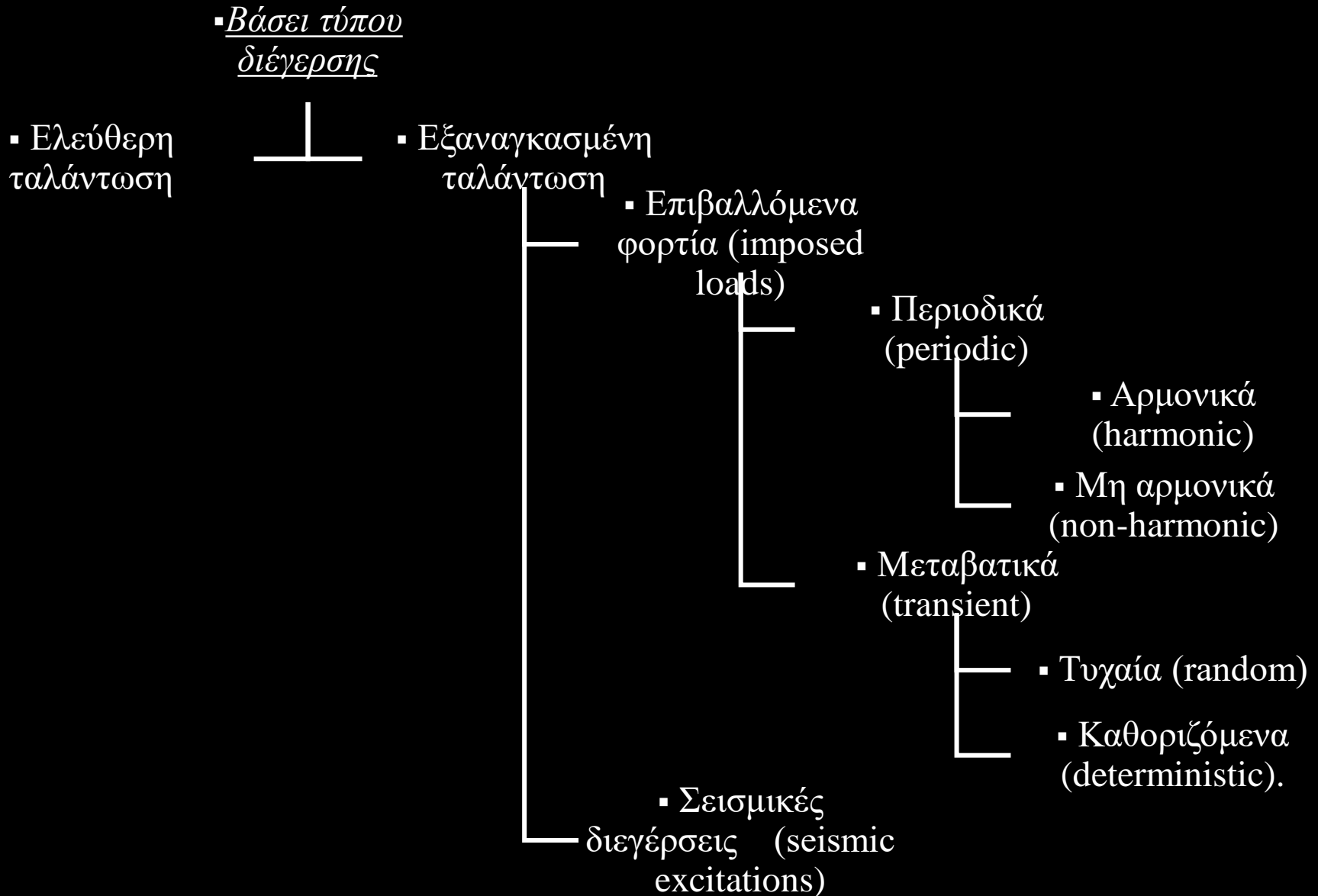
▪ Ελαστικά (elastic)
▪ Ανελαστικά (inelastic)

Κατηγοριοποίηση προβλημάτων δυναμικής ανάλυσης

▪ Βάσει δυνατότητας απόσβεσης ενεργείας

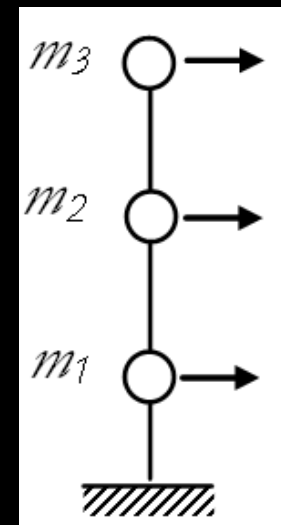
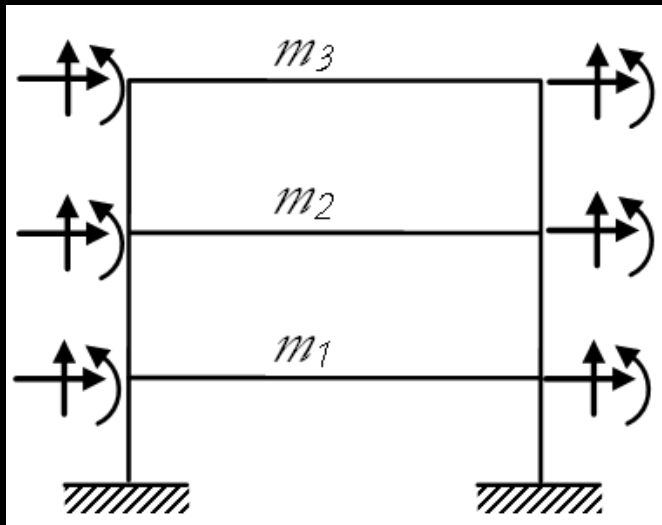


Κατηγοριοποίηση προβλημάτων δυναμικής ανάλυσης



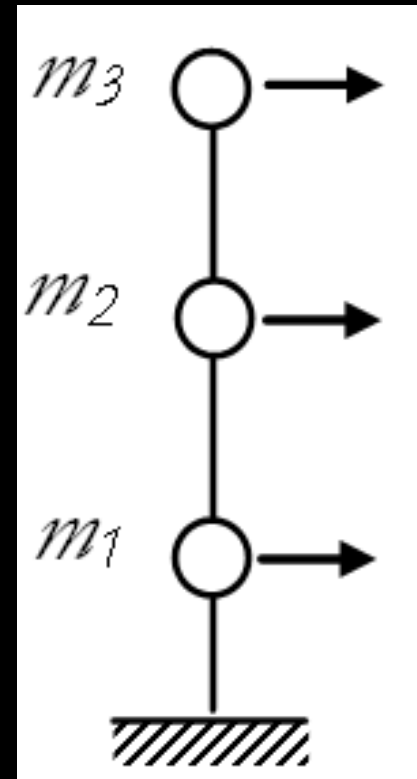
Στατικοί και δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας

- Εξετάζοντας ένα επίπεδο πλαίσιο, ο κάθε κόμβος στο επίπεδο έχει 3 ΒΕ, συγκεκριμένα 2 ΒΕ μετάθεσης και 1 ΒΕ στροφής.
- Θεωρώντας αμελητέες τις αξονικές παραμορφώσεις των υποστυλωμάτων μπορούμε να παραλείψουμε τις κατακόρυφες μεταθέσεις των κόμβων.
- Λαμβάνοντας υπόψη και την ακαμψία των πλακών και των οριζόντιων μελών, καθώς και τις μικρές σχετικά τιμές των στρωφικών ροπών αδρανείας, μπορούμε έτσι να παραλείψουμε και τις στρωφές καταλήγοντας σε 3 ΒΕ.



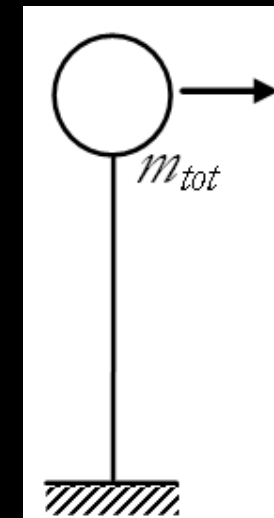
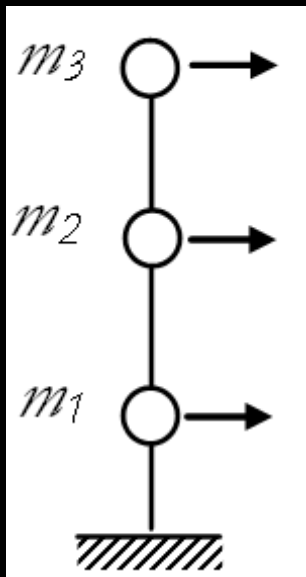
Συμπεριφορά διατμητικού προβόλου

- Αυτό το μοντέλο, το οποίο έχει τη **συμπεριφορά διατμητικού προβόλου**, έχει ένα βαθμό ελευθερίας σε οριζόντια μετακίνηση ανά όροφο και χρησιμοποιείται συχνά για την ανάλυση συμμετρικών σε κάτοψη κτιρίων χωρίς εκκεντρότητες.



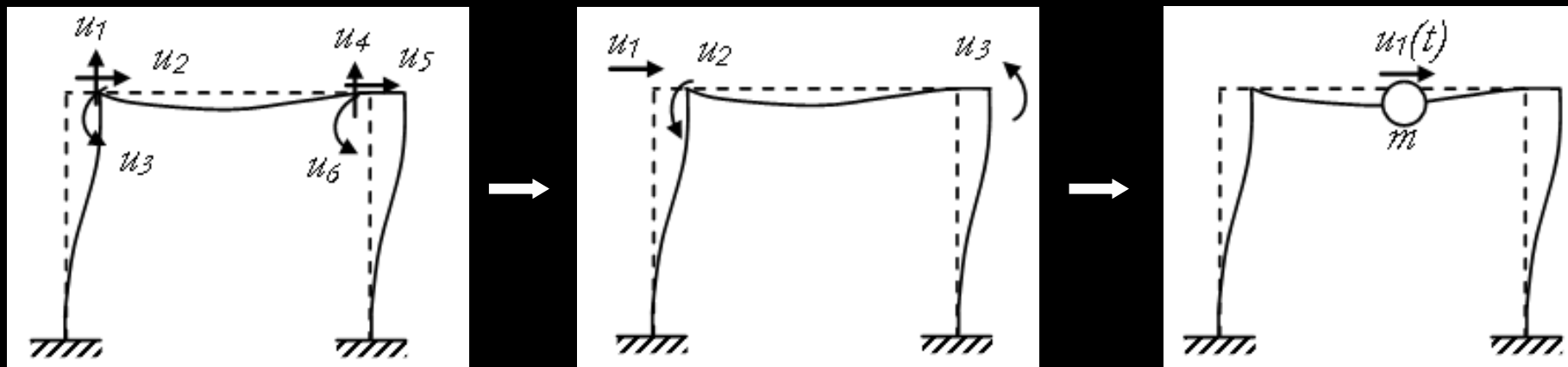
Μονοβάθμια Συστήματα (ΜΒΣ)

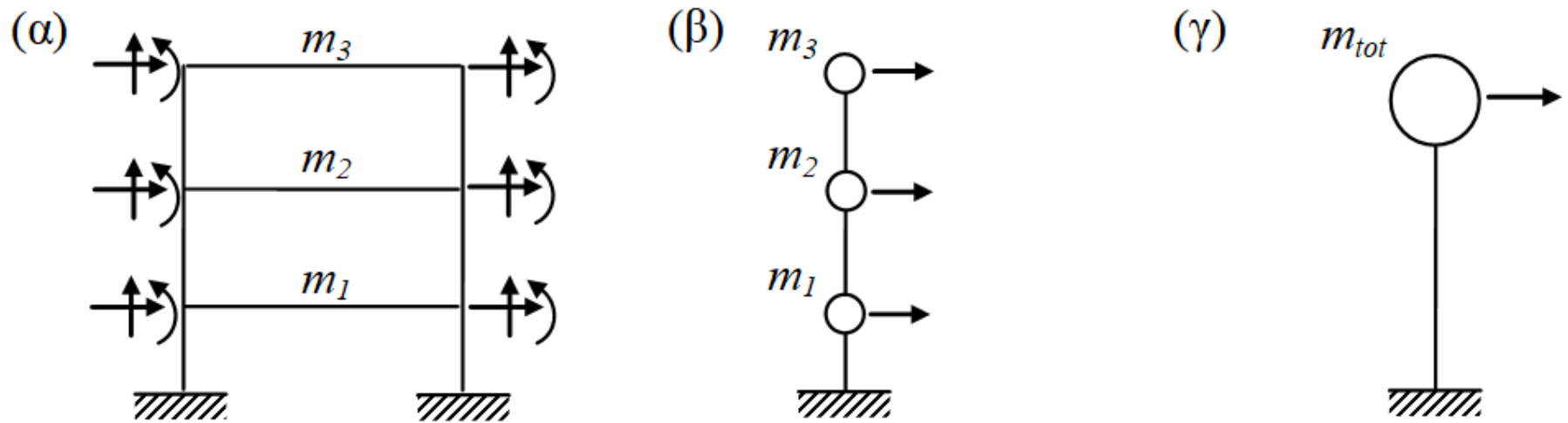
- Επιπλέον, σε κάποιες περιπτώσεις είναι ικανοποιητική η προσέγγιση ακόμη και με τη χρήση ενός μόνο ΒΕ για να πάρουμε μια πρώτη εκτίμηση των ισοδύναμων σεισμικών δυνάμεων.
- Έτσι, απαιτείται ο υπολογισμός της οριζόντιας δυσκαμψίας του ΜΒΣ, δηλαδή η δύναμη που πρέπει να επιβληθεί σε αυτό ώστε να έχουμε μοναδιαία οριζόντια μετακίνηση της μάζας του.



Στατικοί και δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας

- Οι στατικοί ΒΕ είναι, γενικά, περισσότεροι από τους δυναμικούς ΒΕ.
- Όπου υπάρχει δυνατότητα μετακινήσεων των κόμβων ενός φορέα, υπάρχουν αντίστοιχοι στατικοί ΒΕ.
- Αντιθέτως, για ένα δυναμικό ΒΕ, πέρα από τη δυνατότητα αξιόλογης μετακίνησης, πρέπει να υπάρχει και αντίστοιχη μάζα ή στροφική ροπή αδρανείας που να κινείται ή να στρέφεται σε αυτή τη μετακίνηση προκαλώντας τις αντίστοιχες αδρανειακές δυνάμεις, ώστε να πρέπει να συμπεριληφθεί στη δυναμική ανάλυση.

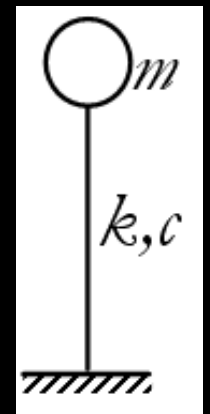
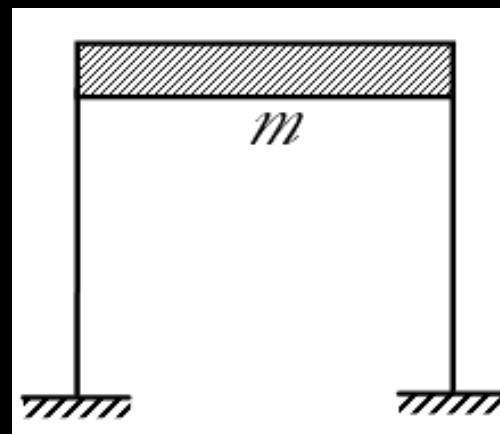
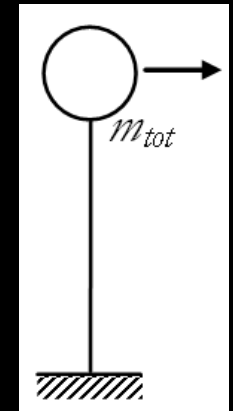
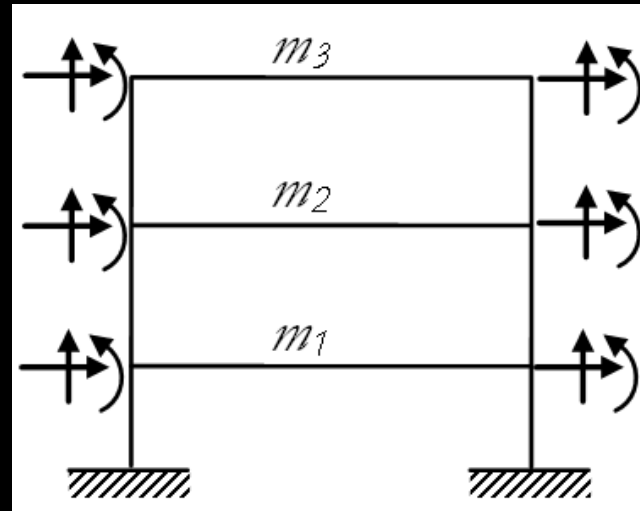




Σχήμα 11.1: Στατικοί και δυναμικοί ΒΕ: (α) 18 ΒΕ (β) ΠΒΣ με 3 ΒΕ (γ) ΜΒΣ.

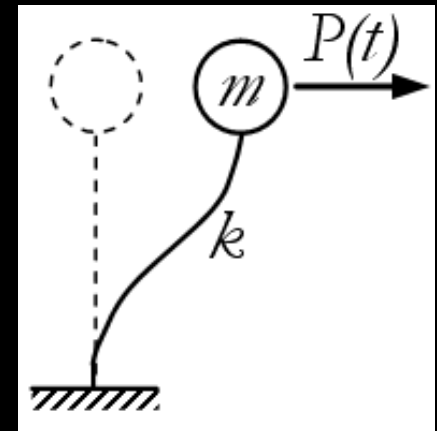
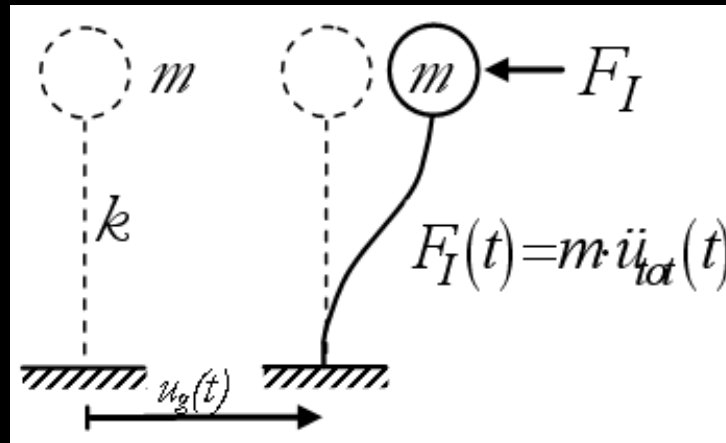
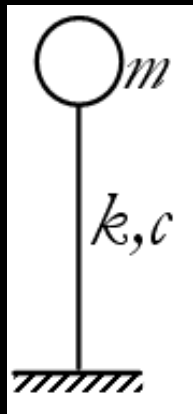
Μονοβάθμια συστήματα (ΜΒΣ)

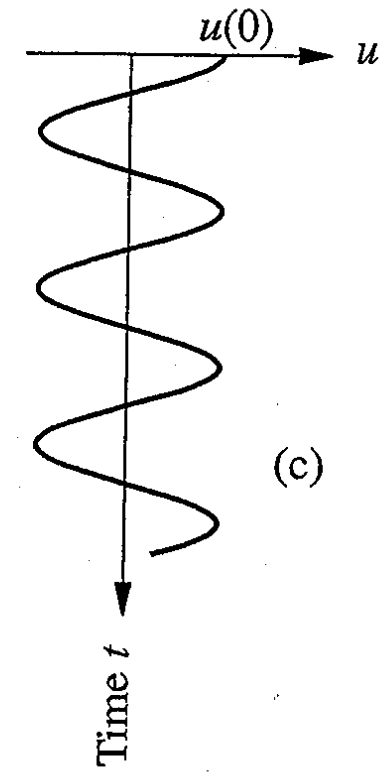
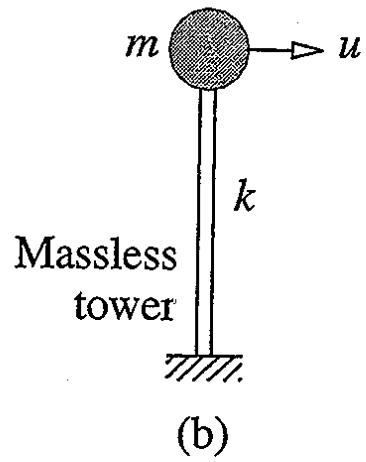
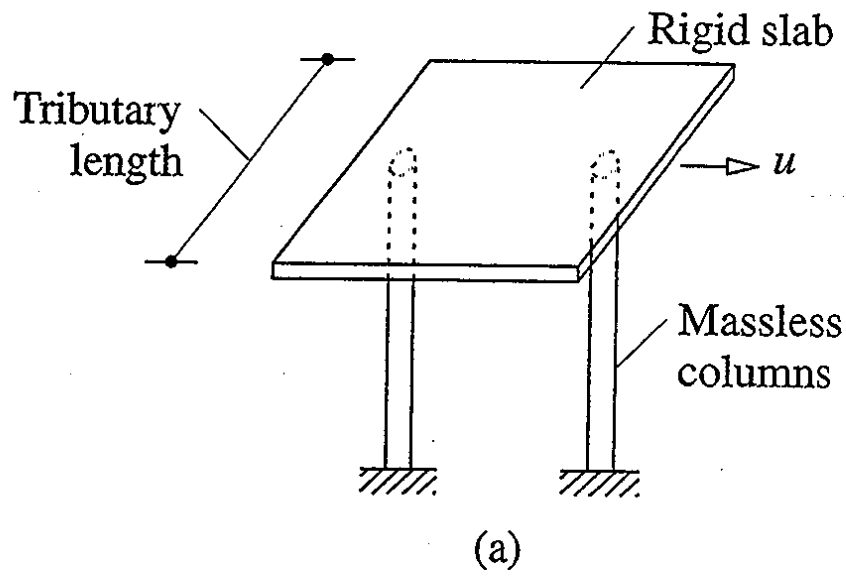
Κατά τη δυναμική ανάλυση, κάποιες κατασκευές μπορούν να εξιδανικευτούν σαν ΜΒΣ όταν τους επιβληθούν δυναμικά φορτία, ή υποβληθούν σε σεισμικές διεγέρσεις της βάσης τους.



Μονοβάθμια συστήματα (ΜΒΣ)

- Ένα τέτοιο ΜΒΣ έχει συγκεντρωμένη μάζα, m , στηριζόμενη σε μια αβαρή κατασκευή δυσκαμψίας, k , στην οριζόντια συνήθως διεύθυνση, και ενδεχομένως, κάποιο συντελεστή απόσβεσης, c , ο οποίος αντιπροσωπεύει τους διάφορους μηχανισμούς απόσβεσης ενέργειας





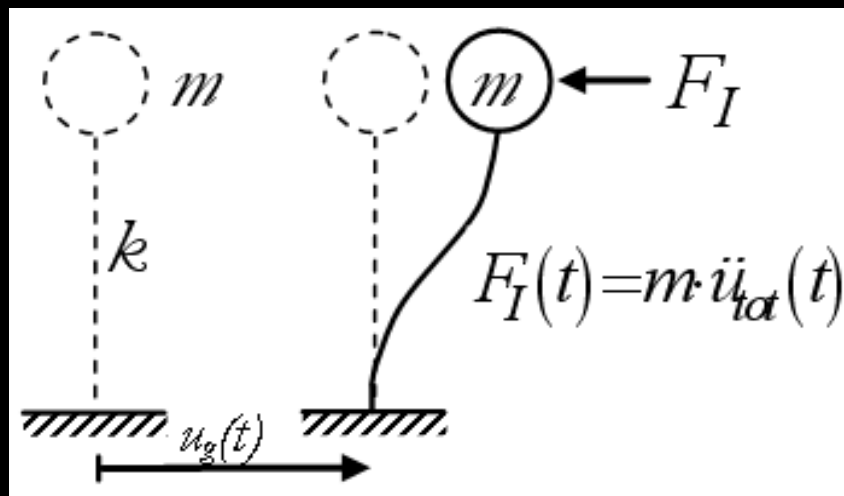
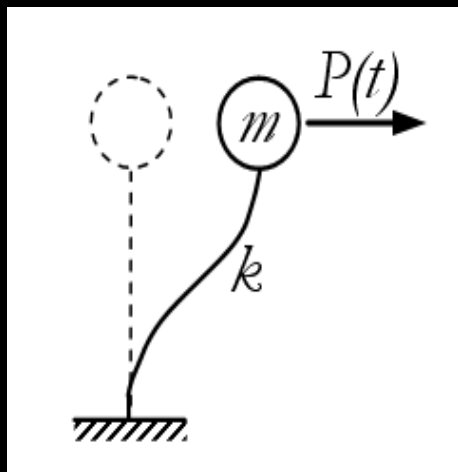
Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

Figure 1.1.3 (a) Idealized pergola; (b) idealized water tank; (c) free vibration due to initial displacement.

Αδρανειακές δυνάμεις

- Ένα δυναμικό πρόβλημα μπορούμε να το μελετήσουμε σαν ένα πρόβλημα δυναμικής ισορροπίας αντί σαν δυναμικό πρόβλημα, εξασκώντας πέρα από τις στατικές δυνάμεις την αδρανειακή δύναμη.
- Αυτή η αδρανειακή δύναμη αντιστοιχεί στο γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση, αλλά με αντίθετο πρόσημο από ότι η προκαλούμενη επιτάχυνση.
- Σύμφωνα με την αρχή *D'Alembert* :

$$F_I(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$$



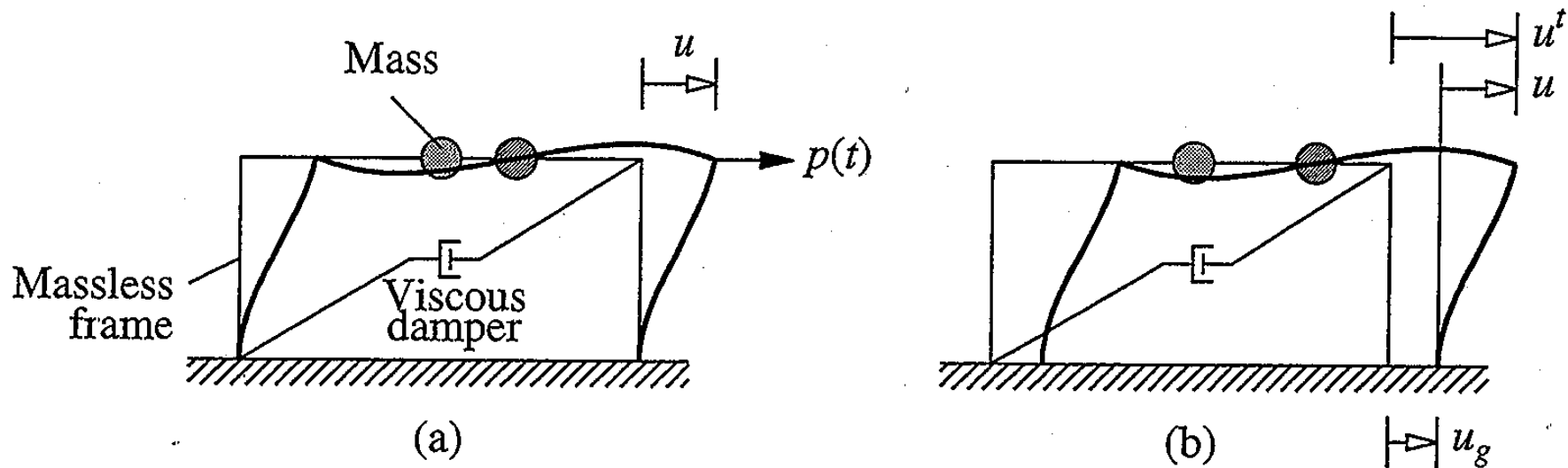


Figure 1.2.1 Single-degree-of-freedom system: (a) applied force $p(t)$; (b) earthquake-induced ground motion.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

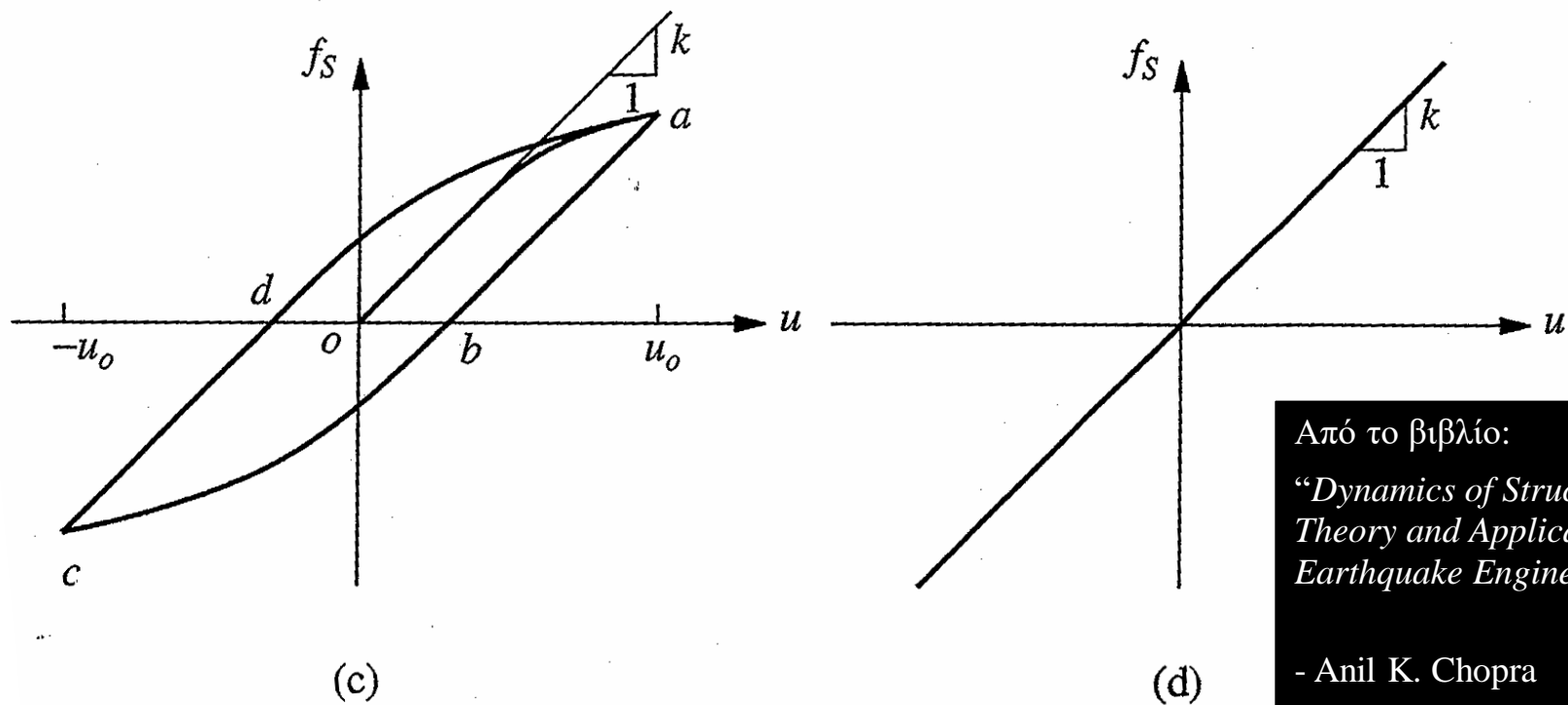
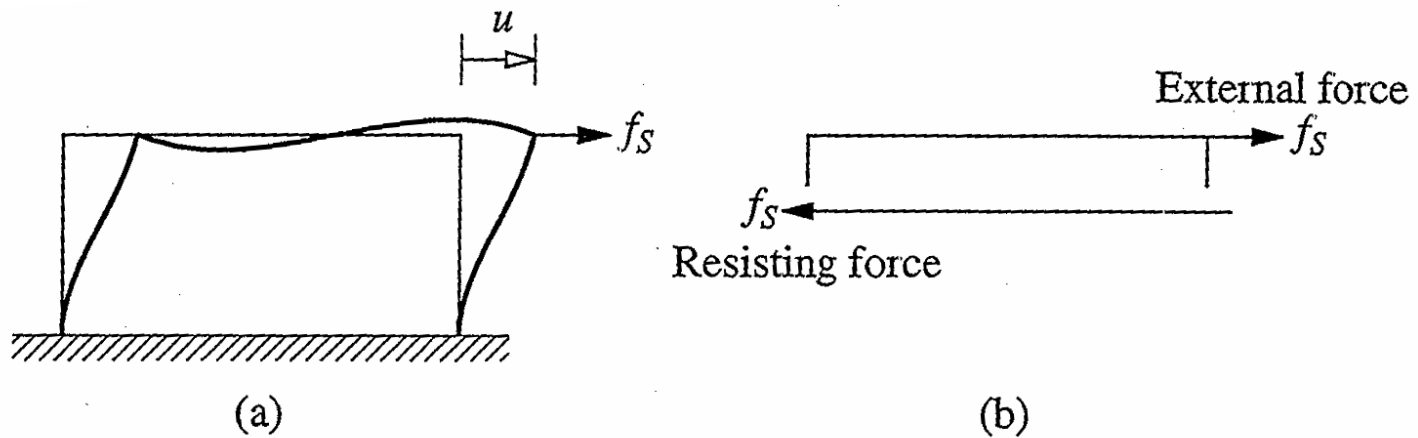
- Anil K. Chopra

Ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης

- Η σχέση δύναμης και μετακίνησης, μπορεί να προσδιορισθεί βάσει αρχών της στατικής ανάλυσης για γραμμικά ελαστική συμπεριφορά:

$$F_s = k \cdot u$$

όπου k είναι η οριζόντια δυσκαμψία του πλαισίου, η οποία εξαρτάται από τα μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τη συνδεσμολογία των δομικών στοιχείων του πλαισίου.



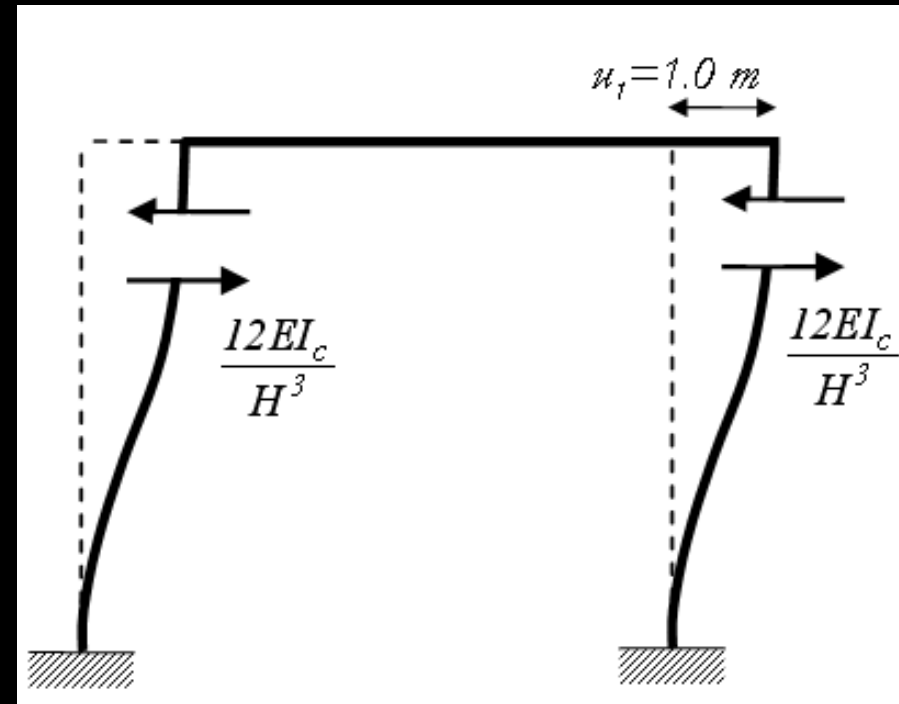
Από το βιβλίο:
*"Dynamics of Structures:
 Theory and Applications to
 Earthquake Engineering"*

- Anil K. Chopra

Figure 1.3.1

Ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης – απείρως άκαμπτη δοκός

- Μελετώντας ένα απλό πλαίσιο, με δύο υποστυλώματα, στην ακραία περίπτωση, η δοκός μπορεί να θεωρηθεί πλήρως απαραμορφώσιμη οριζόντια και τα υποστυλώματα αξονικά απαραμόρφωσιμα.

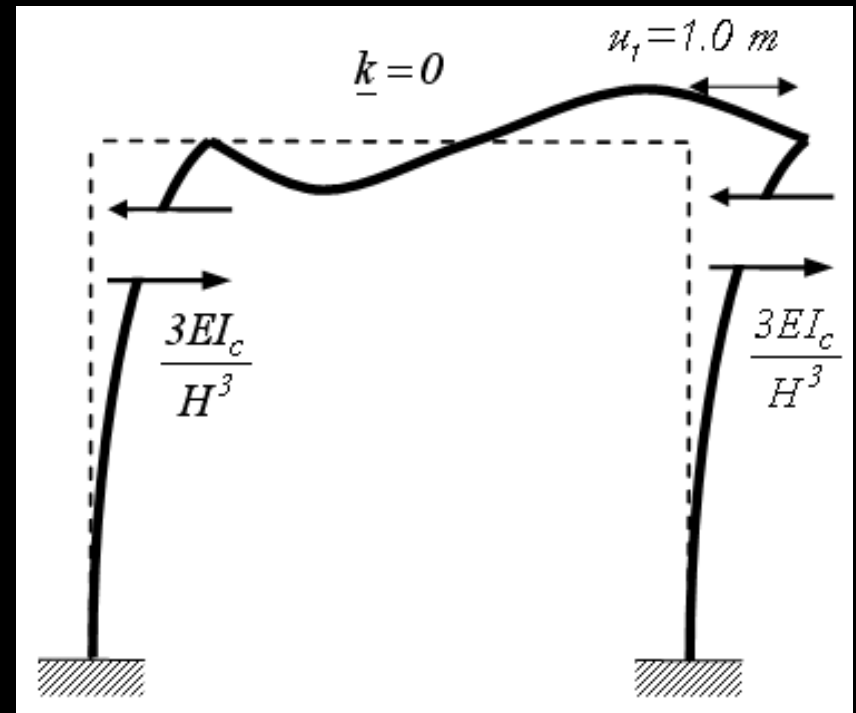


Σε αυτή την περίπτωση το μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας \underline{K}_H αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο, το οποίο συνδέει την οριζόντια μετάθεση του πλαισίου με την οριζόντια δύναμη. Έτσι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η οριζόντια δοκός είναι τελείως άκαμπτη, $EI_b = \infty$ και να υπολογίσουμε την οριζόντια δυσκαμψία \underline{K}_H ως:

$$\underline{K}_H = K_H = 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I_c}{H^3} = \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3}$$

Ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης – απείρως εύκαμπτη δοκός

- Στην αντίθετη ακραία περίπτωση όπου η δοκός θεωρείται πλήρως εύκαμπτη, τα υποστυλώματα παραμορφώνονται σαν πρόβολοι.

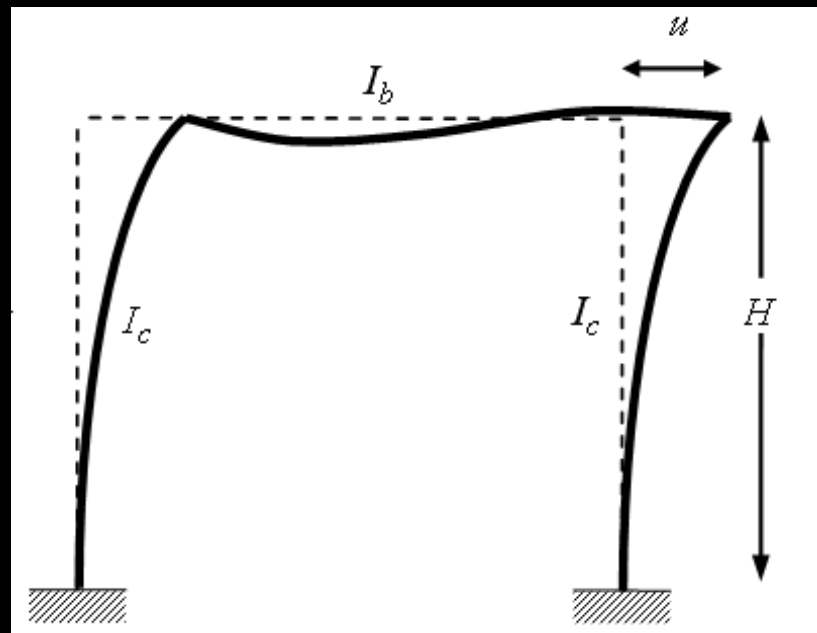


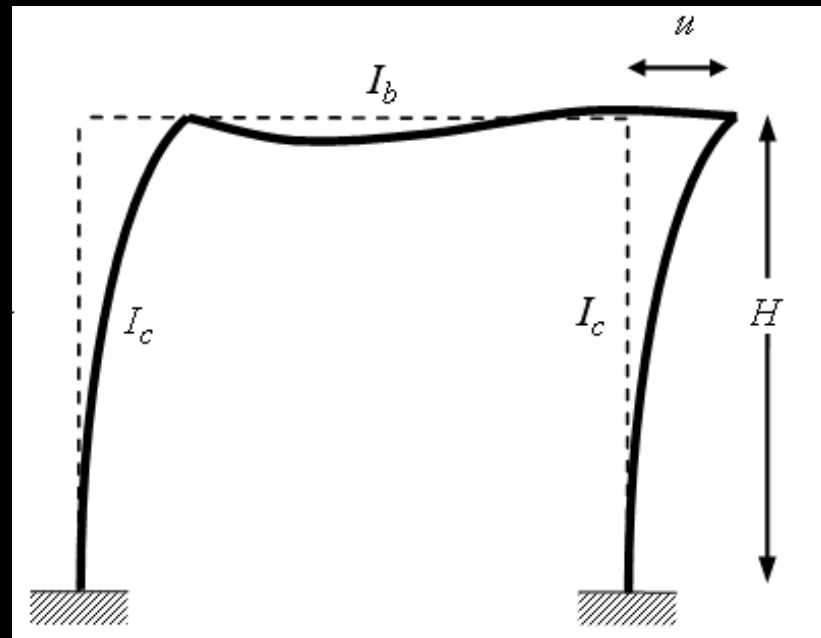
Στην άλλη ακραία περίπτωση θα μπορούσε η δοκός να θεωρηθεί με μηδενική δυσκαμψία, $EI_b = 0$ (τελείως εύκαμπτη), οπότε η οριζόντια δυσκαμψία \underline{K}_H ισούται με:

$$\underline{K}_H = K_H = 2 \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I_c}{H^3} = \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^3}$$

Ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης – πραγματικού πλαισίου

- Στην πραγματικότητα όμως η οριζόντια δυσκαμψία του πλαισίου, κυμαίνεται μεταξύ των δύο πιο πάνω ακραίων τιμών, αφού η δοκός δεν είναι ούτε πλήρως άκαμπτη αλλά ούτε πλήρως εύκαμπτη. Αντιθέτως, έχει συγκεκριμένη δυσκαμψία βάσει της οποίας μπορεί να υπολογισθεί η οριζόντια δυσκαμψία του πλαισίου λαμβάνοντας υπόψη και την σχετική δυσκαμψία των υποστυλωμάτων.





$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{H} + \frac{4 \cdot E \cdot I_b}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I_b}{L} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_b}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{H} + \frac{4 \cdot E \cdot I_b}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Αν γνωρίζουμε ότι μόνο οριζόντια δύναμη ασκείται σαν εξωτερικό φορτίο και ότι οι επικόμβιες ροπές είναι μηδενικές $R_2 = R_3 = 0$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις στροφές u_2, u_3 συναρτήσει της μετάθεσης u_1 με χρήση του συμπυκνωμένου μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής. Το στοιχείο \underline{K} , εκφράζει την οριζόντια δυσκαμψία του πλαισίου από την οποία, με δεδομένο το οριζόντιο φορτίο μπορεί να υπολογισθεί η οριζόντια μετάθεση του πλαισίου.

Για πλαίσιο όπου $I_b = \frac{2}{3}I_c$ και $L = 2H$, το συμπυκνωμένο μητρώο \underline{K} είναι:

$$\begin{bmatrix} \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{16 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} & \frac{2 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} & \frac{16 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{16 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} & \frac{2 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} & \frac{16 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων απομονώνουμε τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{3 \cdot H} & \frac{2}{3 \cdot H} \\ \frac{2}{3 \cdot H} & \frac{16}{3 \cdot H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{6}{H^2} \\ \frac{6}{H^2} \end{bmatrix} \cdot u_1$$

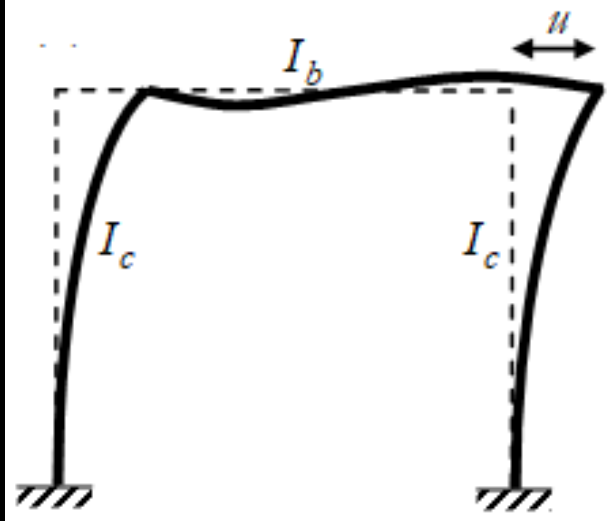
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{16}{3 \cdot H} & \frac{2}{3 \cdot H} \\ \frac{2}{3 \cdot H} & \frac{16}{3 \cdot H} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{H^2} \\ \frac{6}{H^2} \end{bmatrix} \cdot u_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_1$$

Αντικαθιστώντας την πιο πάνω σχέση στην πρώτη εξίσωση του συστήματος εξισώσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \cdot u_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} & \frac{6 \cdot E \cdot I_c}{H^2} \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u_1 + \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \cdot u_1 = \left(\frac{12 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \right) \cdot u_1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, αν αυτή καταπονείται με φορτίο στην οριζόντια διεύθυνση, είναι:

$$\underline{K}_H = \left(\frac{12 \cdot E \cdot I_c}{H^3} \right)$$



Μηχανισμοί και δυνάμεις απόσβεσης

Υποβάλλοντας ένα μονοβάθμιο σύστημα (ΜΒΣ) σε ελεύθερη ταλάντωση παρατηρούμε ότι, αντί να ταλαντώνεται επ' άπειρο, το εύρος της ταλάντωσης μειώνεται σταδιακά μέχρι να φθάσει στο μηδέν, οπότε το ΜΒΣ παραμένει ακίνητο στην αρχική θέση ισορροπίας.

Το γεγονός αυτό οφείλεται στην απόσβεση ενέργειας λόγω διάφορων μηχανισμών απορρόφησης ενέργειας, οι οποίοι εξαρτώνται από το υλικό, τη γεωμετρία και συνδεσμολογία των δομικών στοιχείων της κατασκευής.

Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιείται η ιξώδης απόσβεση υπό τη μορφή ενός γραμμικού ιξωδοαποσβεστήρα, ο οποίος αντιπροσωπεύει προσεγγιστικά όλους τους μηχανισμούς απόσβεσης στην κατασκευή.

Η δύναμη απόσβεσης, F_D , συνδέεται γραμμικά με τη σχετική ταχύτητα, $\dot{u}(t)$, μέσω του συντελεστή ιξώδους απόσβεσης, c :

$$F_D = c \cdot \dot{u}(t)$$

Συντελεστής ιξώδους απόσβεσης, c

$$F_D = c \cdot \dot{u}(t)$$

- Ο συντελεστής ιξώδους απόσβεσης c , ο οποίος έχει μονάδες $N \cdot sec/m$ δεν μπορεί να υπολογιστεί από τα μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός κτιρίου, γι' αυτό και η τιμή του εκτιμάται εμμέσως με πειραματικούς μεθόδους, μέσω της εκτίμησης του λόγου (ή ποσοστού) απόσβεσης ξ .

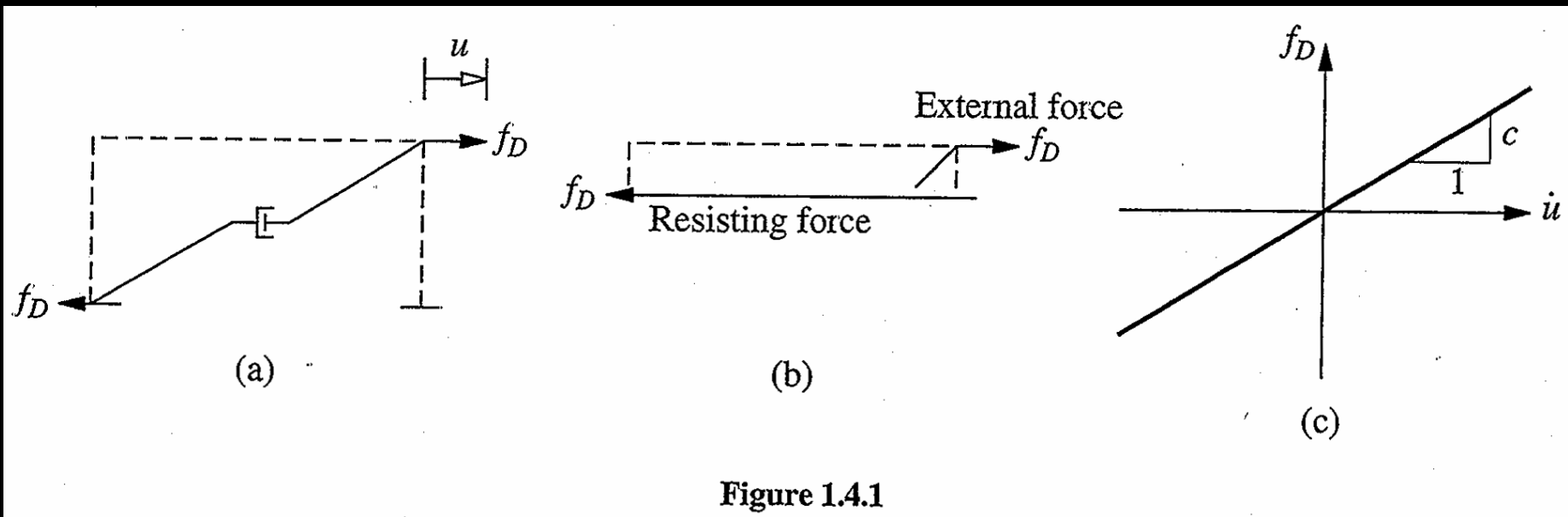


Figure 1.4.1

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

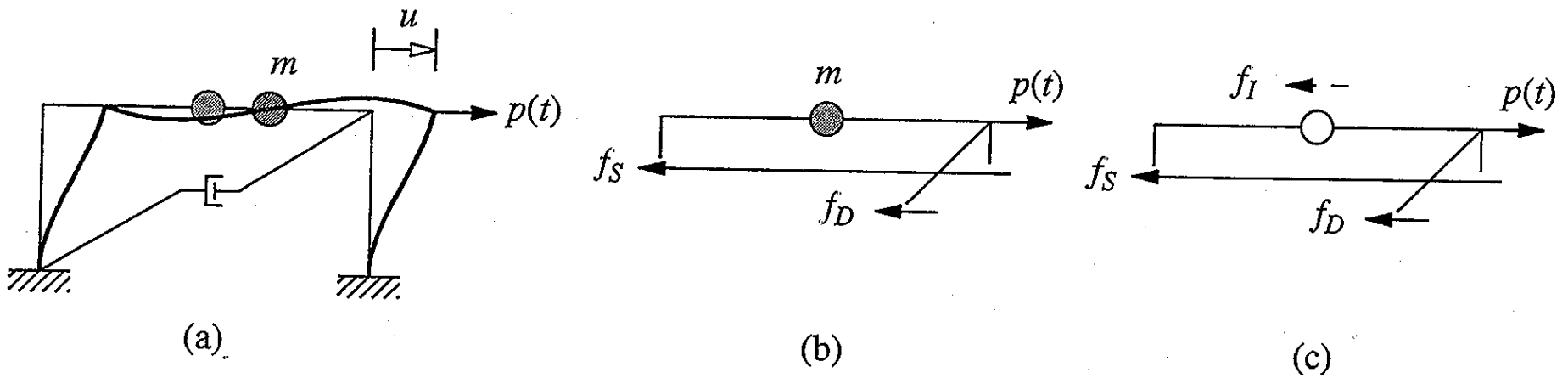


Figure 1.5.1

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

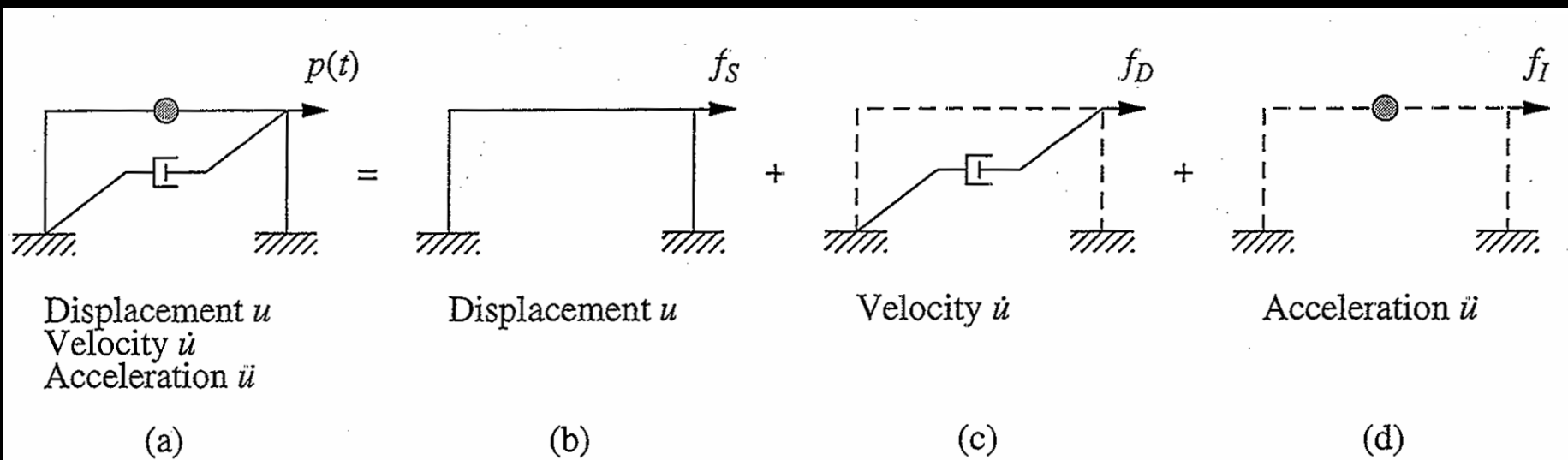


Figure 1.5.2 (a) System; (b) stiffness component; (c) damping component; (d) mass component.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

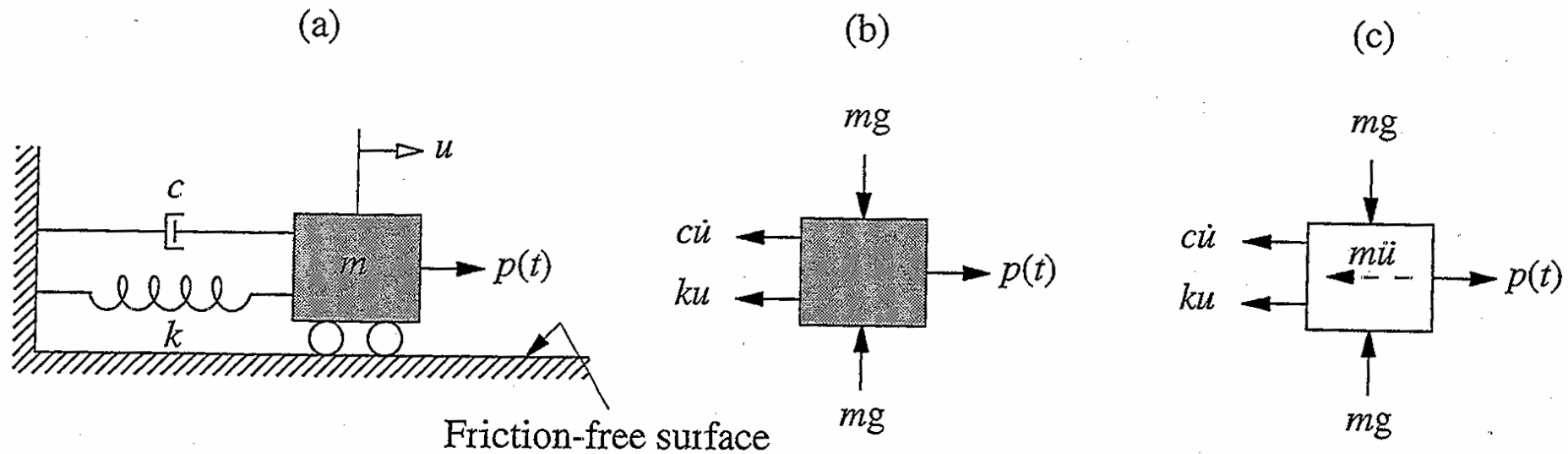


Figure 1.6.1 Mass-spring-damper system.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

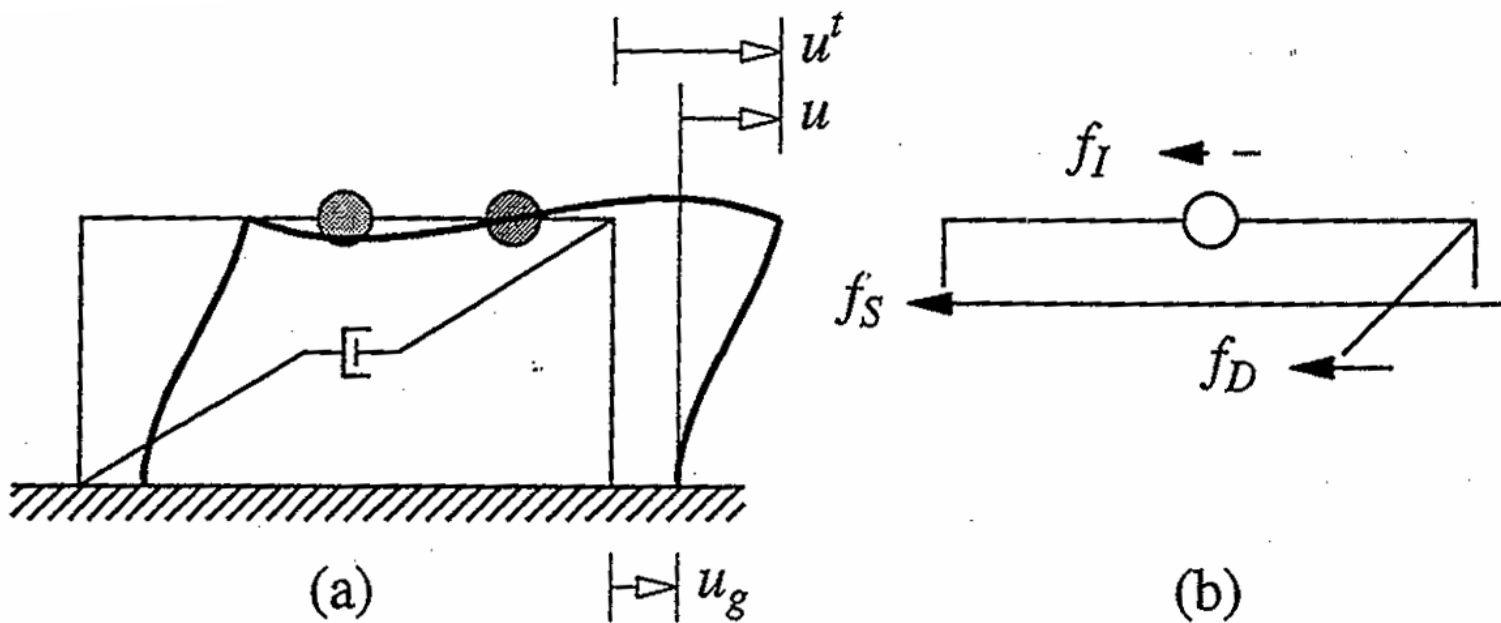


Figure 1.7.1

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

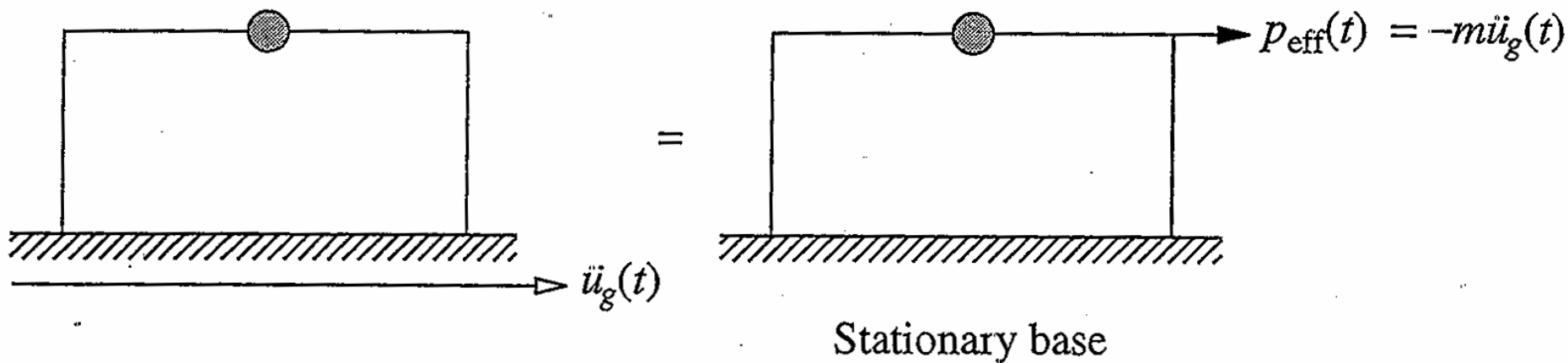


Figure 1.7.2 Effective earthquake force: horizontal ground motion.

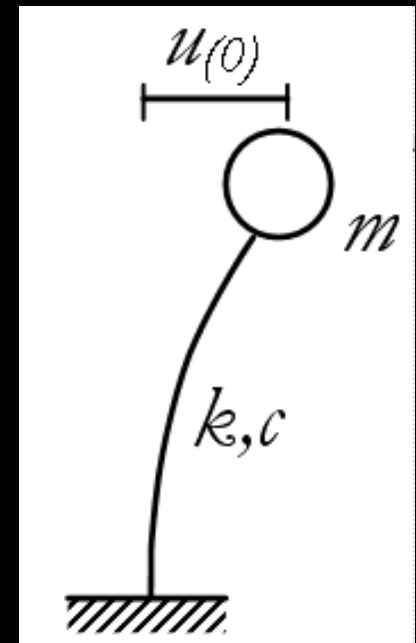
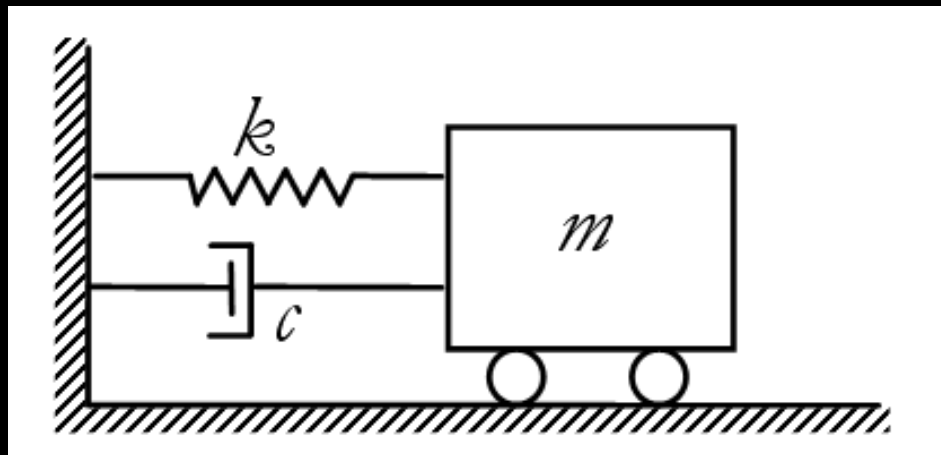
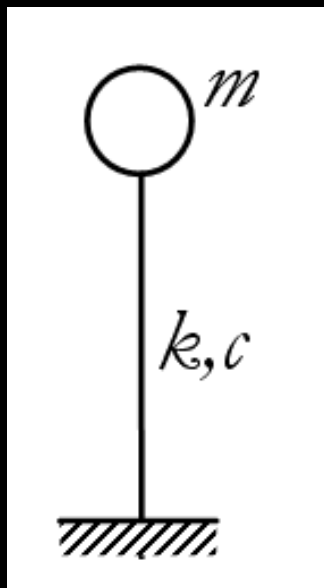
Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

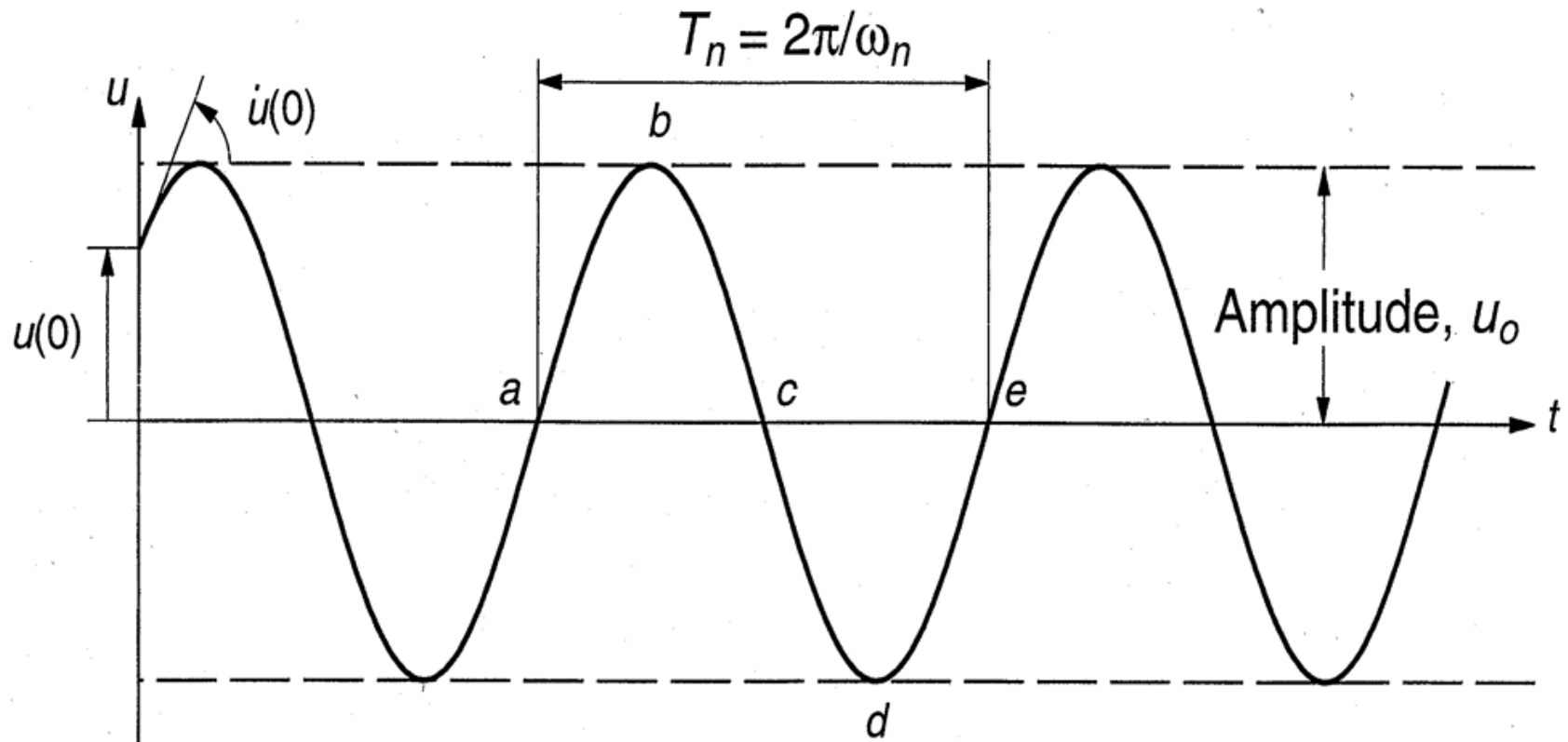
- Anil K. Chopra

Ελεύθερη ταλάντωση ΜΒΣ

- Ένα ΜΒΣ εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση όταν εκτραπεί κατά μια αρχική μετακίνηση $u(0)$ ή ταχύτητα $\dot{u}(0)$ από τη θέση ισορροπίας και ακολούθως αφεθεί ελεύθερο να ταλαντωθεί χωρίς να ασκείται σε αυτό οποιαδήποτε εξωτερική δράση.



Free vibration of a system without damping



Από το βιβλίο:
 “Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

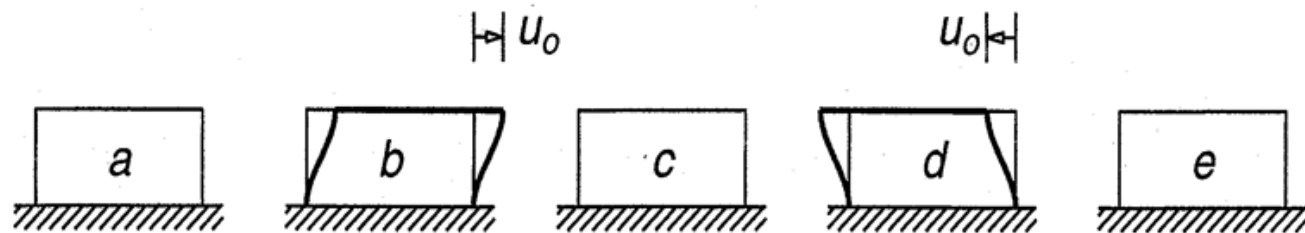


Figure 2.1.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Ελεύθερη ταλάντωση ΜΒΣ χωρίς απόσβεση

Η ελεύθερη ταλάντωση ενός ΜΒΣ με μάζα, m , και δυσκαμψία, k , χωρίς απόσβεση, χαρακτηρίζεται από την πιο κάτω ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (ΔΕ) 2^{ας} τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

Η γενική λύση αυτής της ΔΕ προσδιορίζεται αφού ληφθούν υπόψη και οι επιβαλλόμενες αρχικές συνθήκες $u(0)$ και $v(0) = \dot{u}(0)$:

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

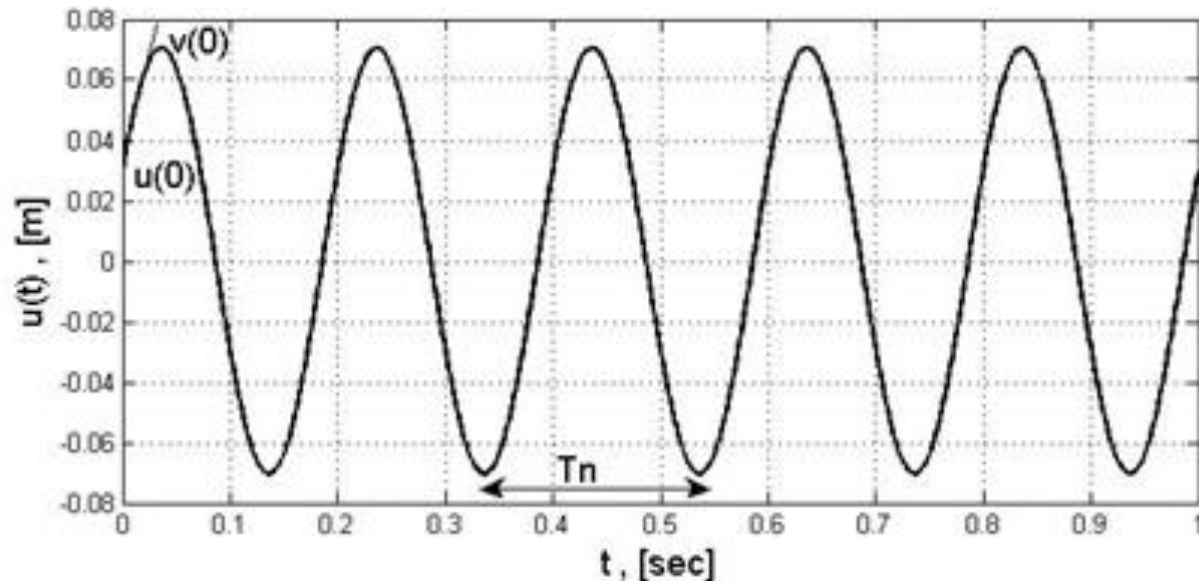
όπου $\omega_n = \sqrt{k/m}$ είναι η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του ΜΒΣ, σε μονάδες rad/sec.

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

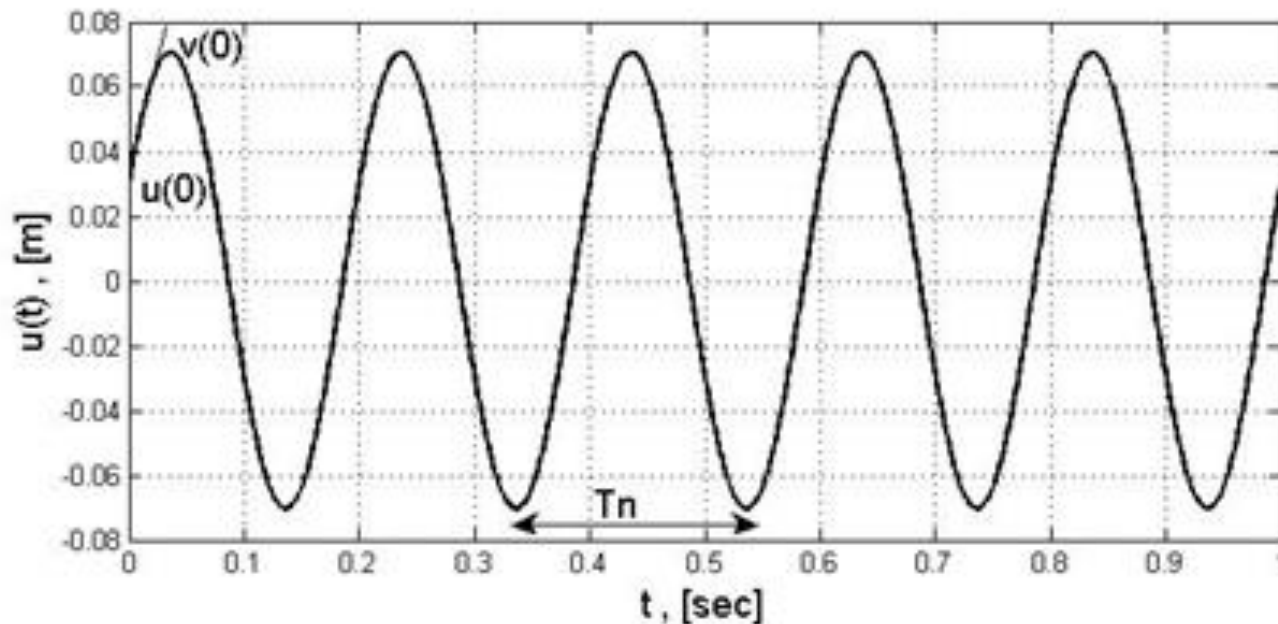
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Σχεδιάζοντας τη σχετική μετακίνηση $u(t)$ συναρτήσει του χρόνου t , παρατηρούμε ότι το ΜΒΣ ταλαντώνεται γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας με περίοδο επανάληψης ίση με $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$, η οποία είναι η ιδιοπερίοδος του ΜΒΣ με μονάδες μέτρησης τα δευτερόλεπτα.



Το αντίστροφο της ιδιοπεριόδου T_n είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα $f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$

με μονάδες μέτρησης τα Hertz (Hz) τα οποία είναι κύκλοι/δευτερόλεπτο. Σε κάθε κύκλο ταλάντωσης, το εύρος της ταλάντωσης, δηλαδή η μέγιστη σχετική μετακίνηση, παραμένει το ίδιο, καθώς η ταλάντωση συνεχίζεται θεωρητικά επ' άπειρο.



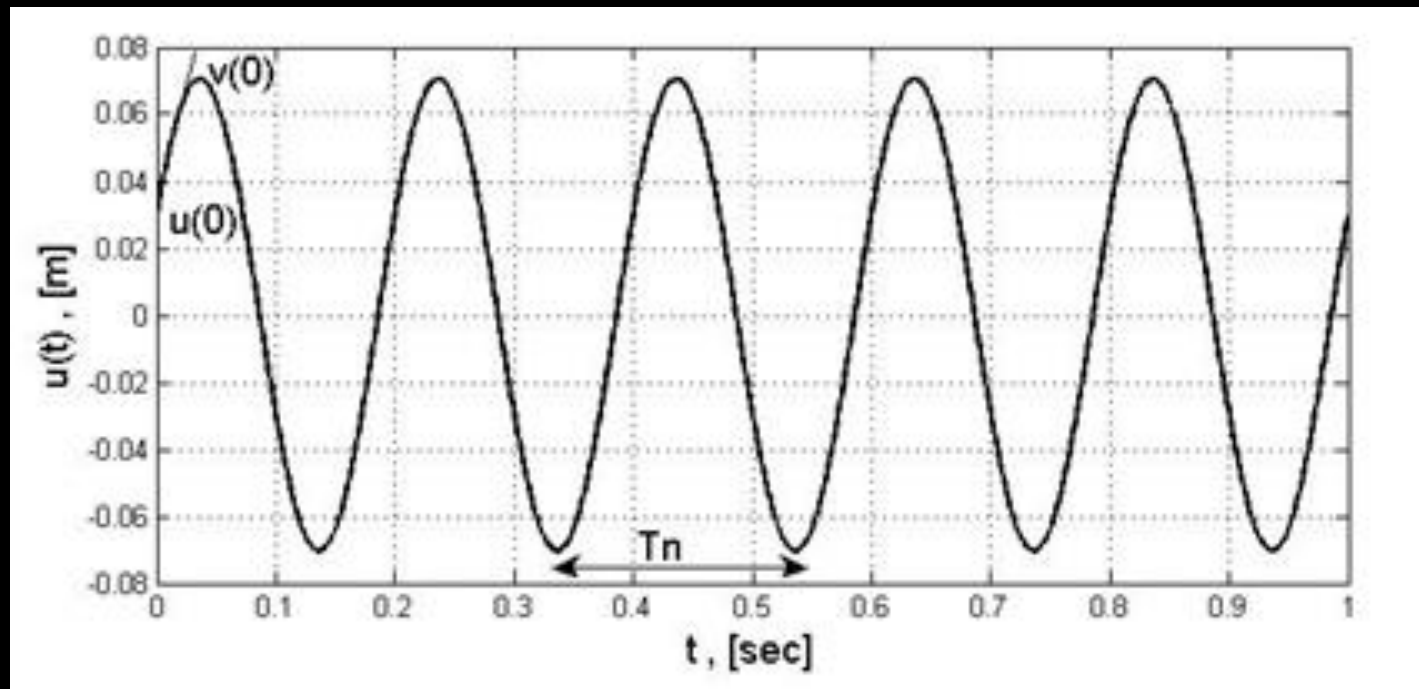
$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

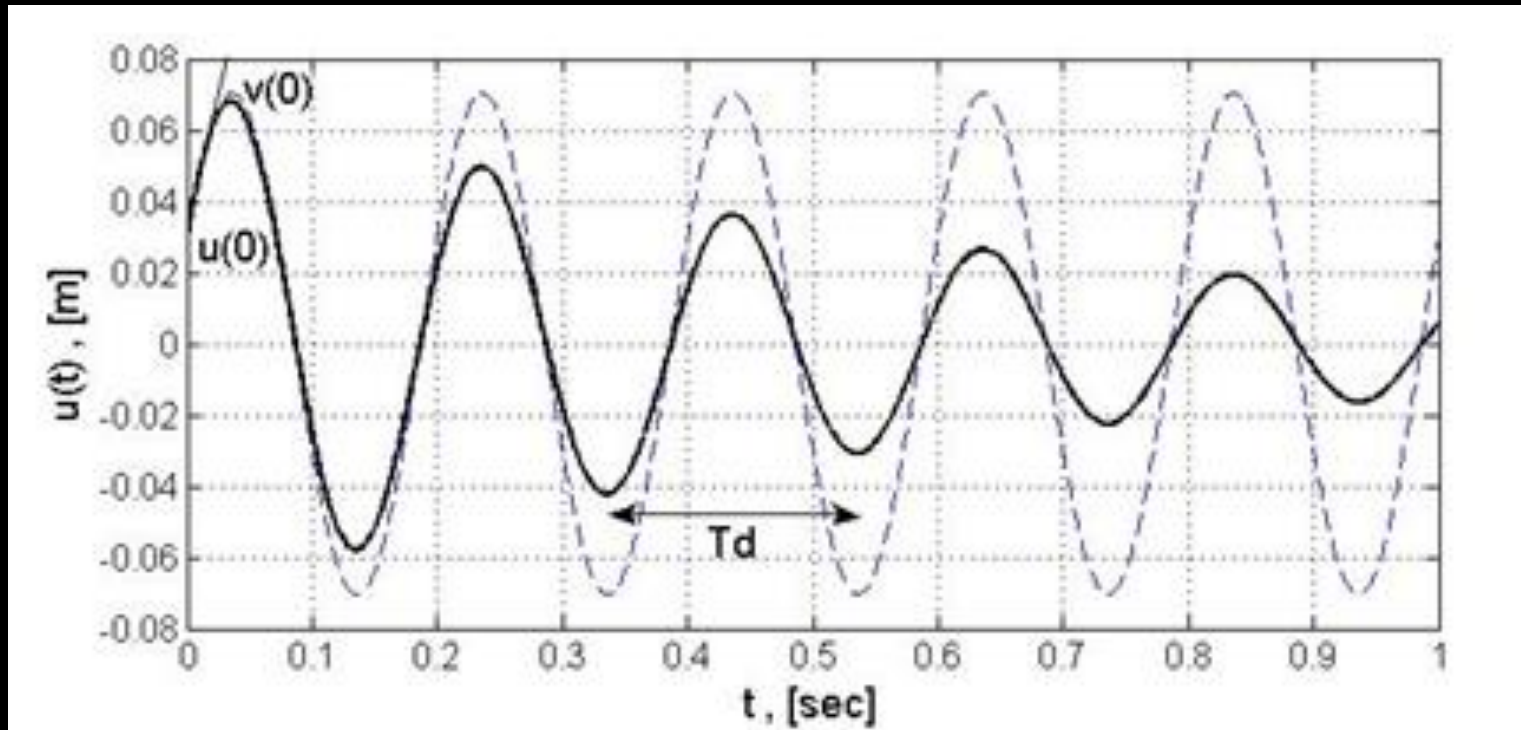


Η μέγιστη σχετική μετακίνηση, u_{\max} , κατά την ελεύθερη ταλάντωση ισούται με :

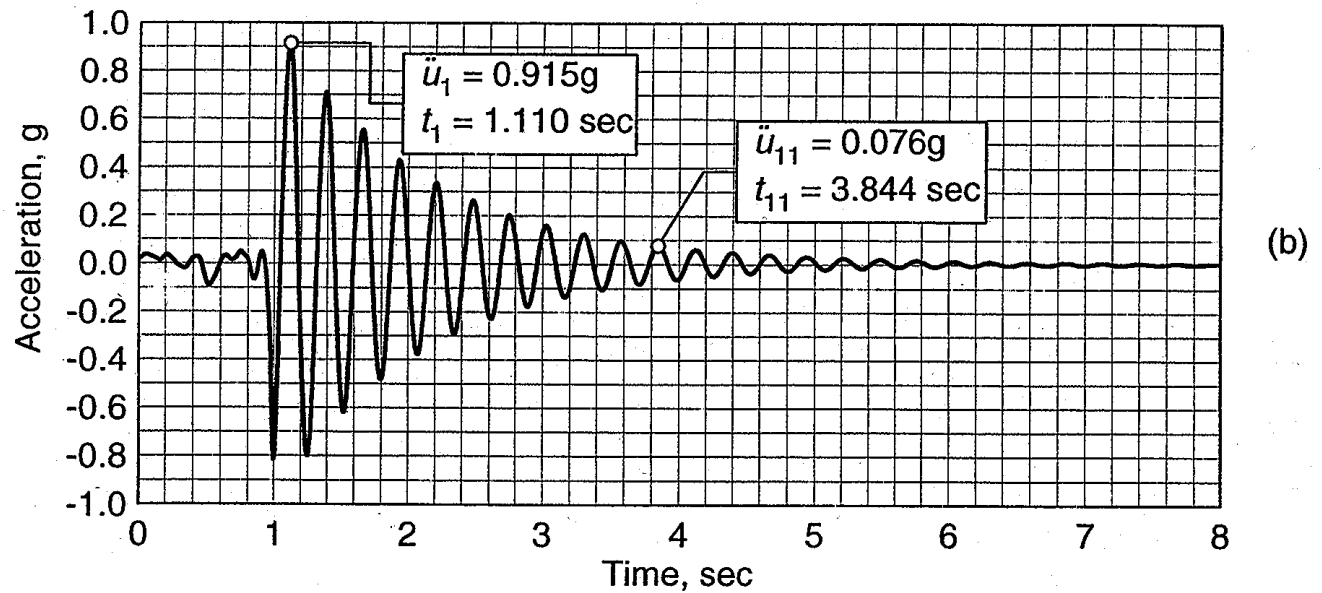
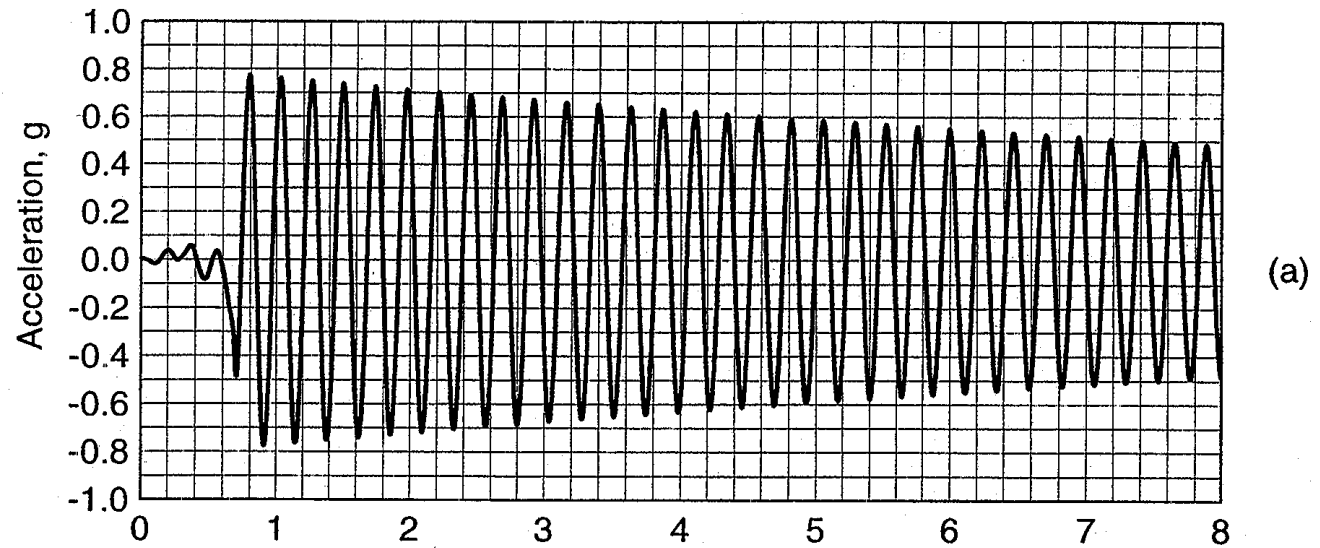
$$u_{\max} = \sqrt{(u(0))^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}$$

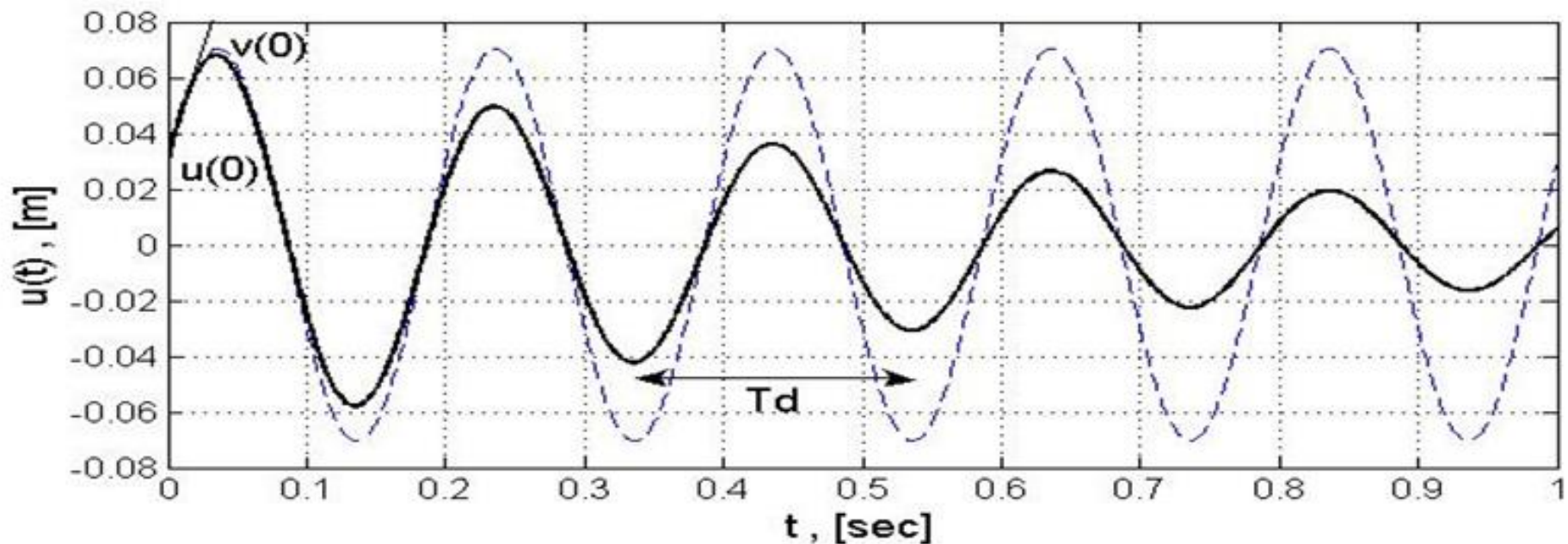
Ελεύθερη ταλάντωση ΜΒΣ με ιξώδη απόσβεση

Η θεώρηση μηδενικής απόσβεσης δεν είναι ρεαλιστική, αφού στην πράξη πάντα υπάρχουν κάποιοι μηχανισμοί απόσβεσης ενέργειας, κατά την ταλάντωση ενός συστήματος, που προκαλούν απομείωση του μέγιστου εύρους της ελεύθερης ταλάντωσης. Αυτό φαίνεται εάν οποιοσδήποτε ταλαντωτής διαταραχθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί να ταλαντωθεί ελεύθερα, η ελεύθερη ταλάντωση του δεν πρόκειται να συνεχιστεί επ' άπειρο, αλλά σύντομα θα μειωθεί και τελικά το σώμα θα ηρεμήσει και θα ακινητοποιηθεί στην αρχική θέση ισορροπίας.



Free vibration records: (a) Aluminum model; (b) Plexiglass model





Θεωρώντας ότι η απόσβεση ενέργειας είναι ιξώδης, η εξίσωση κίνησης ενός ΜΒΣ που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση λόγω επιβολής κάποιων αρχικών συνθηκών είναι η εξής:

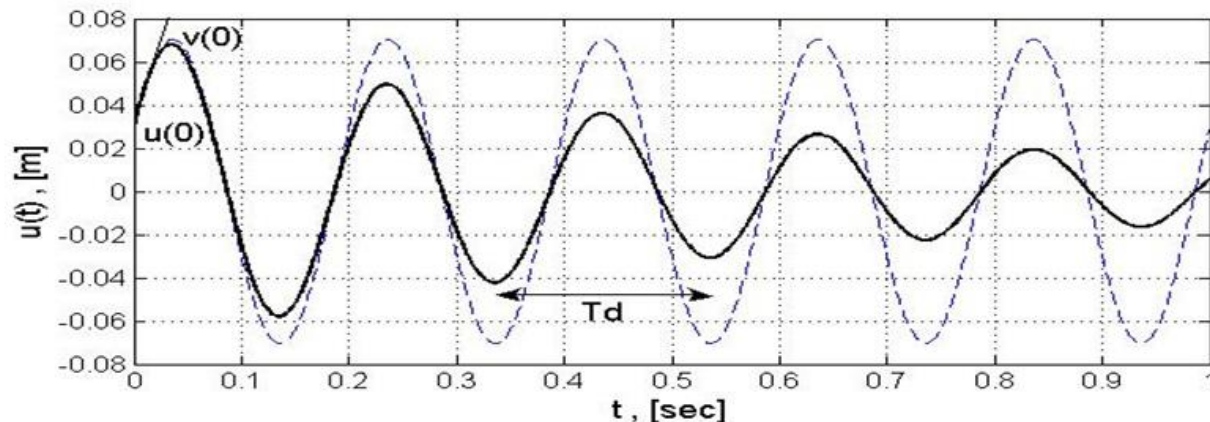
$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = 0$$

όπου: $\omega_n = \sqrt{k/m}$ είναι η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης χωρίς απόσβεση

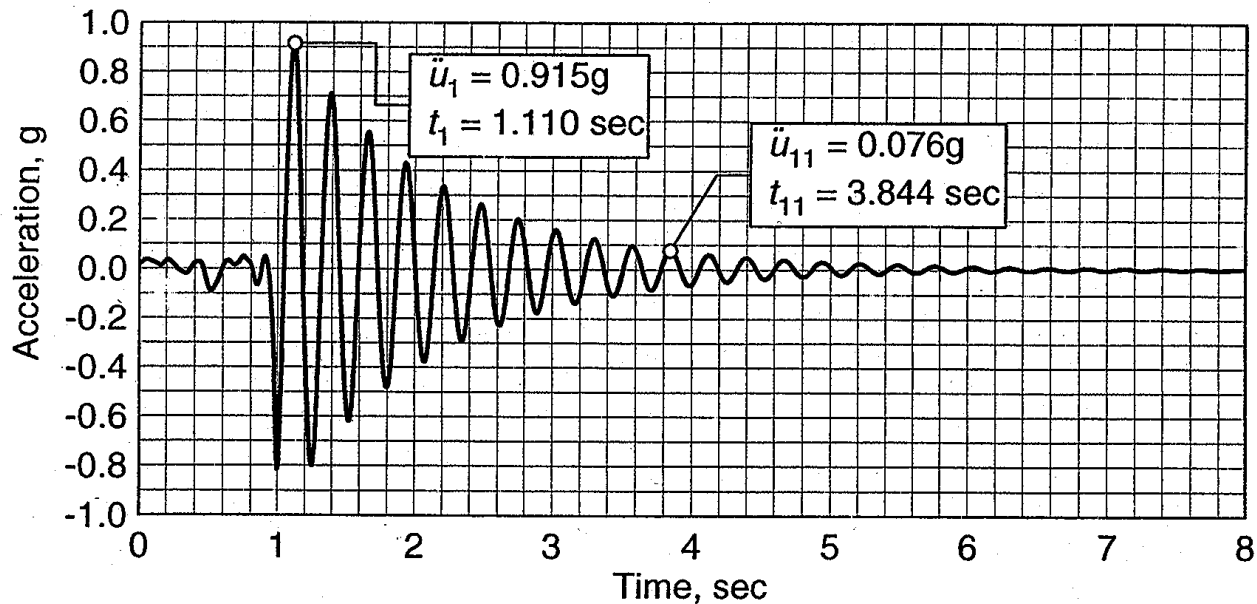
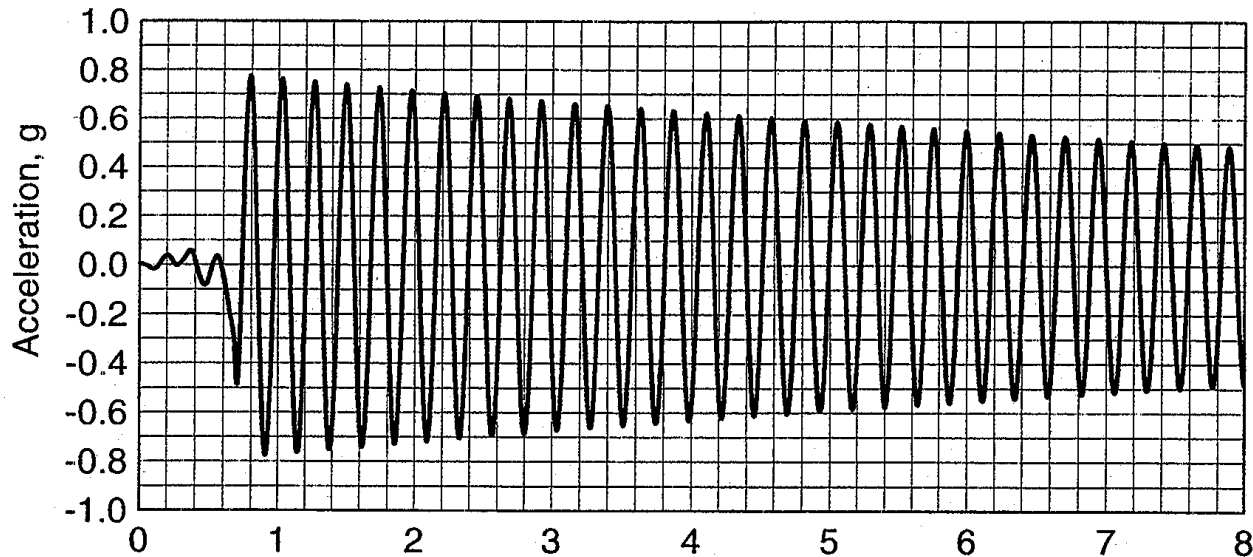
και $\zeta = c/C_{cr} = c/(2 \cdot m \cdot \omega_n)$ είναι ο λόγος απόσβεσης.

Ο συντελεστής κρίσιμης ιξώδους απόσβεσης, $C_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega_n$, είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του συντελεστή απόσβεσης, C , για την οποία δεν προκαλείται ταλάντωση λόγω επιβολής κάποιων αρχικών συνθηκών μετάθεσης. Δηλαδή, ο συντελεστής κρίσιμης ιξώδους απόσβεσης, για τον οποίο ο αντίστοιχος λόγος απόσβεσης ισούται με μονάδα, αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιξώδη απόσβεση που μπορεί να έχει ένα ΜΒΣ έτσι ώστε όταν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας, κατά μια αρχική μετάθεση, και αφεθεί ελεύθερο να ταλαντωθεί, το ΜΒΣ θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας, σε χρόνο ίσο με τη φυσική ιδιοπερίοδο του, χωρίς να εκτελέσει ταλάντωση. Εάν ο συντελεστής ιξώδους απόσβεσης ενός ΜΒΣ είναι μεγαλύτερος της κρίσιμης τιμής, οπότε και ο λόγος απόσβεσης θα είναι μεγαλύτερος της μονάδας, η απόσβεση θα είναι υπερκρίσιμη. Εάν ένα ΜΒΣ με υπερκρίσιμη απόσβεση εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας, κατά μια αρχική μετάθεση, και αφεθεί ελεύθερο, το ΜΒΣ θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας, σε χρόνο όμως μεγαλύτερο από τη φυσική ιδιοπερίοδο του. Αντιθέτως, όταν ένα ΜΒΣ που έχει υποκρίσιμη απόσβεση εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας κατά μια αρχική μετακίνηση, εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση.



Free vibration records:

(a) Aluminum model; (b) Plexiglass model



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

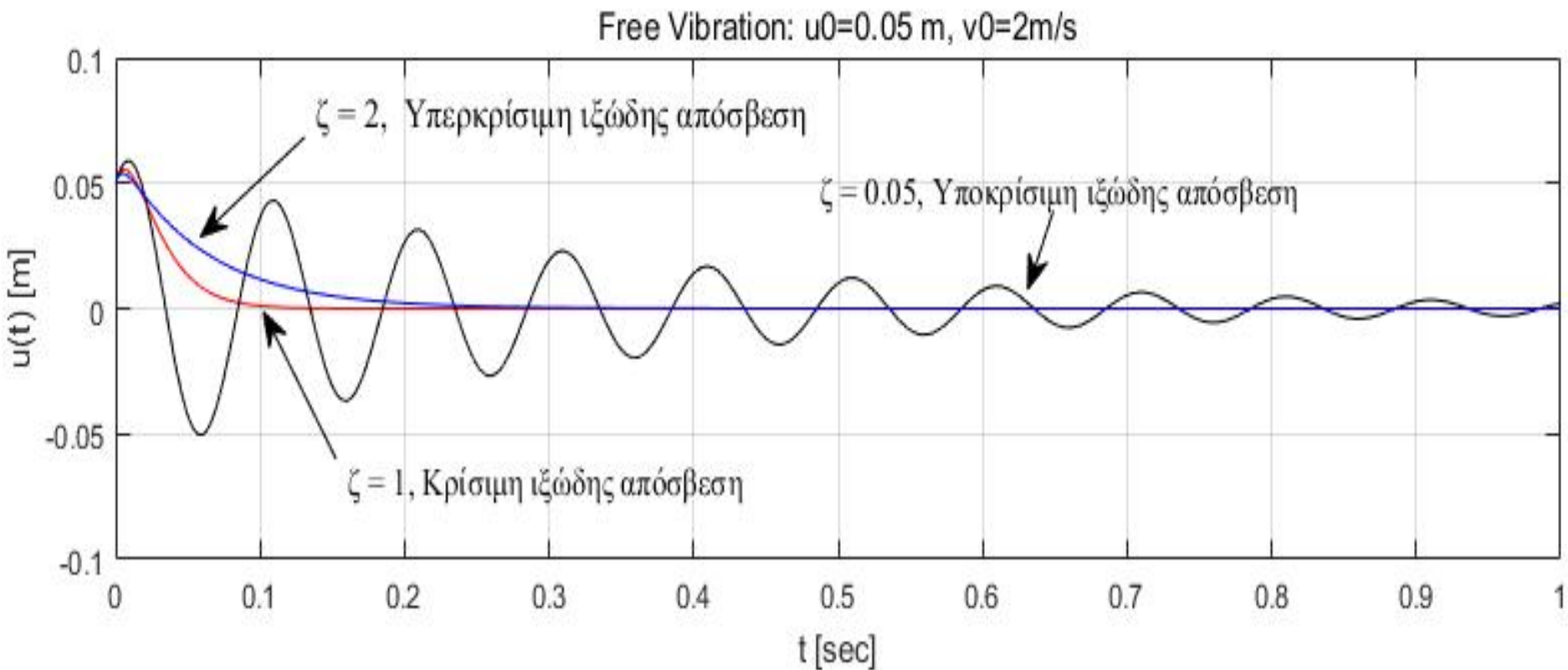
$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad \zeta = c/C_{cr} = c/(2 \cdot m \cdot \omega_n)$$

$$\ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = 0$$

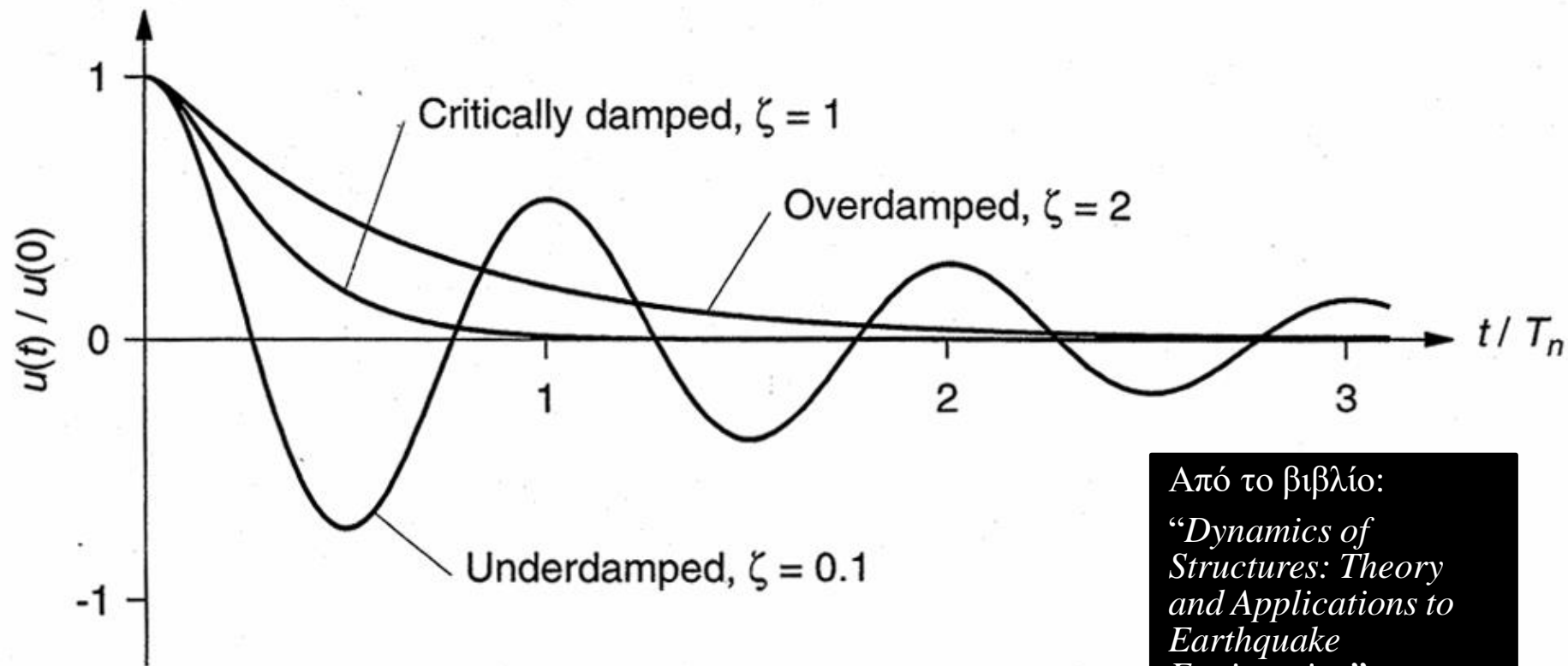
$$u(0) \quad v(0) = \dot{u}(0)$$

Οι συνήθεις κατασκευές πολιτικών μηχανικών έχουν λόγο ιξώδους απόσβεσης ενέργειας, ζ , αρκετά μικρότερο της μονάδας, συνήθως γύρω στο 2–5 % (0.02–0.05), δηλαδή έχουν υποκρίσιμη ιξώδη απόσβεση, αφού ο συντελεστής ιξώδους απόσβεσης είναι μικρότερος της κρίσιμης τιμής του.

Το πιο κάτω σχήμα παρουσιάζει την χρονοϊστορία της ελεύθερης ταλάντωσης ενός μονοβάθμιου συστήματος με φυσική ιδιοπερίοδο $T_n = 0.1s$, με υποκρίσιμη ($\zeta < 1$), κρίσιμη ($\zeta = 1$) και υπερκρίσιμη ($\zeta > 1$) ιξώδη απόσβεση, όταν αυτό αφεθεί να ταλαντωθεί με αρχικές συνθήκες $u(0) = 0.05m$ και $\dot{u}(0) = 2m/sec$.



Free vibration of underdamped, critically-damped, and overdamped systems

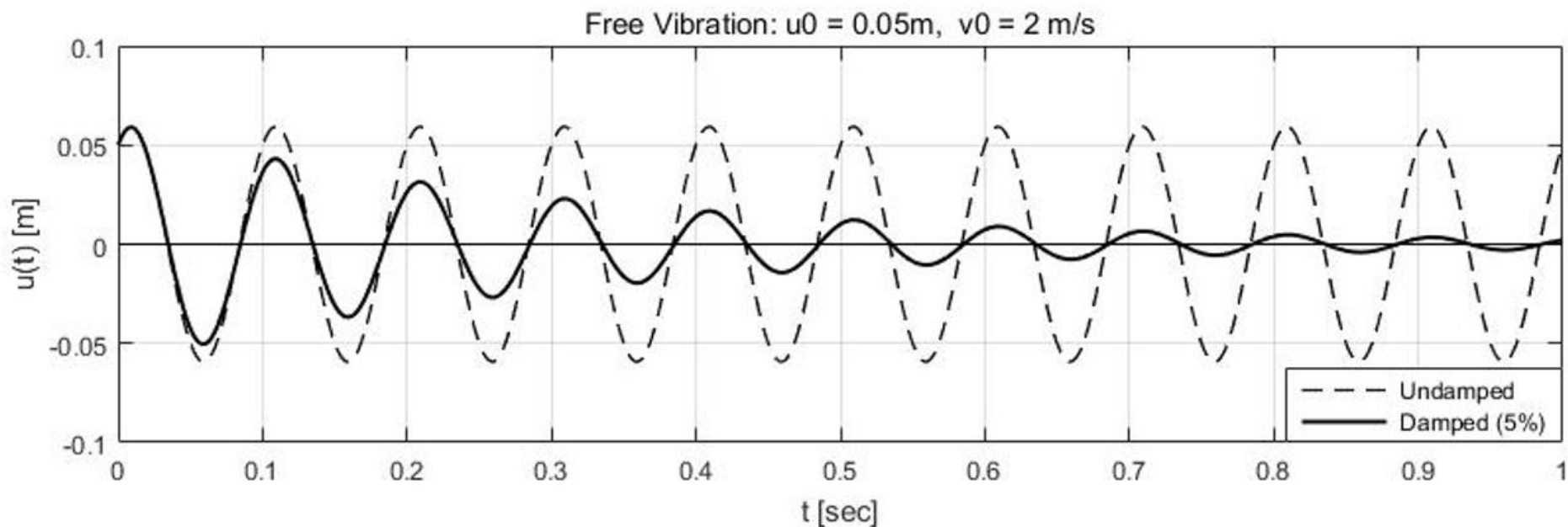


Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra

Figure 2.2.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Απόκριση ελεύθερης ταλάντωσης ενός ΜΒΣ με φυσική ιδιοπερίοδο $T_n = 0.1\text{s}$ και αρχικές συνθήκες $u(0) = 0.05\text{ m}$ και $\dot{u}(0) = 2\text{ m/sec}$, σε δύο περιπτώσεις: χωρίς απόσβεση (διακεκομμένη γραμμή) και με ιξώδη απόσβεση $\zeta = 5\%$ (συνεχής γραμμή).



Σχήμα 11.9: Απόκριση ελεύθερης ταλάντωσης μονοβάθμιου συστήματος, χωρίς και με απόσβεση

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

$$u(0)$$

$$v(0) = \dot{u}(0)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$\rightarrow$$

$$\ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = 0$$

$$\zeta = c/C_{cr} = c/(2 \cdot m \cdot \omega_n)$$

Επιλύοντας τη ΔΕ κίνησης, θεωρώντας ότι το σύστημα έχει υποκρίσιμη ιξώδη απόσβεση ($\zeta < 1$), υπολογίζεται η μετακίνηση του ΜΒΣ:

$$u(t) = \left(u(0) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\dot{u}(0) + \omega_n \cdot \zeta \cdot u(0)}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right) \cdot e^{-\omega_n \cdot \zeta \cdot t}$$

όπου η αποσβεσμένη ιδιοσυχνότητα, ω_d , δηλαδή η ιδιοσυχνότητα με απόσβεση, και η αποσβεσμένη ιδιοπερίοδος, T_d , δηλαδή η ιδιοπερίοδος με απόσβεση, ορίζονται ως εξής:

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{και} \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

$$u(0)$$

$$v(0) = \dot{u}(0)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$\rightarrow \ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = 0$$

$$\zeta = c/C_{cr} = c/(2 \cdot m \cdot \omega_n)$$

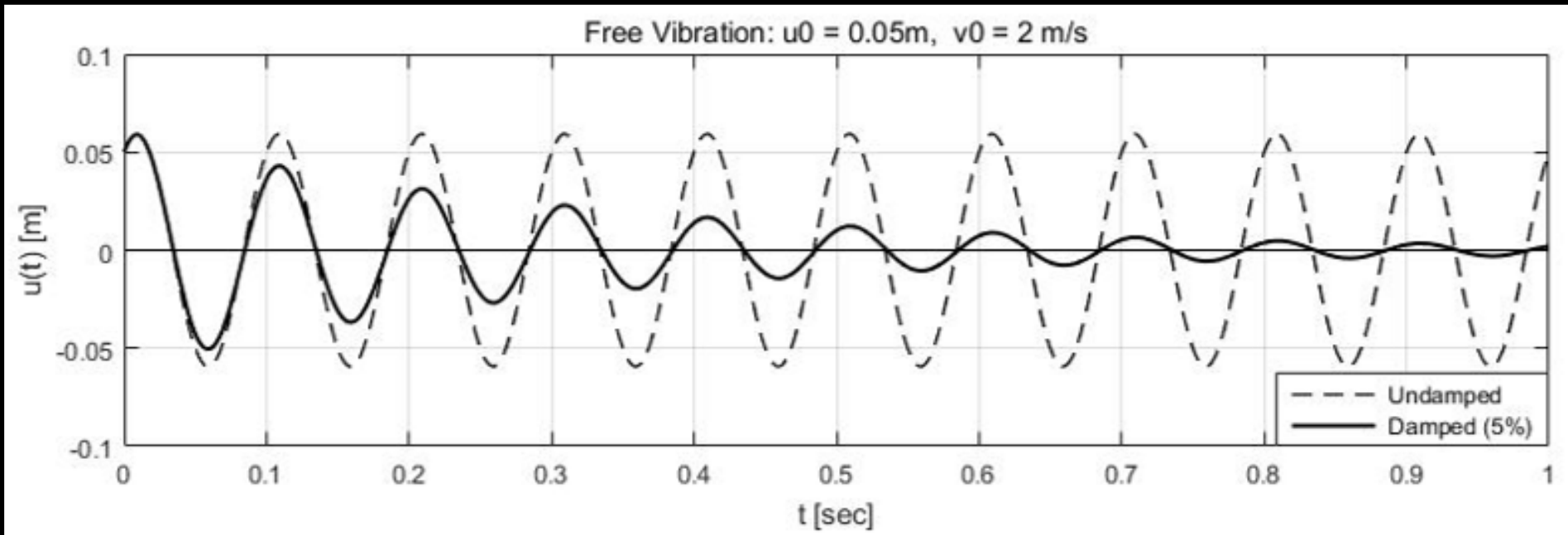
$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$u(t) = \left(u(0) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\dot{u}(0) + \omega_n \cdot \zeta \cdot u(0)}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right) \cdot e^{-\omega_n \cdot \zeta \cdot t}$$

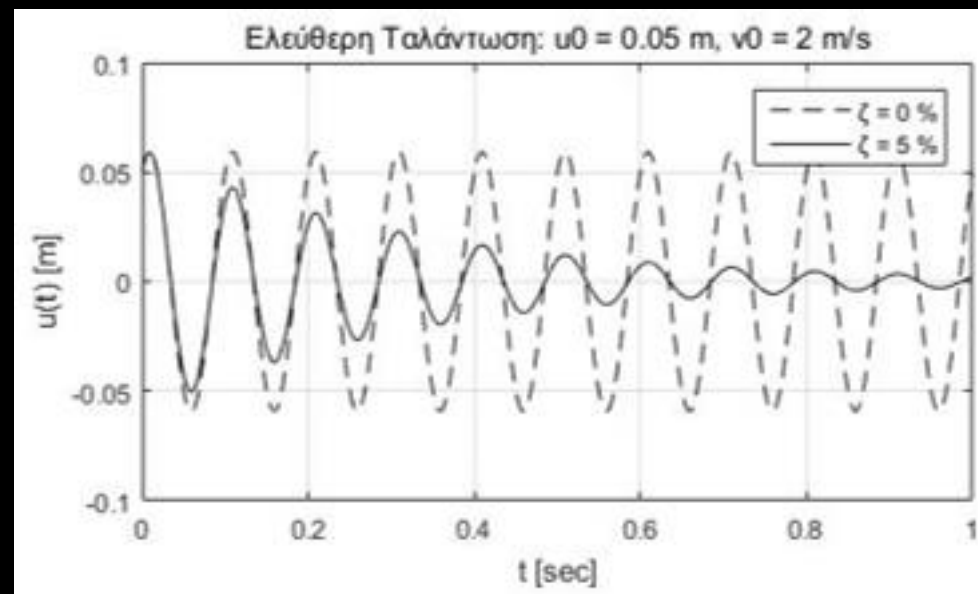
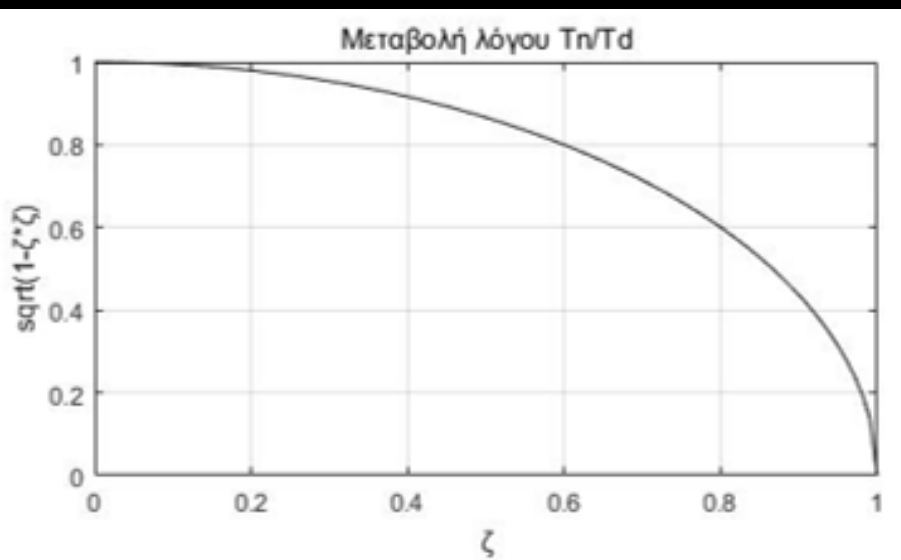
Το μέγιστο εύρος, u_{\max} , μιας ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση ισούται με :

$$u_{\max} = \sqrt{(u(0))^2 + \left(\frac{\dot{u}(0) + \omega_n \cdot \zeta \cdot u(0)}{\omega_d} \right)^2}$$

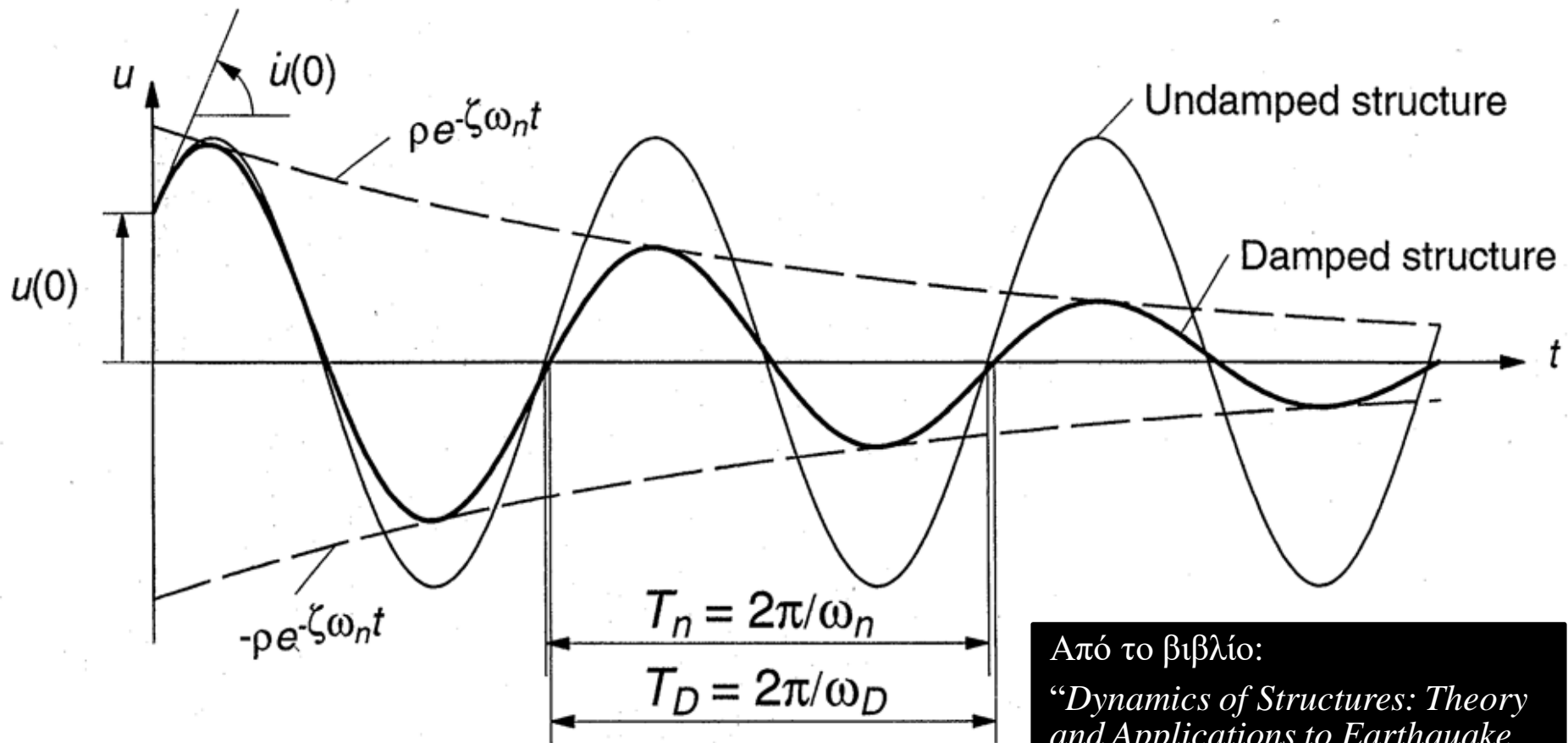
Το Σχήμα παρουσιάζει την απόκριση ελεύθερης ταλάντωσης ενός ΜΒΣ με φυσική ιδιοπερίοδο $T_n = 0.1s$ και αρχικές συνθήκες $u(0) = 0.05m$ και $\dot{u}(0) = 2m/sec$, σε δύο περιπτώσεις: χωρίς απόσβεση (διακεκομμένη γραμμή) και με ιξώδη απόσβεση $\zeta = 5\%$ (συνεχής γραμμή).



Ο λόγος της ιδιοσυχνότητας με και χωρίς απόσβεση, ω_d / ω_n , ο οποίος ισούται με το λόγο T_n / T_d , για τις συνήθειες τιμές του λόγου ιξώδους απόσβεσης, ο οποίος για κτηριακές κατασκευές κυμαίνεται γύρω στο 2–5%, ανάλογα με τον τύπο και το υλικό της κατασκευής, τείνει να ισούται με τη μονάδα, όπως φαίνεται και στο επόμενο γράφημα. Δηλαδή, η μεταβολή της ιδιοπεριόδου λόγω απόσβεσης, είναι αμελητέα στις πλείστες των περιπτώσεων των κατασκευών.



Effects of damping on free vibration

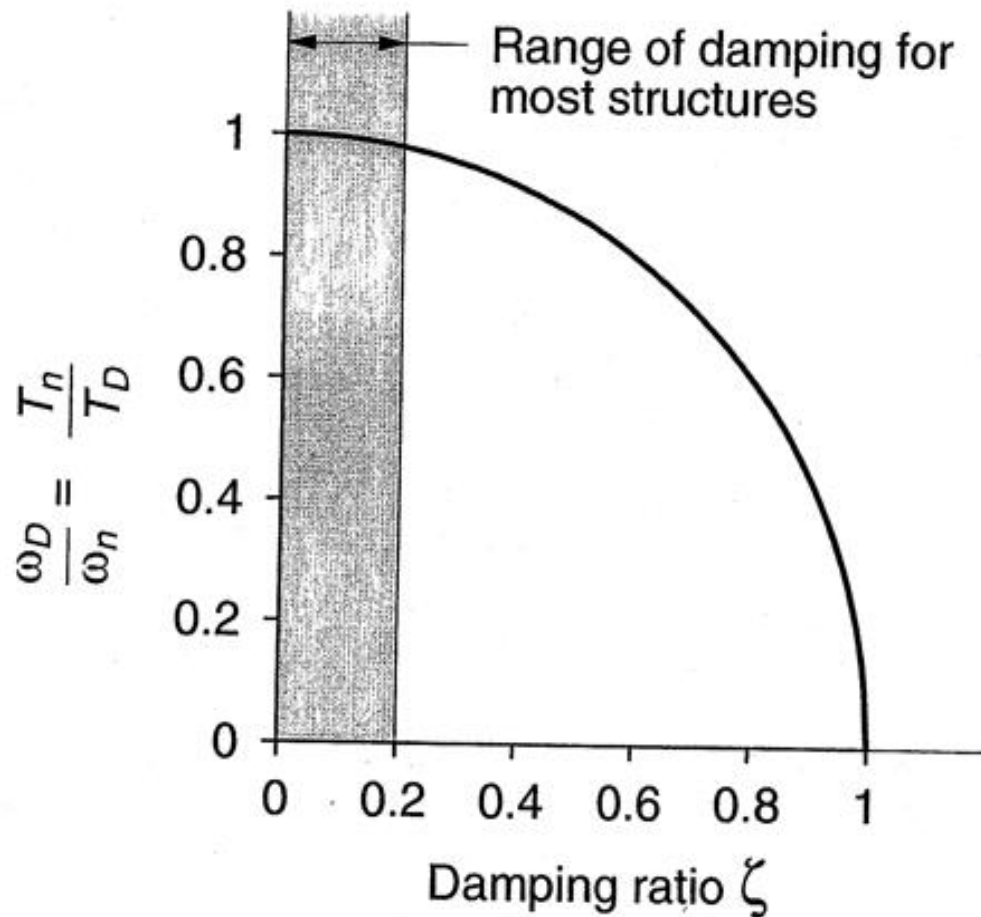


Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory
and Applications to Earthquake
Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 2.2.2 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

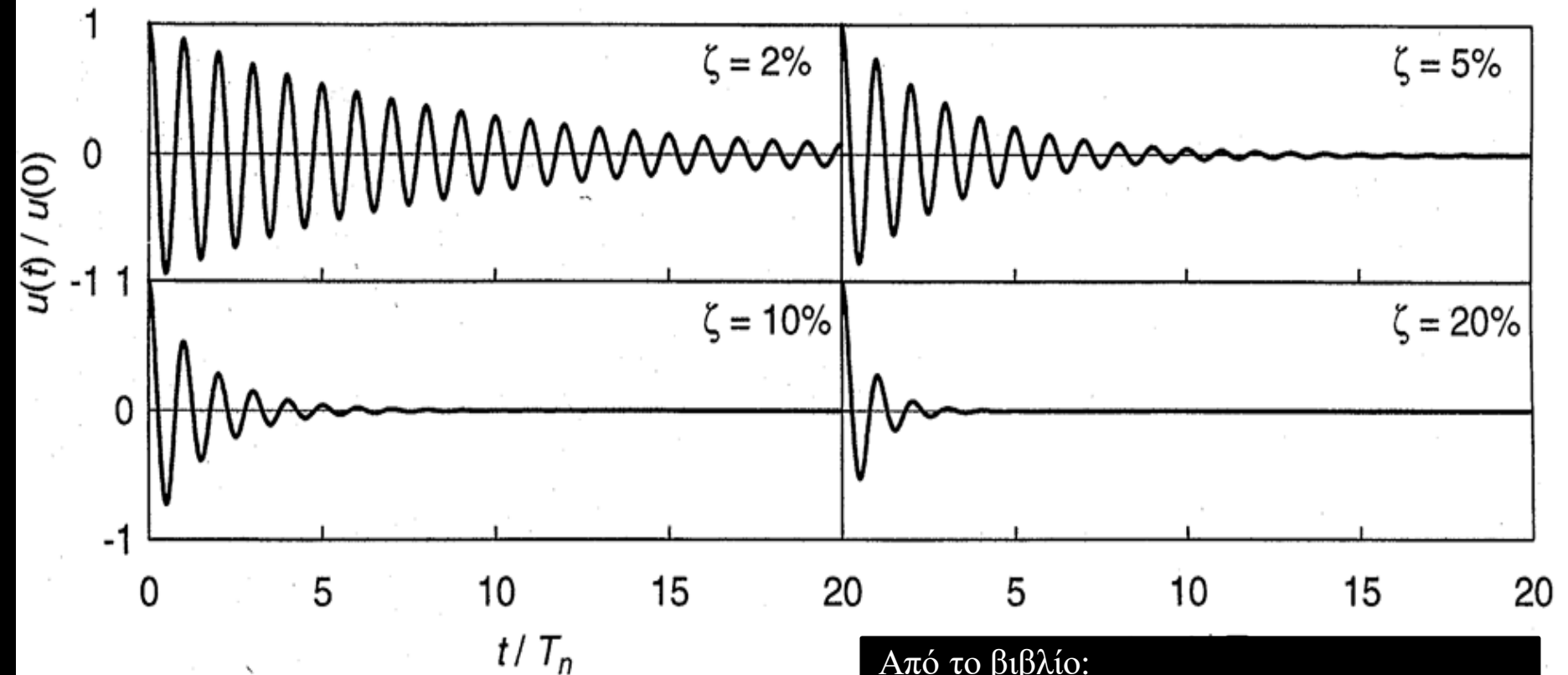
Effects of damping on the natural vibration frequency



Από το βιβλίο:
*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications
to Earthquake
Engineering”*

- Anil K. Chopra

Free vibration: $\zeta = 2, 5, 10$ and 20%



Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 2.2.4 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

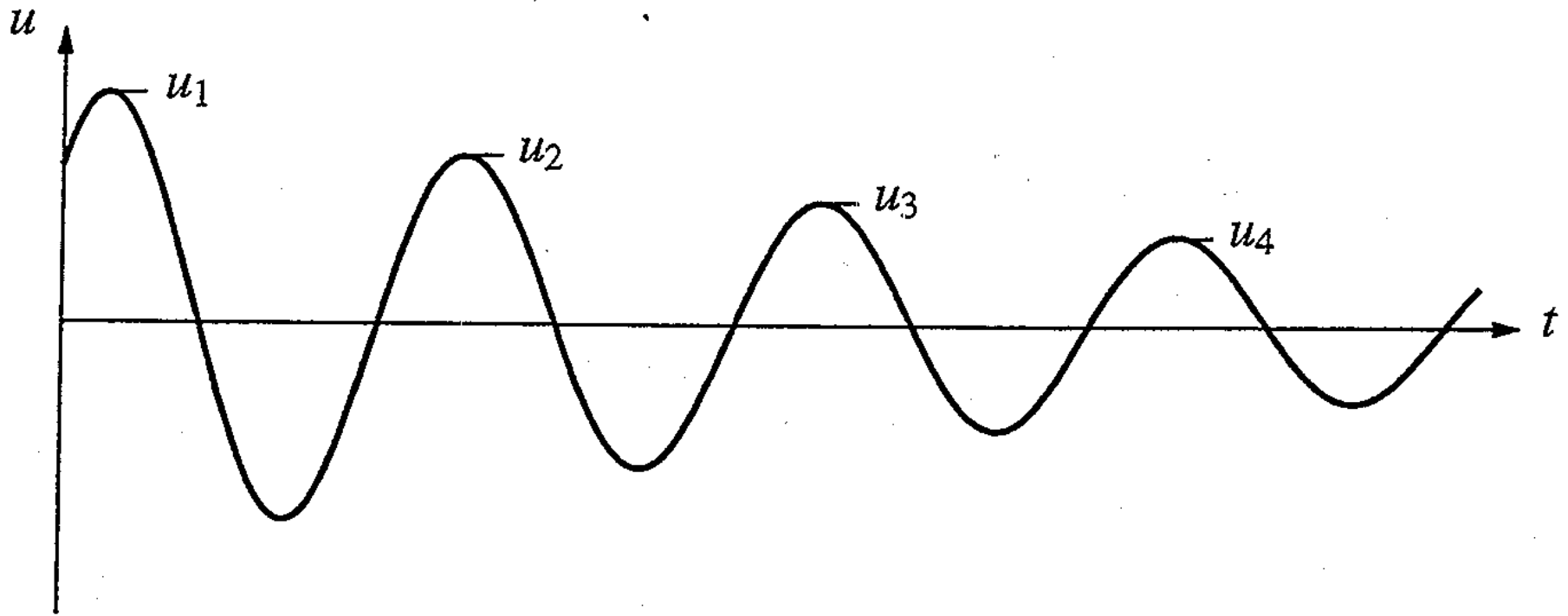


Figure 2.2.5

Από το βιβλίο:
*“Dynamics of Structures: Theory and
Applications to Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

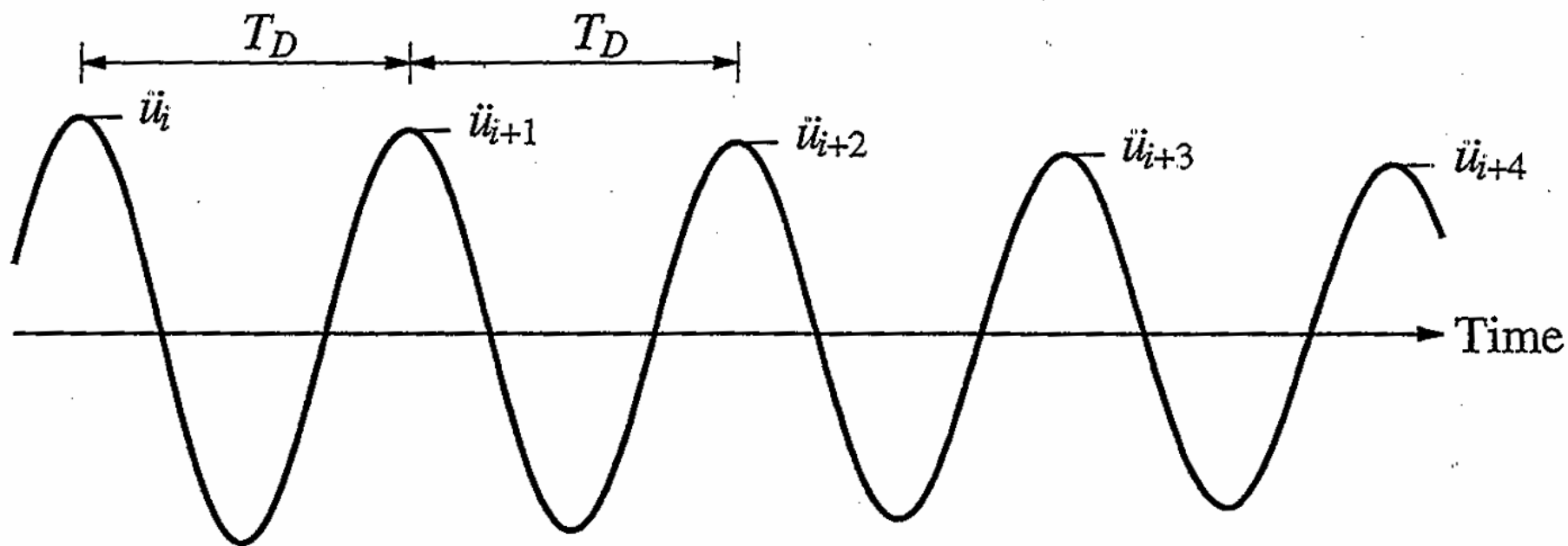
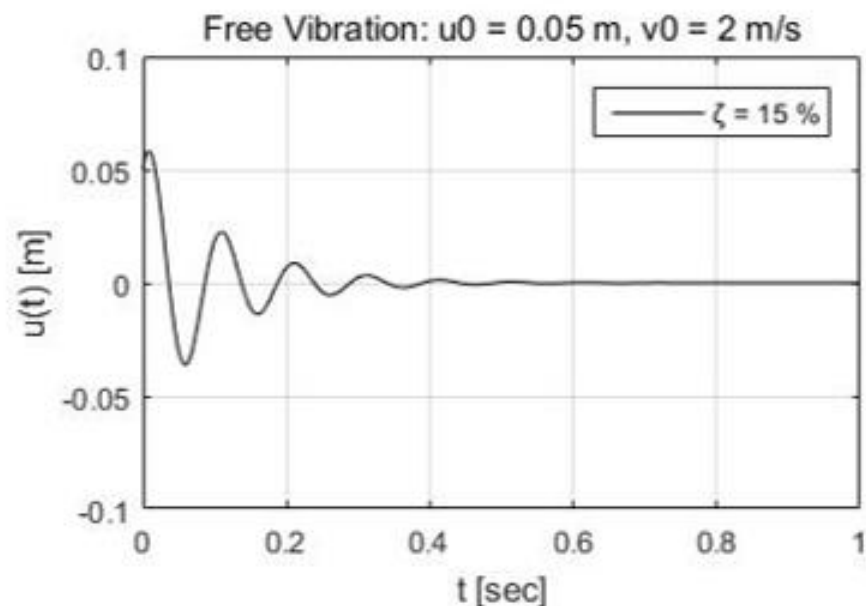
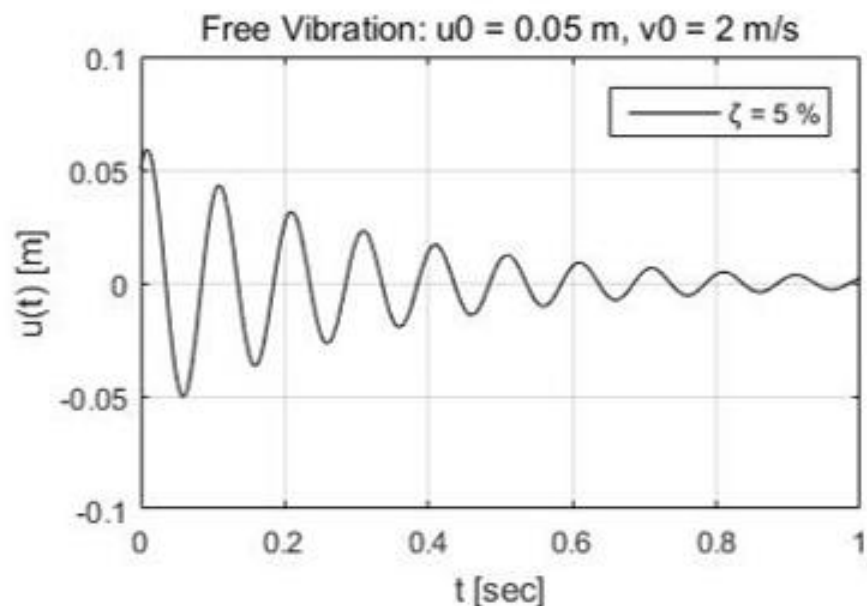
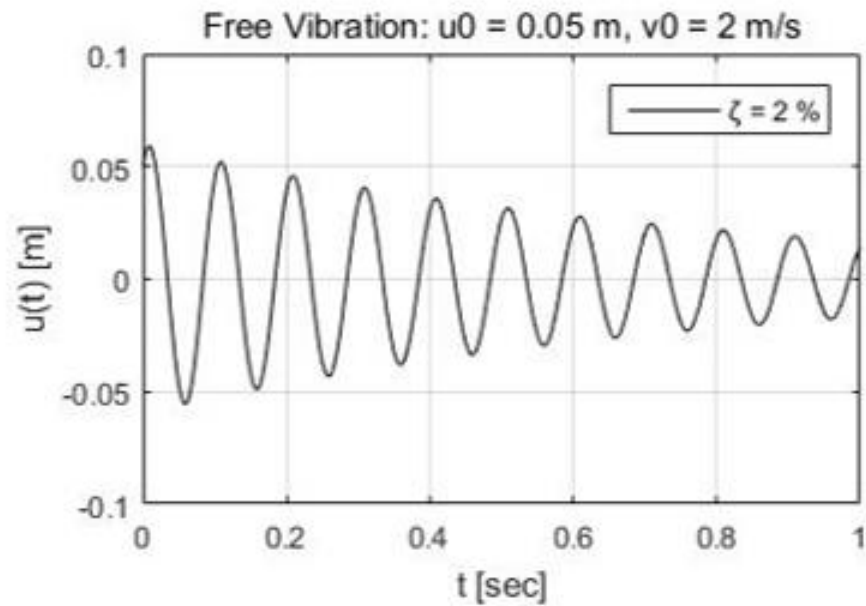
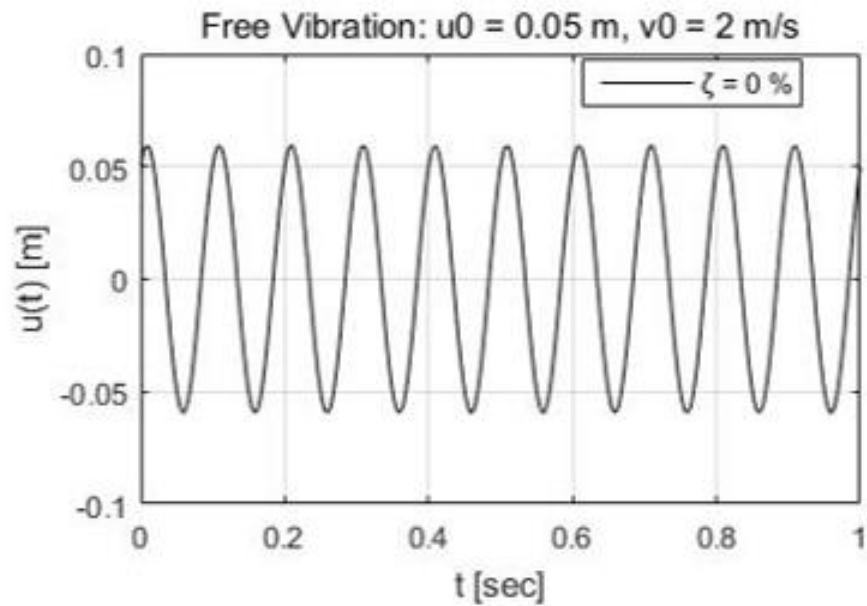


Figure 2.2.8 Acceleration record of a freely vibrating system.

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra



$$\zeta = c/C_{cr} = c/(2 \cdot m \cdot \omega_n)$$

Ο συντελεστής ή ο λόγος, ιξώδους απόσβεσης δεν είναι κάτι που μπορεί να υπολογιστεί από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της κατασκευής. Μπορεί όμως να εκτιμηθεί βάσει της απόκρισής της σε συγκεκριμένες διεγέρσεις, όπως στην ελεύθερη ή στην αρμονική ταλάντωση.

Κατά την ελεύθερη ταλάντωση, ο λόγος της μετακίνησης σε χρόνο t προς τη μετακίνηση σε χρόνο $t + T_d$, δηλαδή μετά από την πάροδο μιας ιδιοπεριόδου, ισούται με:

$$\frac{u(t)}{u(t + T_d)} = e^{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)} \approx e^{(2 \cdot \pi \cdot \zeta)}$$

Έτσι, ο λογάριθμος της αντίστοιχης μείωσης δύο διαδοχικών ομόσημων ακροτάτων (τοπικών μεγίστων ή τοπικών ελαχίστων), ονομάζεται λογαριθμική μείωση και ισούται με:

$$\delta = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \approx 2 \cdot \pi \cdot \zeta$$

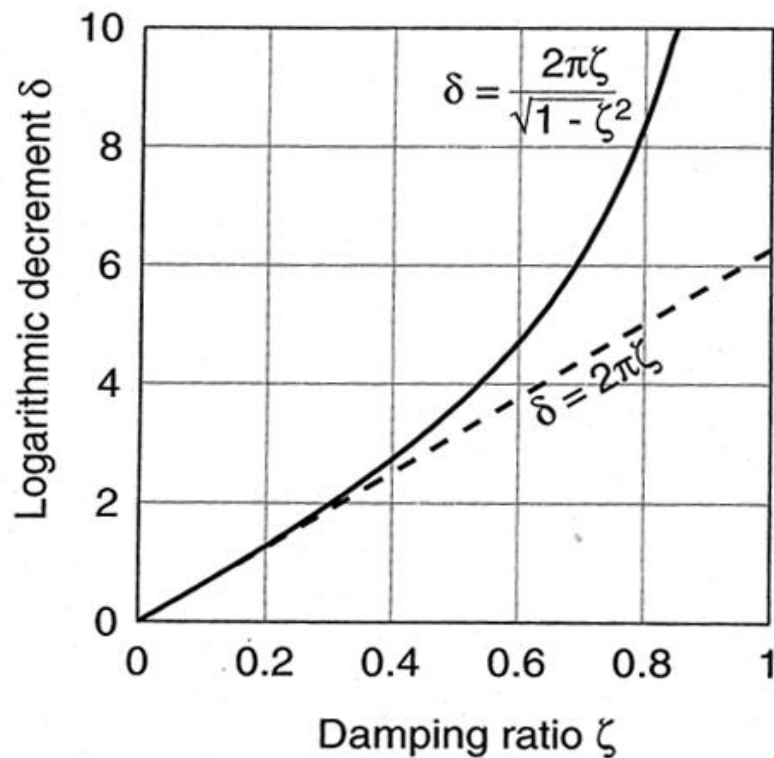
$$\delta = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \approx 2 \cdot \pi \cdot \zeta$$

Συνεπώς, η λογαριθμική μείωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθεί ο λόγος απόσβεσης ζ μετά από N κύκλους ταλάντωσης, αντί μετά από ένα, εξασφαλίζοντας καλύτερη ακρίβεια στην εκτίμησή της:

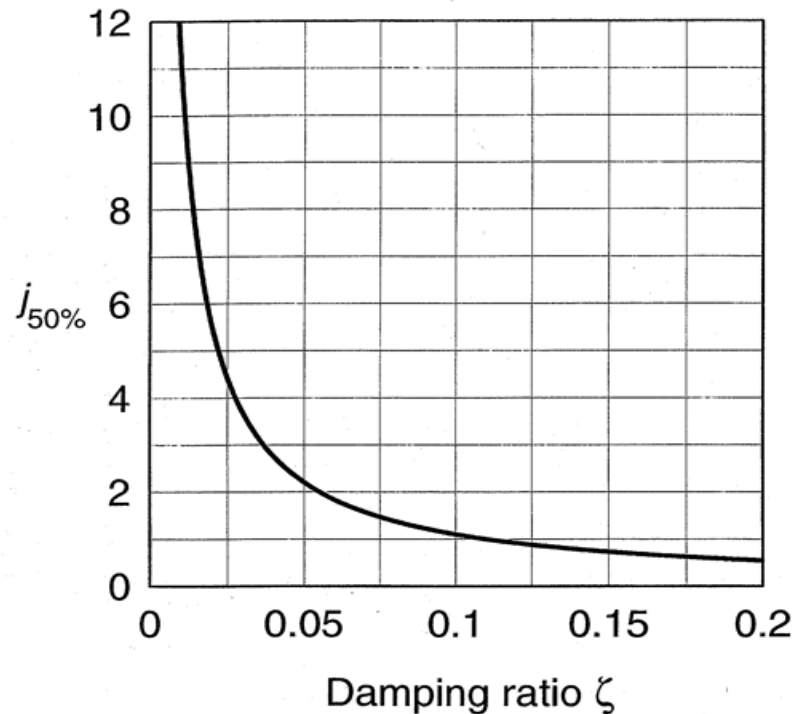
$$\frac{u_1}{u_{N+1}} = e^{2 \cdot \pi \cdot \zeta \cdot N} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot \ln\left(\frac{u_1}{u_{N+1}}\right)$$

Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει τη χρονοϊστορία ελεύθερης ταλάντωσης ενός μονοβάθμιου συστήματος χωρίς απόσβεση και με ιξώδη απόσβεση, θεωρώντας 3 διαφορετικές τιμές του λόγου απόσβεσης, $\zeta = 2\%$, $\zeta = 5\%$ και $\zeta = 15\%$, όταν αυτό αφεθεί να ταλαντωθεί με αρχικές συνθήκες $u(0) = 0.05\text{m}$ και $\dot{u}(0) = 2\text{m/sec}$.

Logarithmic decrement versus damping ratio



Number of cycles for 50% amplitude reduction



Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Παράδειγμα

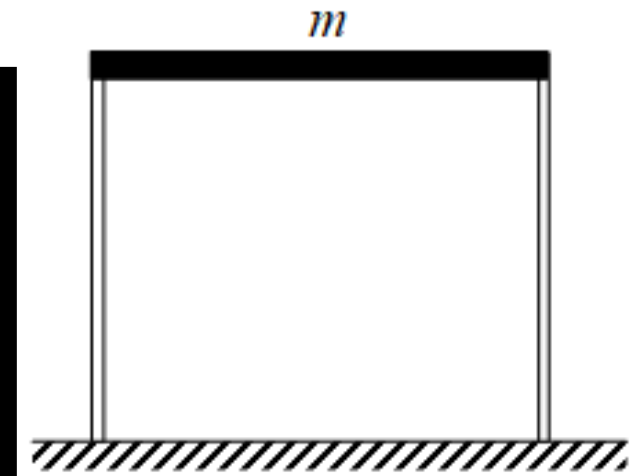
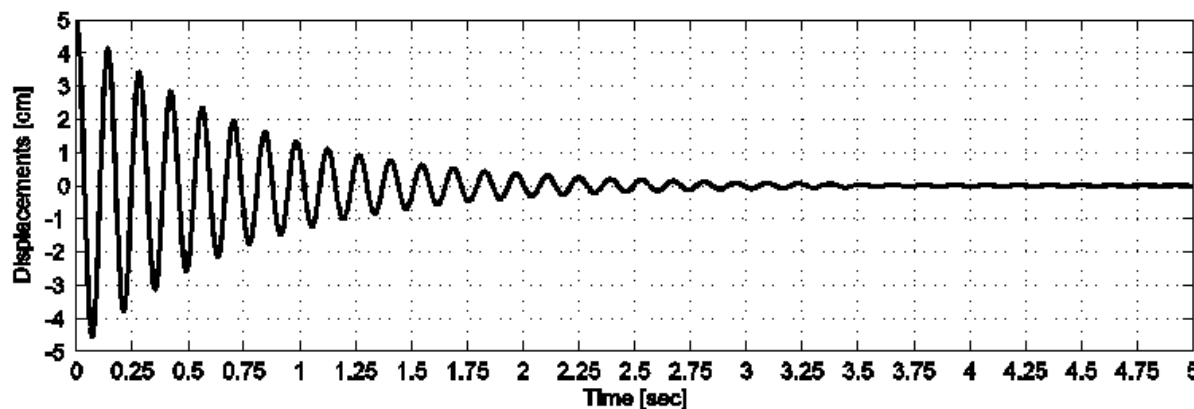
Κατά τη δοκιμή ελεύθερης ταλάντωσης του πιο κάτω πλαισίου, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι συμπεριφέρεται ως μονοβάθμιος ταλαντωτής (ΜΒΣ) με συγκεντρωμένη μάζα m , ασκείται οριζόντια δύναμη μεγέθους 2.5 MN , η οποία προκαλεί οριζόντια μετακίνηση της κατά 5 cm .

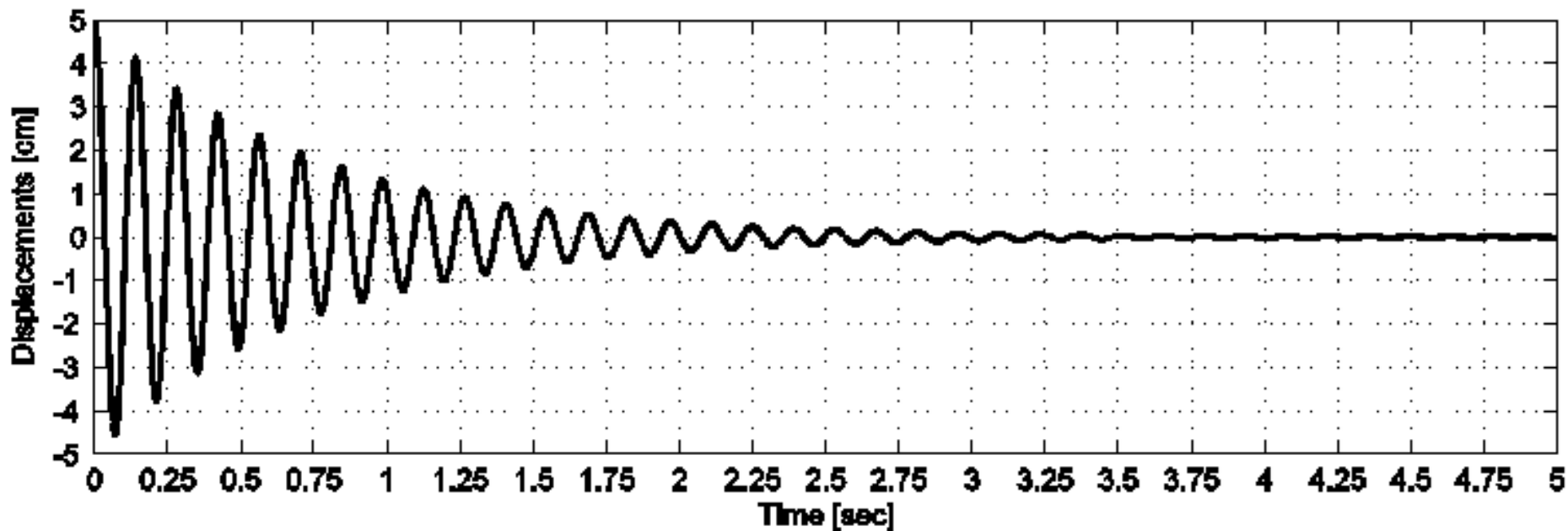
Αφαιρώντας απότομα την εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη, η κατασκευή ταλαντώνεται ελεύθερα με μετακινήσεις όπως καταγράφονται στο επόμενο διάγραμμα.

Θεωρώντας ότι η κατασκευή μπορεί να προσομοιωθεί ικανοποιητικά σαν ένα μονοβάθμιο σύστημα (ΜΒΣ), ζητείται όπως εκτιμηθούν:

(α) η οριζόντια δυσκαμψία (k) και η μάζα (m) της κατασκευής.

(β) το ποσοστό απόσβεσης (ζ) της κατασκευής.





Η οριζόντια δυσκαμψία της κατασκευής ισούται με:

$$k = \frac{2.5 \text{ MN}}{0.05 \text{ m}} = 50 \text{ MN / m}$$

Η φυσική ιδιοπερίοδος μπορεί να εκτιμηθεί από το σχήμα, αφού απαιτούνται 3.24 δευτερόλεπτα για 23 κύκλους ταλαντώσεων:

$$T_n = \frac{3.24 \text{ sec}}{23} = 0.141 \text{ sec}$$

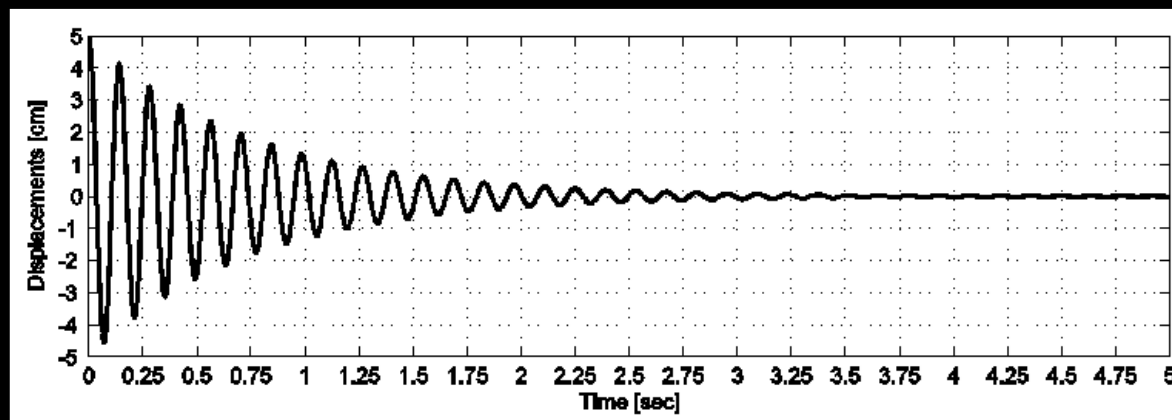
Με δεδομένη την φυσική ιδιοπερίοδο της κατασκευής μπορεί να υπολογιστεί η γωνιακή ιδιοσυχνότητα της και στη συνέχεια η μάζα της, ως ακολούθως:

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T_N} = \frac{2\pi}{0.141\text{sec}} = 44.6\text{rad/sec}$$

$$\Rightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{50\text{MN/m}}{44.6^2\text{rad/sec}} = 25,136\text{Kg} = 25.1\text{tons}$$

Τέλος, βάσει της λογαριθμικής μείωσης μπορεί να εκτιμηθεί ο λόγος απόσβεσης ζ , αφού μετά από 16 κύκλους η μέγιστη μετακίνηση μειώνεται, από τα 5 cm, στα 0.25 cm.

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot N} \cdot \ln\left(\frac{u_1}{u_{N+1}}\right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 16} \cdot \ln\left(\frac{5}{0.25}\right) = 0.0298 \approx 3\%$$



Αρμονική ταλάντωση ΜΒΣ χωρίς απόσβεση

Κάποιες διεγέρσεις, ιδιαίτερα σε κατασκευές βιομηχανικών και βιοτεχνικών χρήσεων από τη λειτουργία κάποιων μηχανημάτων, έχουν αρμονική μορφή, δηλαδή ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή μορφή, με κάποια συχνότητα διέγερσης ω .

Πέραν από αυτές τις περιπτώσεις, η αρμονική διέγερση θεωρείται βασική μορφή δυναμικής φόρτισης, αφού με αυτή μπορούν να διερευνηθούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά της δυναμικής απόκρισης ΜΒΣ σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Επιπλέον, σύνθετες διεγέρσεις μπορούν, μέσω μετασχηματισμών Fourier, να εκφραστούν ως άθροισμα αρμονικών διεγέρσεων και η συνολική απόκριση να προσδιοριστεί ως η επαλληλία των αποκρίσεων στις αρμονικές διεγέρσεις.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Υποβάλλοντας ένα ΜΒΣ χωρίς απόσβεση σε μια αρμονική φόρτιση, δηλαδή εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη της μορφής $P(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, όπου P_{\max} είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης και ω είναι η συχνότητα επιβολής του φορτίου, η εξίσωση κίνησης του ΜΒΣ χαρακτηρίζεται από τη συνήθη ΔΕ 2^{ας} τάξεως με σταθερούς συντελεστές, με την πιο κάτω μορφή:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Η γενική λύση αυτής της ΔΕ, $u(t)$, προκύπτει αθροίζοντας τη συμπληρωματική $u_c(t)$, δηλαδή τη λύση στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, και τη μερική $u_p(t)$ λύση. Στη συνέχεια, οι σταθερές ολοκλήρωσης προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $u(0)$ και $\dot{u}(0)$:

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\frac{P_{\max}}{k} \cdot \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\frac{P_{\max}}{k} \cdot \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

Οι πρώτοι δύο όροι αντιπροσωπεύουν το μεταβατικό (transient) μέρος, ενώ ο τελευταίος όρος εκπροσωπεί το μόνιμο (steady state) μέρος της ταλάντωσης.

Όπως θα δούμε στα συστήματα με απόσβεση, μετά από κάποιους κύκλους, το μεταβατικό μέρος αποσβένεται και παραμένει το μόνιμο μέρος, το οποίο για αυτό το λόγο είναι πιο σημαντικό. Έτσι, σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού παραλείπεται το μεταβατικό μέρος της ταλάντωσης, αφού πάντα αυτό αποσβένεται μετά τους πρώτους κύκλους ταλάντωσης, λόγω της απόσβεσης ενέργειας, που πάντα υπάρχει.

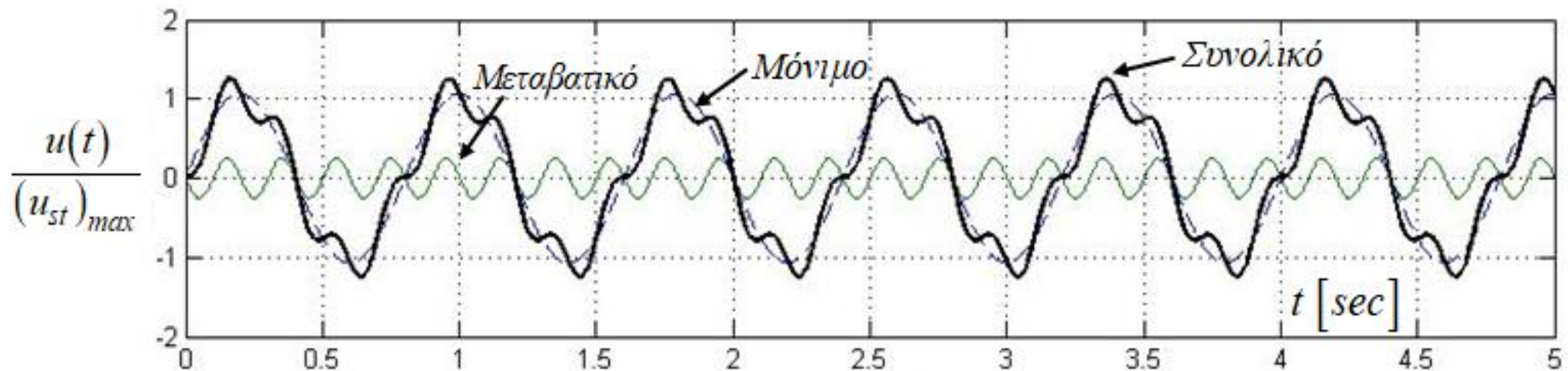
$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\frac{P_{\max}}{k} \cdot \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$u_{\text{transient}}^{(t)} = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\frac{P_{\max}}{k} \cdot \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

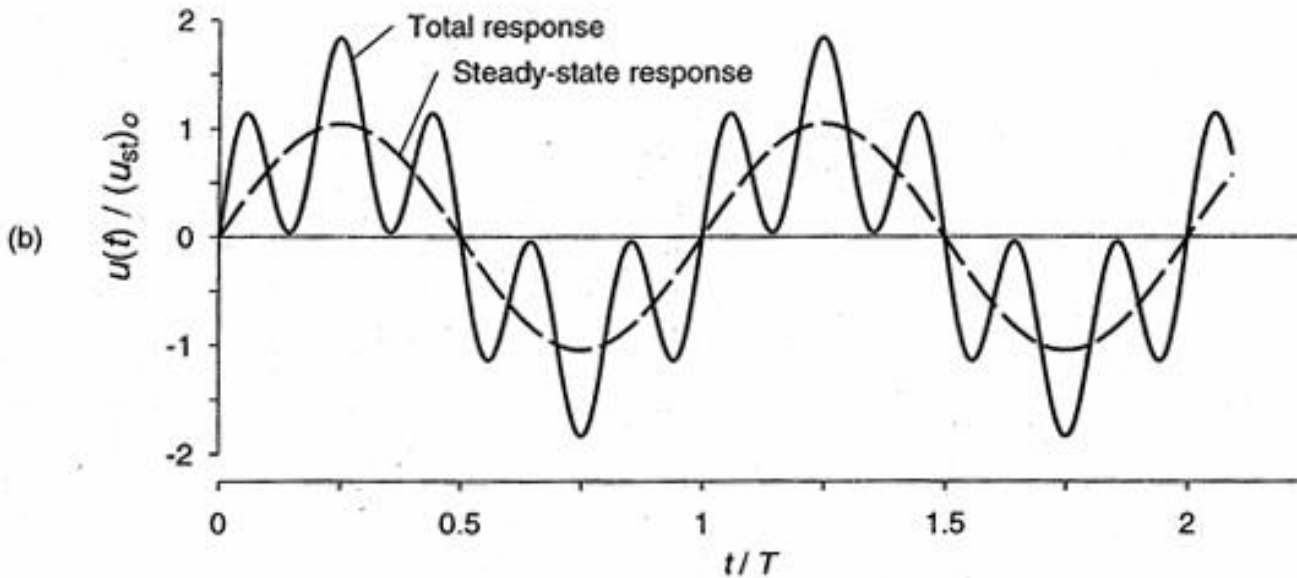
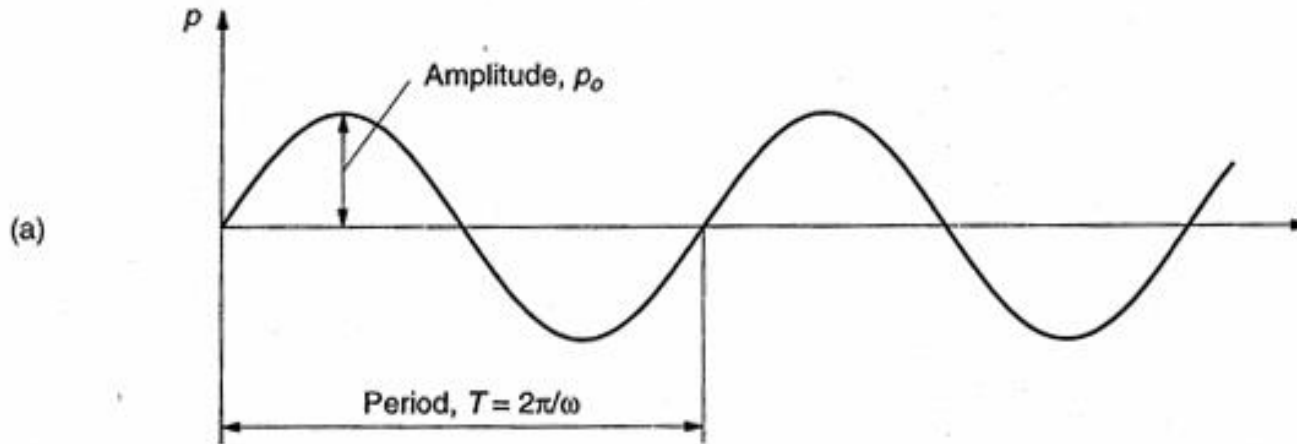
$$u_{\text{SteadyState}}^{(t)} = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\frac{P_{\max}}{k} \cdot \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

Το επόμενο σχήμα δίνει το λόγο της μετακίνησης $u(t)$ προς το εύρος της μετακίνησης $(u_{st})_{\max}$ λόγω στατικής εφαρμογής του φορτίου $P(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, η οποία ισούται με P_{\max}/k .



Response of undamped system to harmonic force;
 $\omega / \omega_n = 0.2$, $u(0) = 0$, and $\dot{u}(0) = \omega_n \rho_0 / k$



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

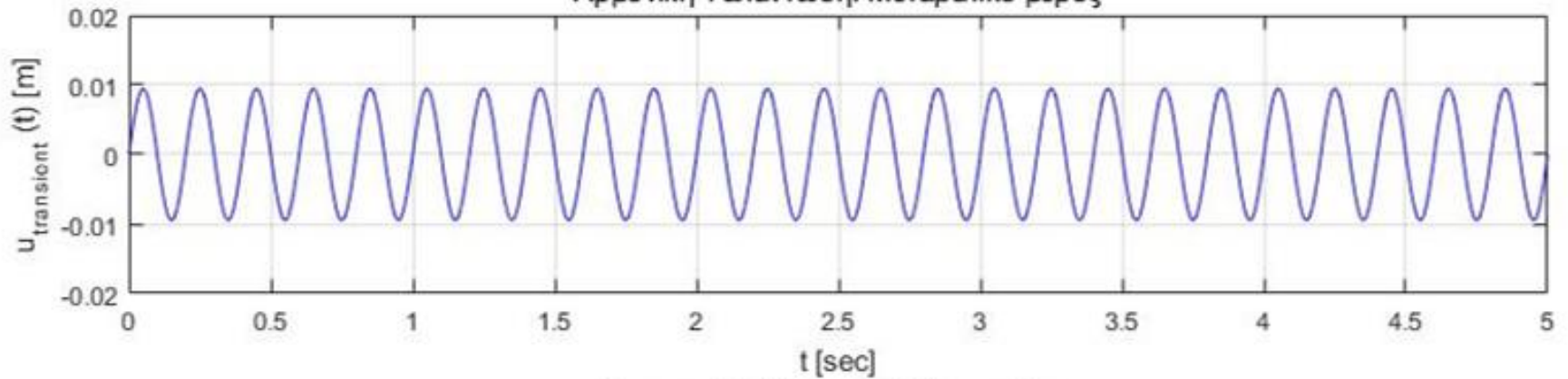
Τα επόμενα γραφήματα παρουσιάζουν την απόκριση ενός ΜΒΣ, το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση με διαχωρισμένο το μεταβατικό και το μόνιμο μέρος, από τη συνολική απόκριση. Συγκεκριμένα, με μηδενικές αρχικές συνθήκες ($u(0)$ και $\dot{u}(0)$) επιβλήθηκε, σε ένα ΜΒΣ, ένα αρμονικό φορτίο με μέγιστη τιμή P_{\max} και συχνότητα διέγερσης, ω , 2.5 φορές πιο μεγάλη από την φυσική γωνιακή ιδιοσυχνότητα, ω_n .

Στην αρμονική ταλάντωση, κυρίως μας ενδιαφέρει το μόνιμο μέρος της ταλάντωσης $u(t)_{\text{steadyState}}$, αφού το μεταβατικό μέρος, $u(t)_{\text{transient}}$, σε σύντομο χρονικό διάστημα αποσβένεται, όταν υπάρχει απόσβεση, όπως θα δούμε και πιο κάτω.

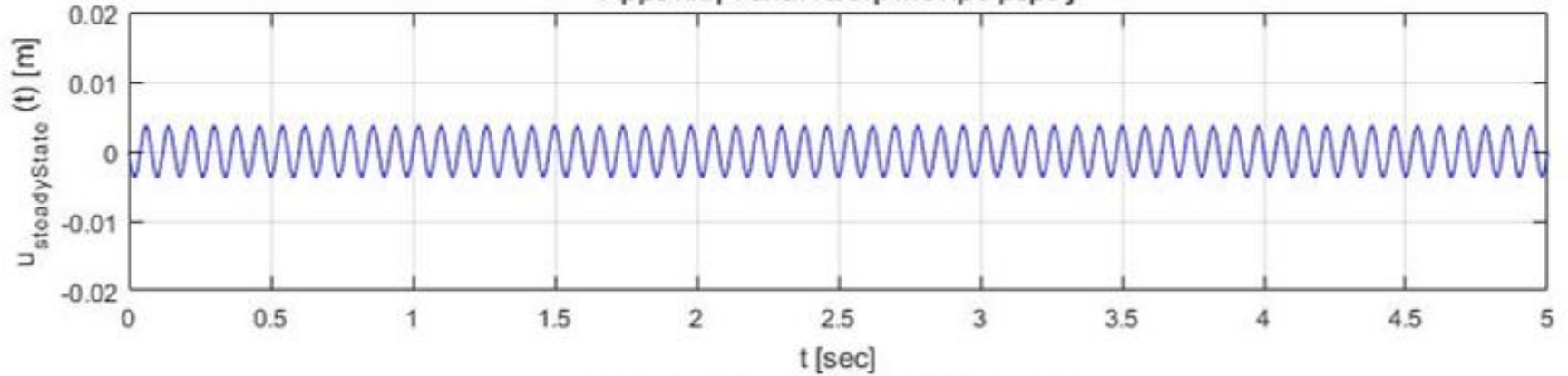
Η σχετική μετακίνηση, $u(t)$, λαμβάνοντας υπόψη μόνο το μόνιμο μέρος της ταλάντωσης, μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει του μέγιστου εύρους της μετακίνησης από στατική εφαρμογή του φορτίου, $(u_{\text{st}})_{\max} = P_{\max} / k$, ως εξής:

$$u(t) = u_{\text{SteadyState}}^{(t)} = (u_{\text{st}})_{\max} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

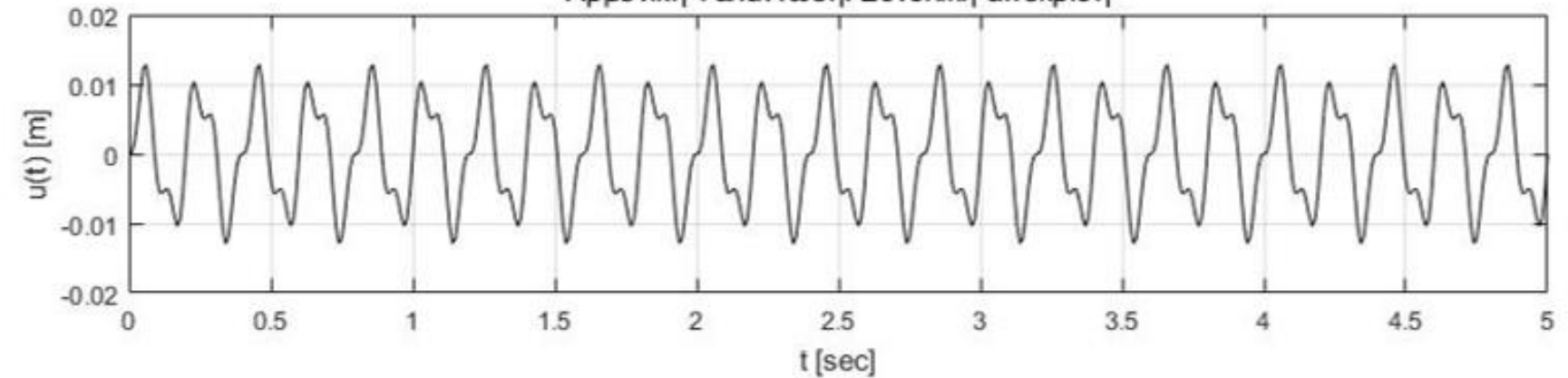
Αρμονική Ταλάντωση: Μεταβατικό μέρος



Αρμονική Ταλάντωση: Μόνιμο μέρος



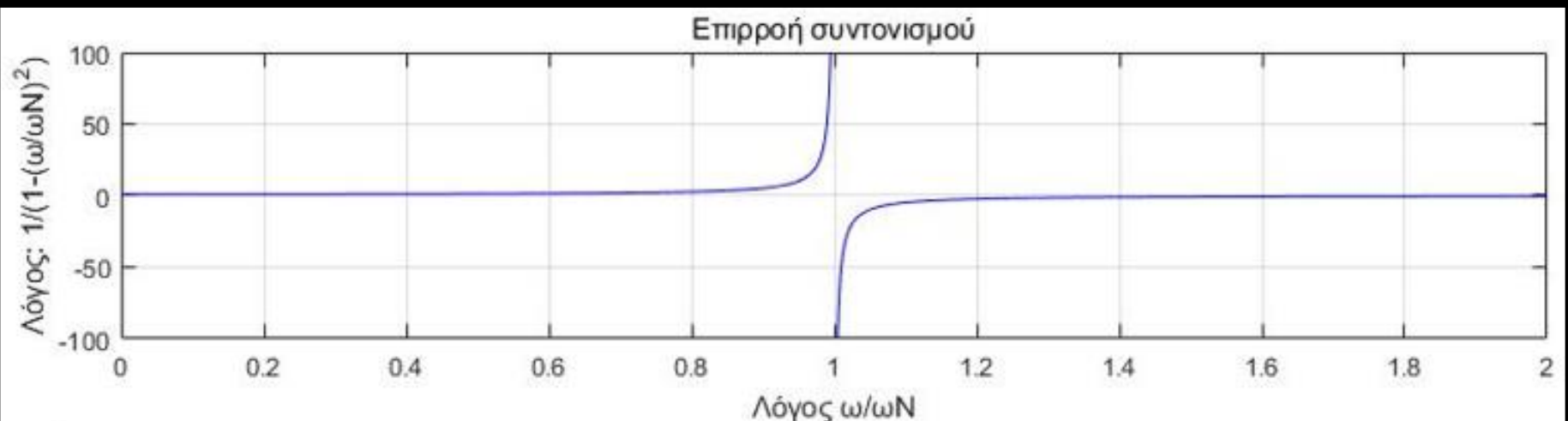
Αρμονική Ταλάντωση: Συνολική απόκριση



- Το μόνιμο μέρος της ταλάντωσης, το οποίο κυρίως μας απασχολεί, συμβολίζεται συνήθως ως $u_{SteadyState}$ και μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει του μέγιστου εύρους της μετακίνησης από στατική εφαρμογή του φορτίου:

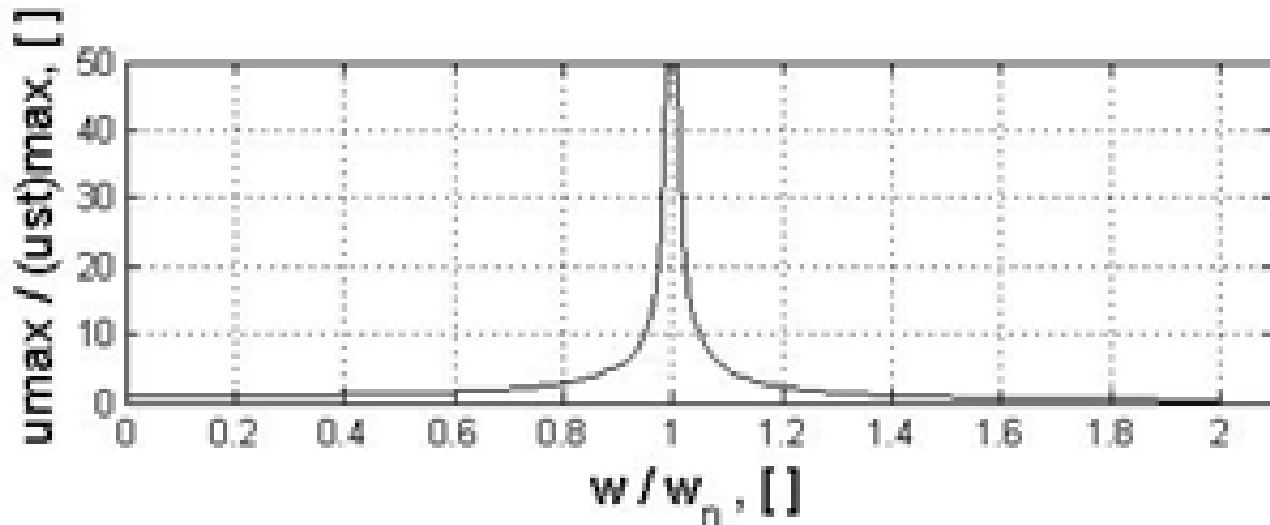
$$u(t) = u_{SteadyState}^{(t)} = (u_{st})_{\max} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει τις τιμές του λόγου $1/(1 - (\omega/\omega_n)^2)$, συναρτήσει του λόγου ω/ω_n .

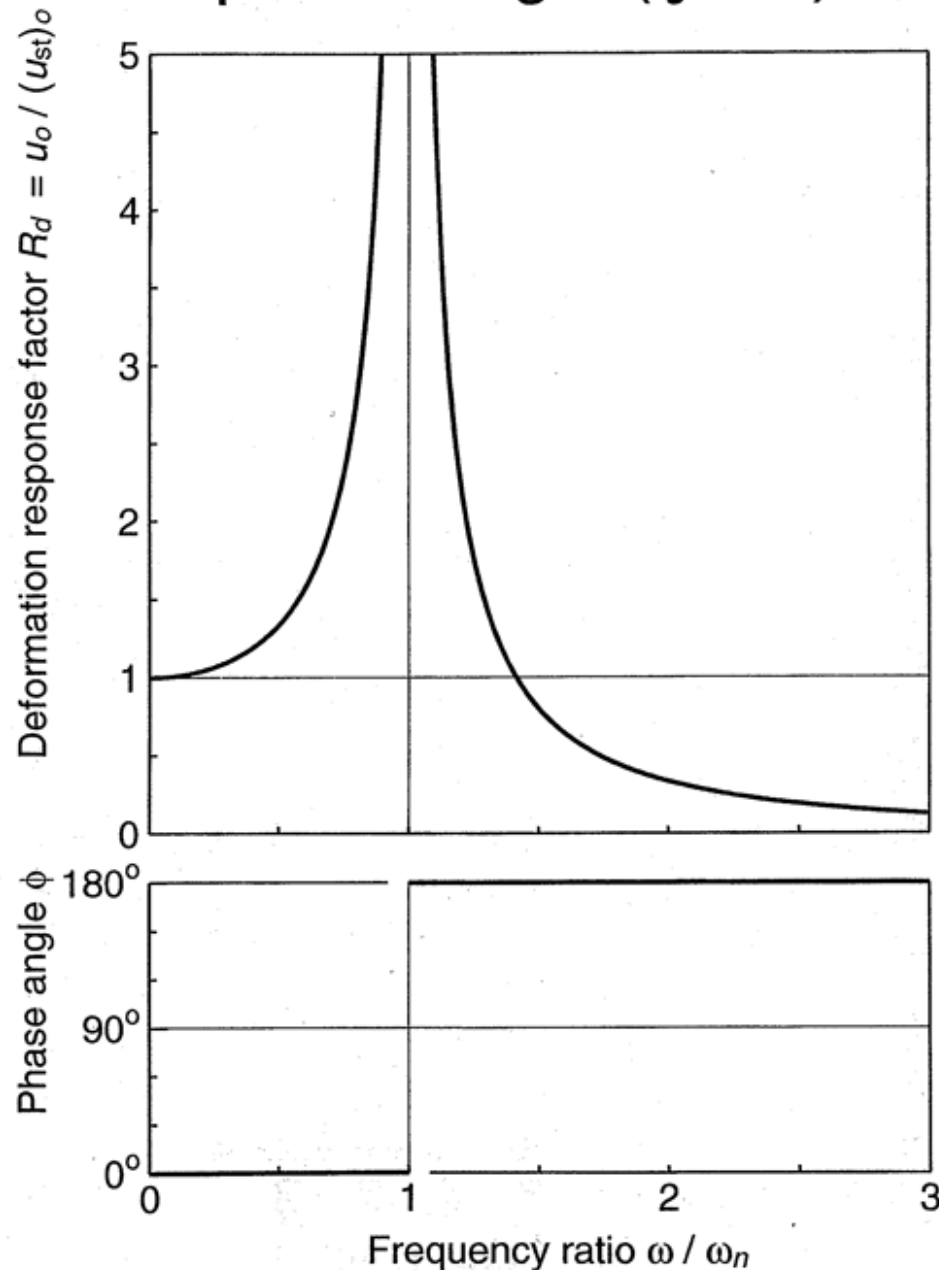


- Όταν η συχνότητα διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα, της κατασκευής, έχουμε συντονισμό και το εύρος ταλάντωσης αυξάνεται συνεχώς, θεωρητικά, προς το άπειρο όταν δεν υπάρχει απόσβεση. Στην πράξη, καθώς αυξάνεται σημαντικά το εύρος ταλάντωσης λόγω συντονισμού, σε κάποιο σημείο το υλικό διαρρέει και συνεπώς και η ιδιοσυχνότητα αλλάζει, με αποτέλεσμα την αποφυγή του συντονισμού. Επιπλέον, στις συνήθεις κατασκευές πάντα υπάρχει απόσβεση, η οποία αποτρέπει την επ' άπειρο αύξηση του εύρους ταλάντωσης στην περίπτωση συντονισμού.

$$u(t) = u_{\text{SteadyState}}^{(t)} = (u_{\text{st}})_{\text{max}} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$



Deformation response factor and phase angle ($\zeta = 0$)

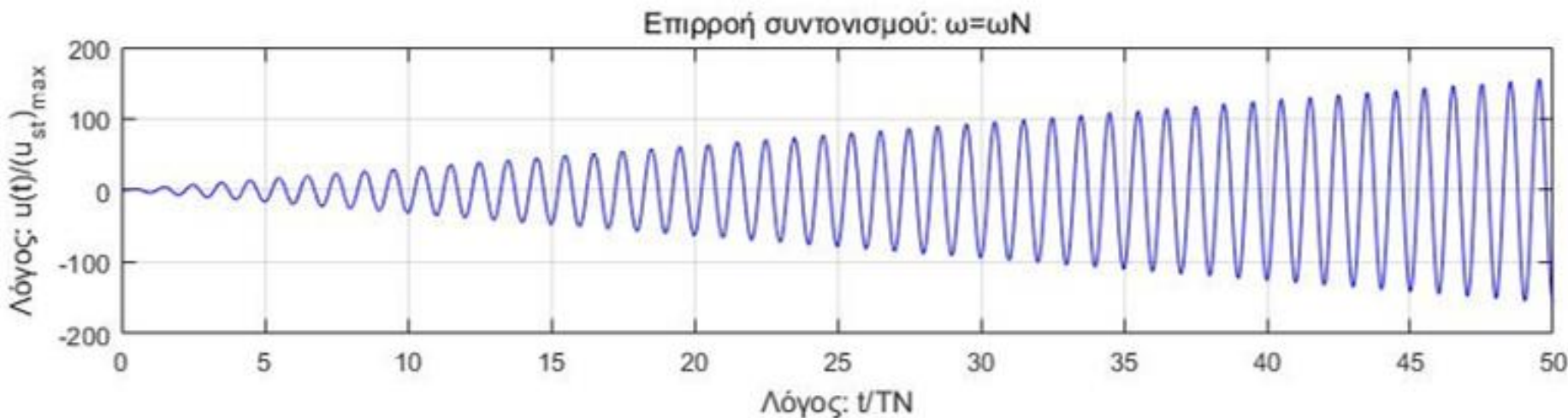


Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

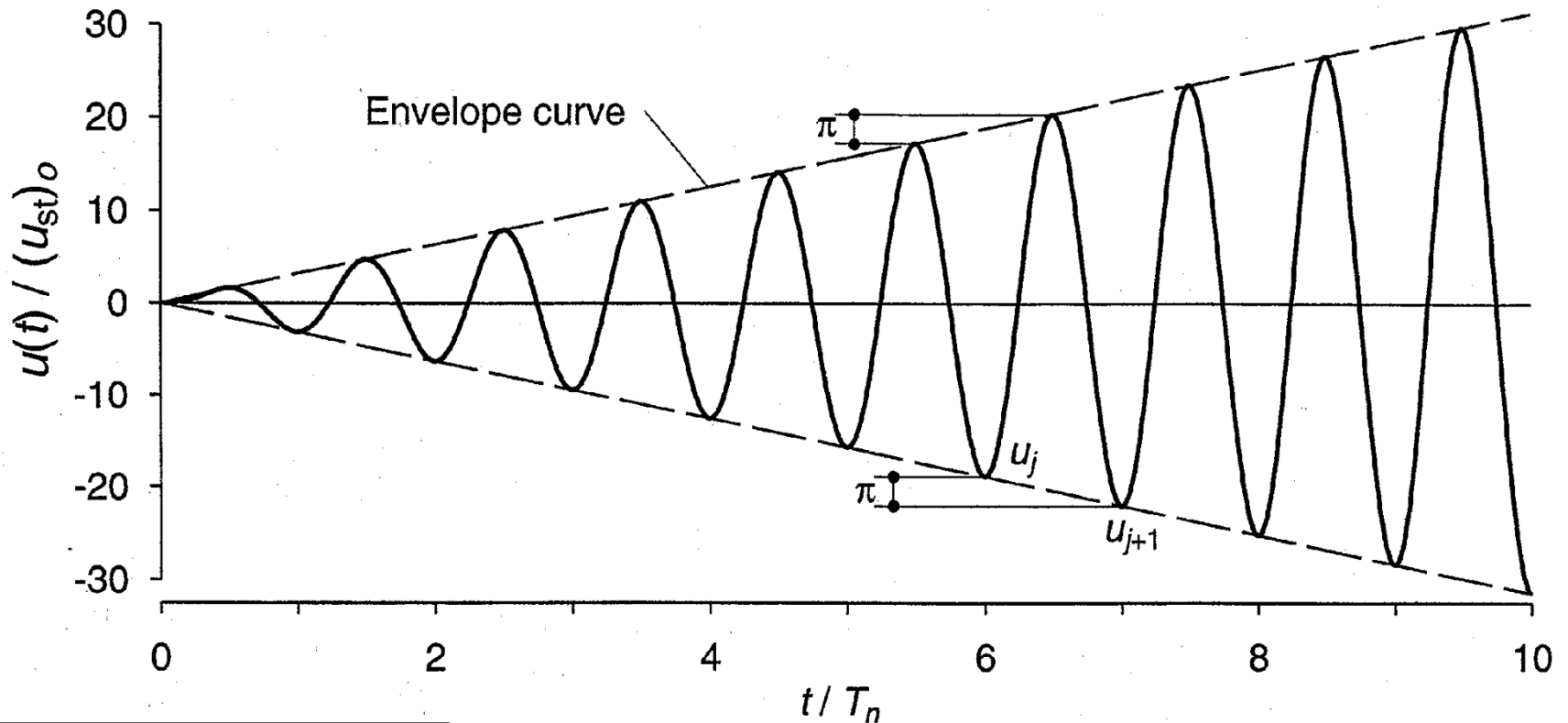
- Anil K. Chopra

Όταν η συχνότητα διέγερσης, ω , ισούται με την φυσική ιδιοσυχνότητα της κατασκευής, ω_n , έχουμε συντονισμό και το εύρος ταλάντωσης θεωρητικά αυξάνεται συνεχώς και απεριόριστα, προς το άπειρο όταν δεν υπάρχει οποιαδήποτε απόσβεση ενέργειας, όπως φαίνεται πιο κάτω γράφημα.

$$u(t) = u_{\text{SteadyState}}^{(t)} = (u_{\text{st}})_{\text{max}} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$



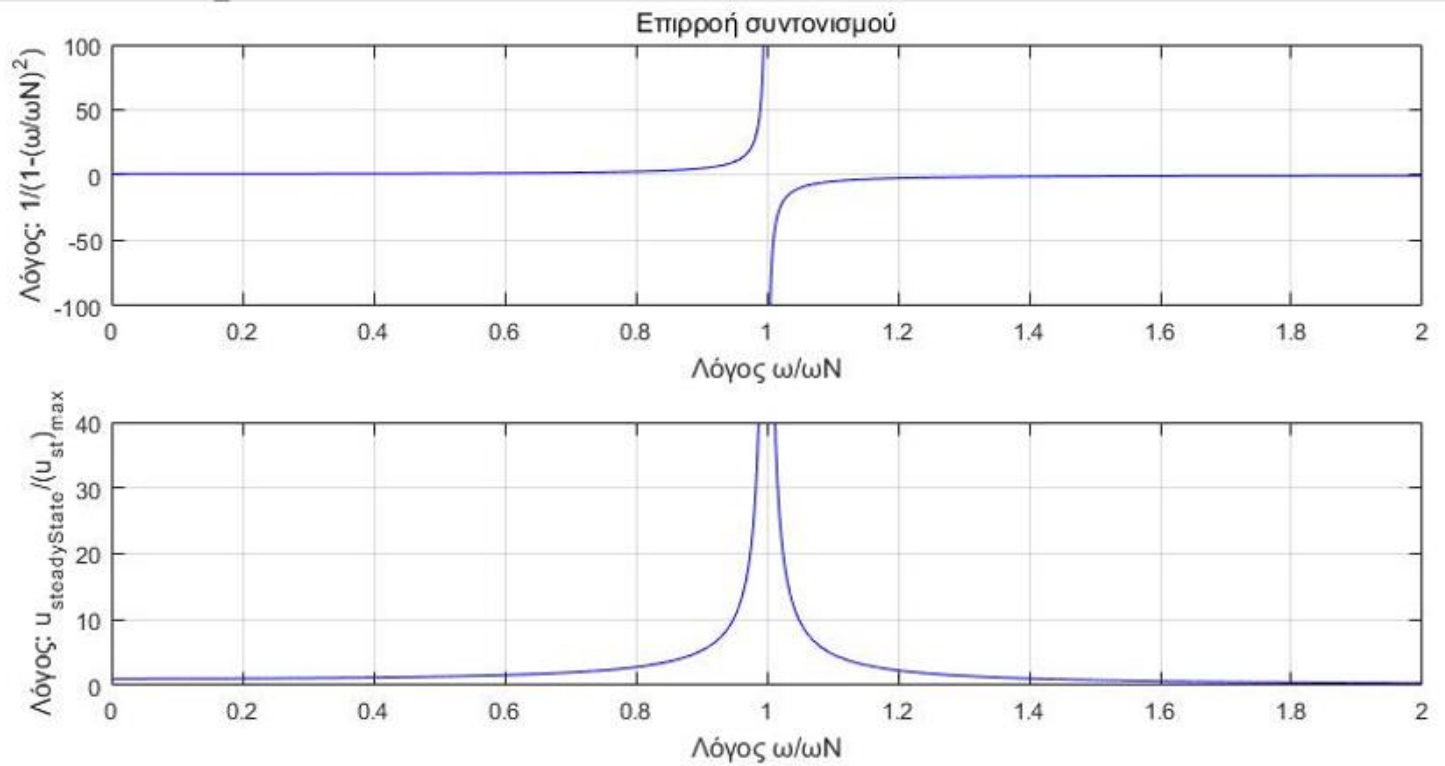
Response to sinusoidal force with $\omega = \omega_n$ ($\zeta = 0$)



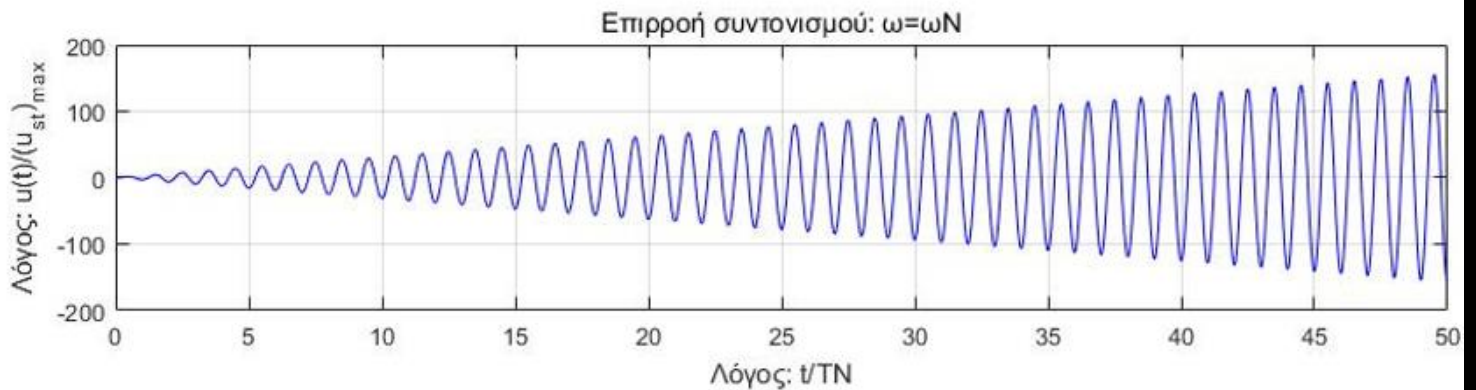
Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*

Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.



Σχήμα 11.16: (α) λόγος $1/(1-(\omega/\omega_n)^2)$ (β) λόγος $u_{\text{max}}/(u_{\text{st}})_{\text{max}}$.



$$u(t) = u_{\text{SteadyState}}^{(t)} = (u_{\text{st}})_{\text{max}} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Όμως, στην πράξη, καθώς αυξάνεται σημαντικά το εύρος ταλάντωσης λόγω συντονισμού, σε κάποιο σημείο το υλικό διαρρέει και συνεπώς και η ιδιοσυχνότητα αλλάζει, με αποτέλεσμα την αποφυγή του συντονισμού. Επιπλέον, στις συνήθεις κατασκευές πάντα υπάρχουν κάποιοι μηχανισμοί απόσβεσης ενέργειας, η οποία, ακόμη και όταν είναι πολύ μικρή, αποτρέπει την επ' άπειρο αύξηση του εύρους ταλάντωσης στην περίπτωση συντονισμού, δηλαδή ταύτισης της φυσικής ιδιοσυχνότητας με τη συχνότητα διέγερσης.

Αρμονική ταλάντωση ΜΒΣ με απόσβεση

Η εξίσωση κίνησης ενός ΜΒΣ με ιξώδη απόσβεση, η οποία αντιπροσωπεύεται από το συντελεστή απόσβεσης, c , υπό αρμονική φόρτιση έχει την πιο κάτω μορφή:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Η γενική λύση, $u(t)$, αυτής της ΔΕ προκύπτει αθροίζοντας τη συμπληρωματική, $u_c(t)$, και τη μερική, $u_p(t)$, λύση: $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$

με συμπληρωματική λύση : $u_c(t) = (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$ και
μερική λύση: $u_p(t) = D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$D = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

$$E = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{-\zeta \cdot \omega/\omega_n}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_c(t) = (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$$

$$u_p(t) = D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$D = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

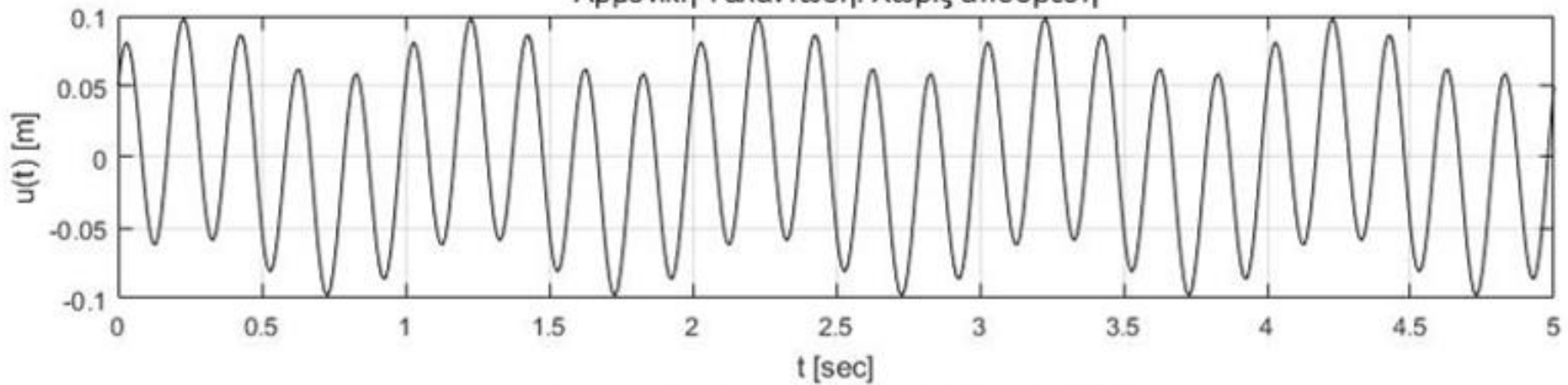
$$E = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{-\zeta \cdot \omega/\omega_n}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης A και B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $u(0)$ και $\dot{u}(0)$.

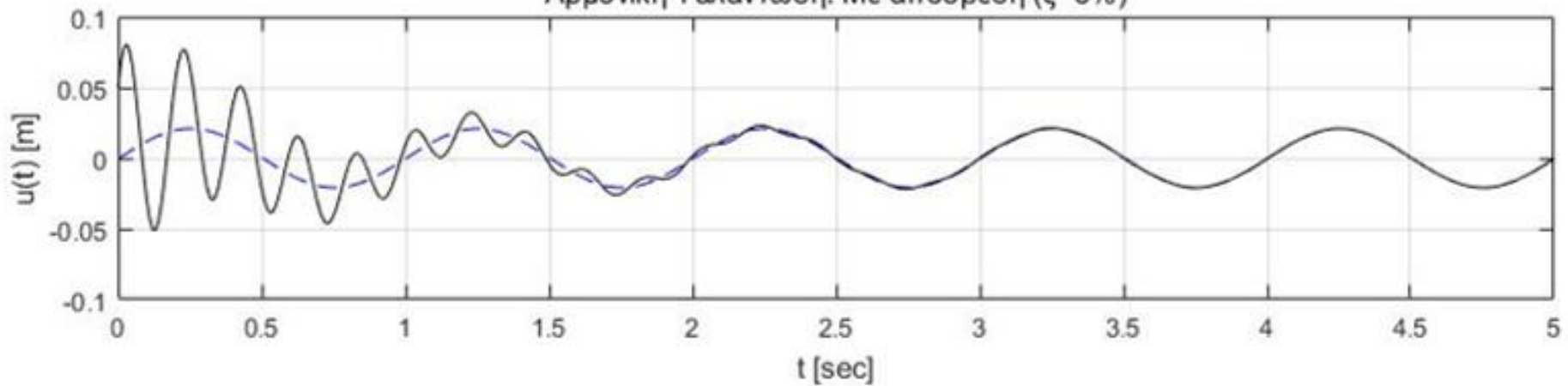
Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει την απόκριση ενός ΜΒΣ υπό αρμονική διέγερση με $u(0) = 0.05\text{m}$, $\dot{u}(0) = 2\text{m/sec}$ και $\omega/\omega_n = 0.2$, τόσο στην περίπτωση χωρίς απόσβεση (πάνω γραφική παράσταση) όσο και στην περίπτωση με ιξώδη απόσβεση, $\zeta = 5\%$ (κάτω γραφική παράσταση).

Στην περίπτωση της αρμονικής ταλάντωσης ενός ΜΒΣ με απόσβεση, το μόνιμο μέρος (steady state) της ταλάντωσης παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή, το οποίο όπως φαίνεται και στο σχήμα ταυτίζεται με τη συνολική απόκριση μετά από τους πρώτους κύκλους ταλάντωσης, κατά τους οποίους αποσβένεται γρήγορα το μεταβατικό μέρος (transient) της ταλάντωσης. Για αυτό το λόγο μας ενδιαφέρει το μόνιμο μέρος (steady state) μιας ταλάντωσης υπό αρμονική διέγερση.

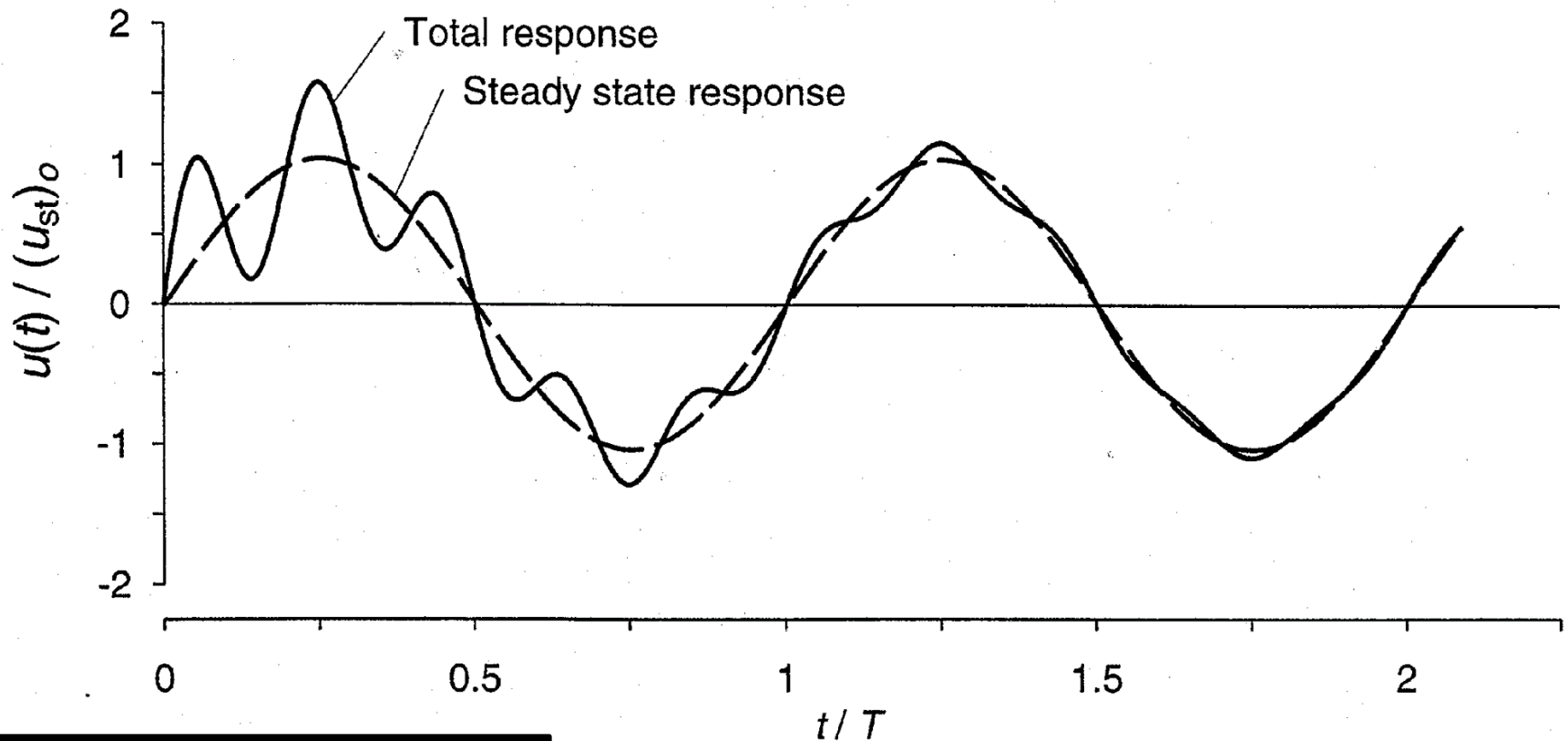
Αρμονική Ταλάντωση: Χωρίς απόσβεση



Αρμονική Ταλάντωση: Με απόσβεση ($\zeta=5\%$)



Response of damped system to harmonic force;
 $\omega / \omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0$, and $\dot{u}(0) = \omega_n \rho_o / k$



Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

Theory and Applications to Earthquake Engineering, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_c(t) = (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$$

$$u_p(t) = D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Το μεταβατικό μέρος (transient) της απόκρισης, το οποίο οφείλεται στις αρχικές συνθήκες, φθίνει εκθετικά λόγω απόσβεσης ενέργειας και σε σύντομο χρονικό διάστημα, μετά τους πρώτους κύκλους ταλάντωσης, παραμένει μόνο το μόνιμο μέρος (steady state) της ταλάντωσης, το οποίο αντιστοιχεί στη μερική λύση, $u_p(t)$. Σε αυτή την περίπτωση η φυσική ιδιοσυχνότητα, ω_n , είναι 5 φορές πιο μεγάλη από τη συχνότητα διέγερσης, ω , ενώ ο λόγος ιξώδους απόσβεσης, ζ , επιλέχθηκε να είναι ίσος με 5 %.

$$u_c(t) = (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t}$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u_p(t) = D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

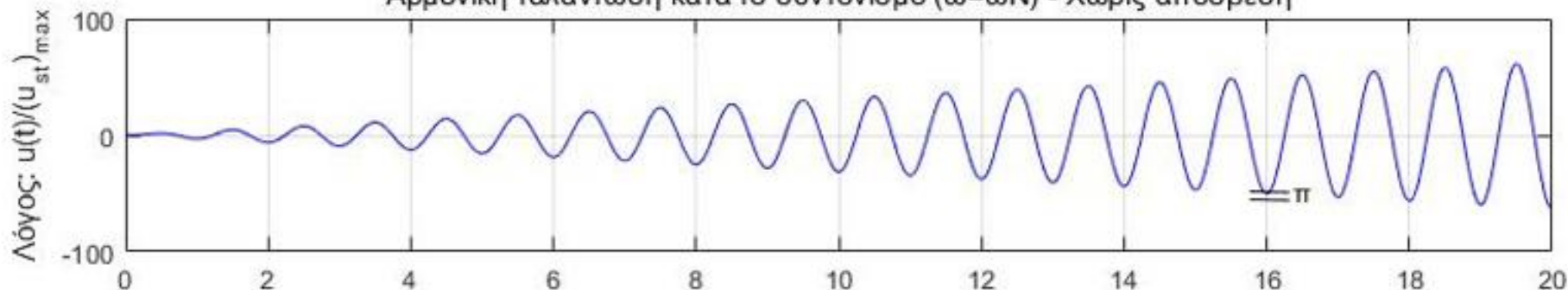
$$D = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

$$E = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{-\zeta \cdot \omega/\omega_n}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

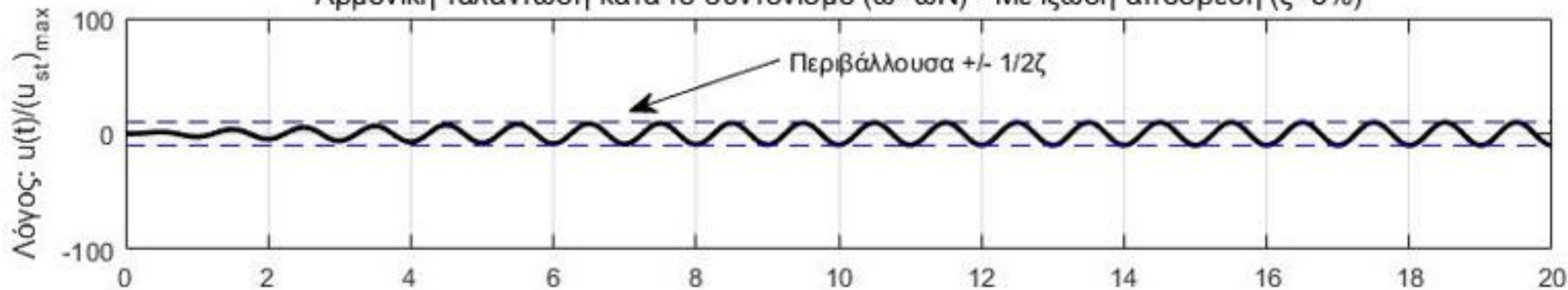
Κατά το συντονισμό, αντί η μετακίνηση να αυξάνει επ' άπειρο χωρίς όριο, όπως στην περίπτωση ενός ΜΒΣ χωρίς απόσβεση, όταν υπάρχει απόσβεση το εύρος του λόγου της μόνιμης ταλάντωσης, u_{\max}^{steady} , προς το εύρος της μετακίνησης από στατική εφαρμογή του φορτίου, $(u_{\text{st}})_{\max}$, περιβάλλεται από τις τιμές $\pm 1/2\zeta$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Επιπλέον, το επόμενο σχήμα παρέχει τη χρονοϊστορία του λόγου $u/(u_{\text{st}})_{\max}$ κατά την αρμονική ταλάντωση στην περίπτωση συντονισμού ($\omega = \omega_N$), χωρίς και με απόσβεση ($\zeta = 5\%$) συναρτήσει του λόγου t/T_N .

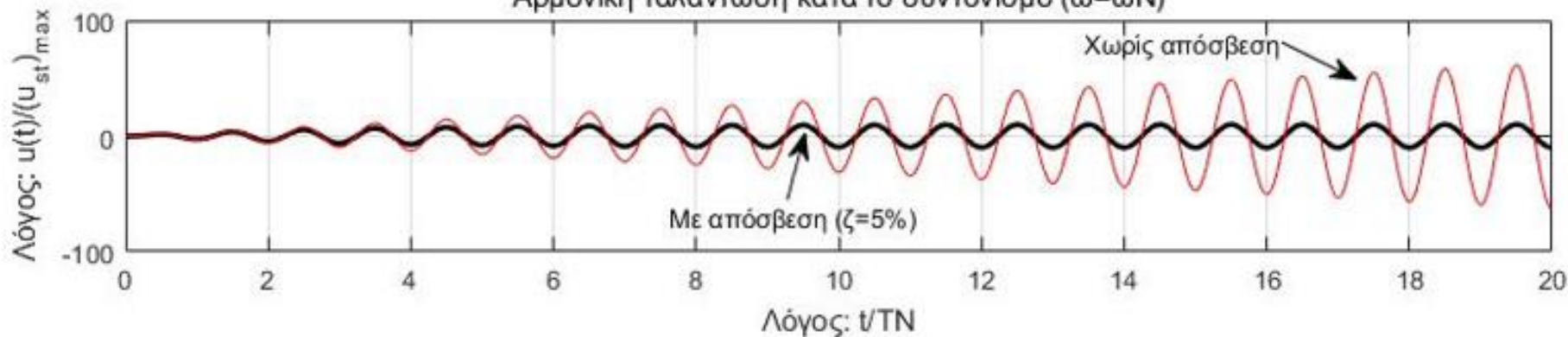
Αρμονική ταλάντωση κατά το συντονισμό ($\omega=\omega_N$) - Χωρίς απόσβεση



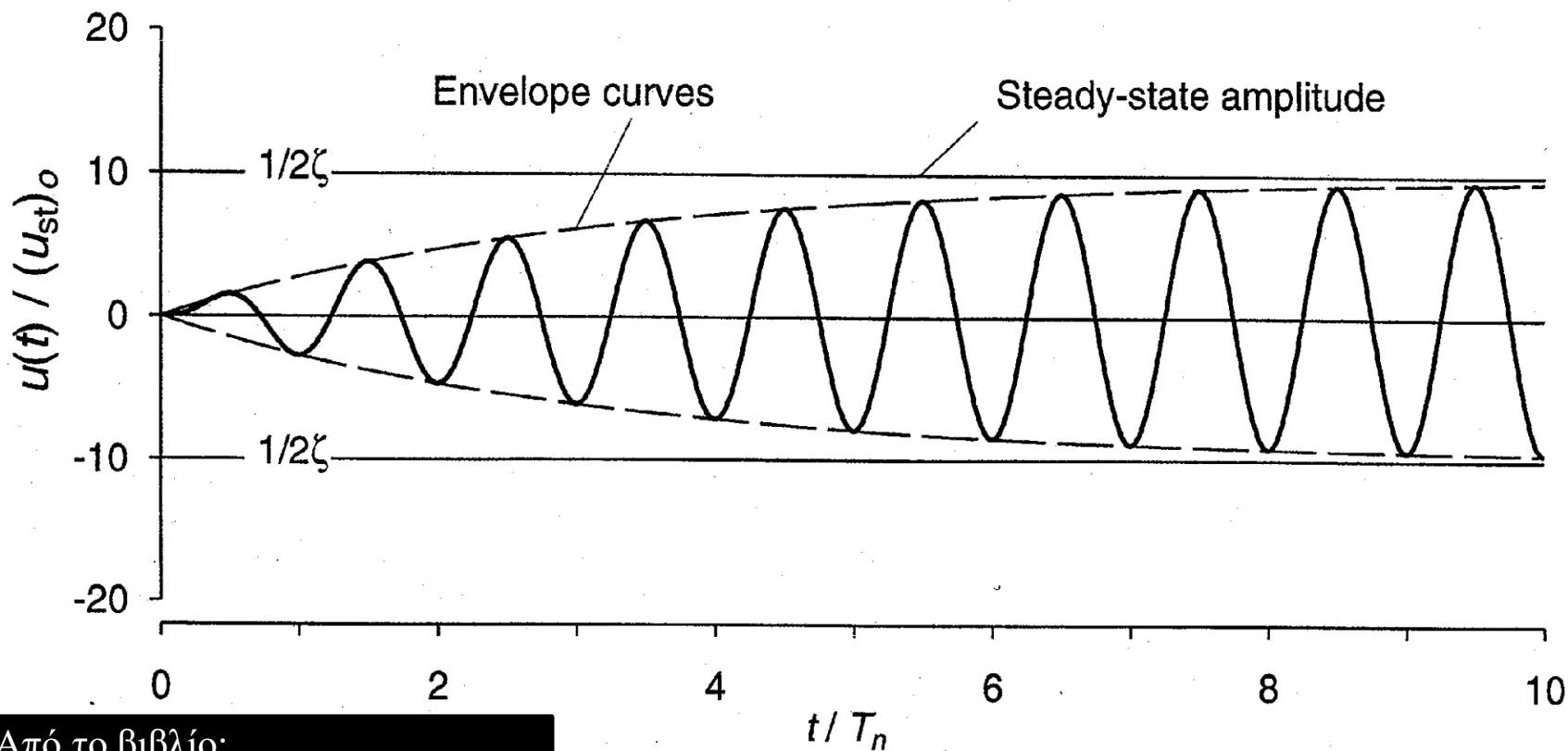
Αρμονική ταλάντωση κατά το συντονισμό ($\omega=\omega_N$) - Με ιξώδη απόσβεση ($\zeta=5\%$)



Αρμονική ταλάντωση κατά το συντονισμό ($\omega=\omega_N$)



Response to sinusoidal force with $\omega = \omega_n$ ($\zeta = 5\%$)

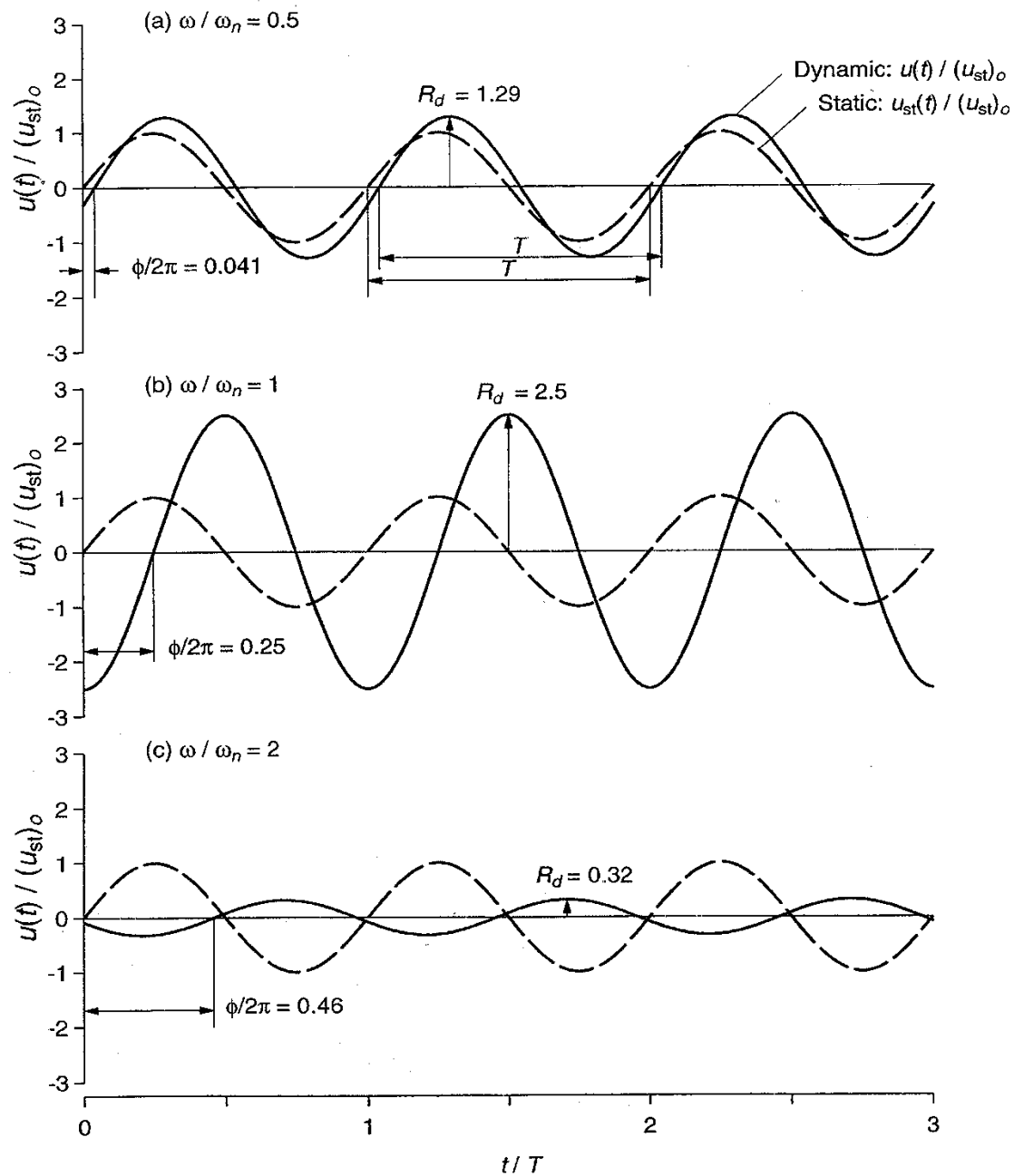


Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Steady state harmonic response ($\zeta = 0.2$)



Από το βιβλίο:
 “Dynamics of Structures:
 Theory and Applications
 to Earthquake
 Engineering”

$$u_p(t) = D \cdot \sin(\omega \cdot t) + E \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$D = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

$$E = \frac{P_{\max}}{k} \cdot \frac{-\zeta \cdot \omega/\omega_n}{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}$$

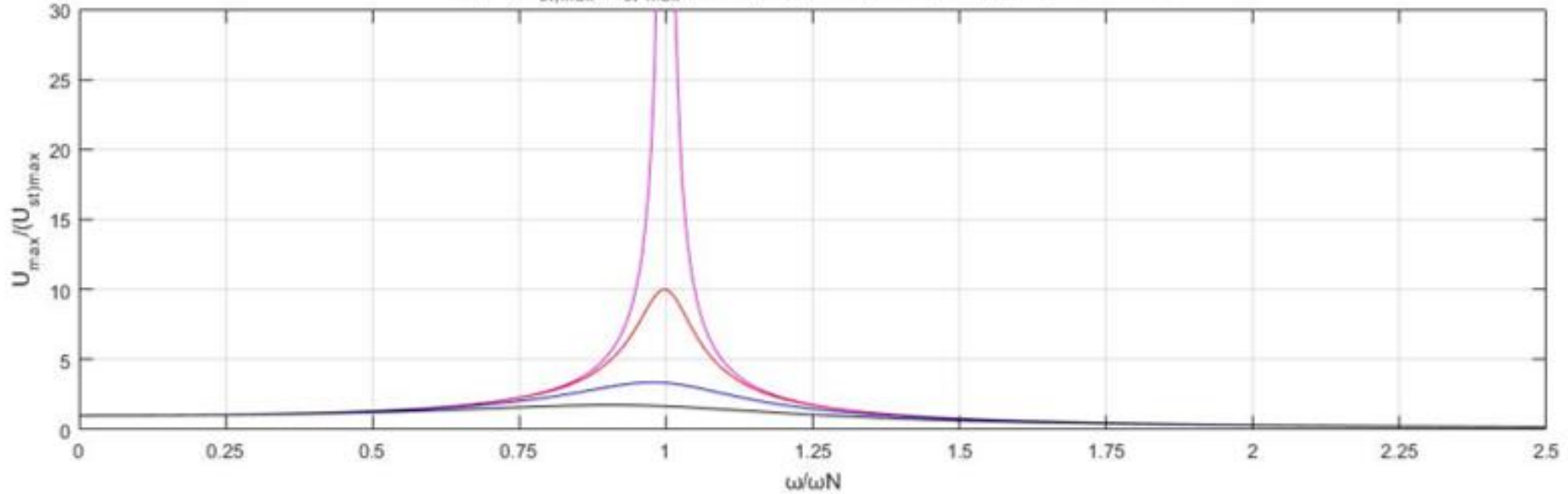
Το εύρος του μόνιμου μέρους της απόκρισης λόγω αρμονικού φορτίου ισούται με:

$$u_{\max}^{\text{steady}} = \frac{P_{\max}/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}} = \frac{(u_{\text{st}})_{\max}}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}}$$

Σχεδιάζοντας, στη συνέχεια, το λόγο $u_{\max}^{\text{steady}} / (u_{\text{st}})_{\max}$ συναρτήσει του λόγου ω/ω_n , προκύπτει η καμπύλη συχνότητας-απόκρισης για συγκεκριμένο λόγο απόσβεσης. Στο συγκεκριμένο σχήμα παρέχονται οι καμπύλες του λόγου $u_{\max}^{\text{steady}} / (u_{\text{st}})_{\max}$ συναρτήσει του (ω/ω_n) , για 4 διαφορετικούς λόγους εξώδους απόσβεσης: 0, 5, 15 και 30 %. Αυτός ο λόγος ονομάζεται και συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης, αφού εκφράζει πόσο μεγαλύτερη είναι η μέγιστη ταλάντωση, λαμβάνοντας υπόψη το παραμένον μέρος, σε σχέση με το αντίστοιχο εύρος της μετακίνησης από στατική εφαρμογή του φορτίου, $(u_{\text{st}})_{\max}$.

Ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης ουσιαστικά μας παρέχει το πόσο πιο μεγάλο είναι το εύρος ταλάντωσης χρησιμοποιώντας δυναμική ανάλυση, από το εύρος ταλάντωσης εάν το φορτίο θεωρηθεί ότι επιβάλλεται στατικά και χρησιμοποιηθεί στατική ανάλυση, αντί της δυναμικής.

Λόγος $U_{st,max}/(U_{st,max})$ για λόγους ιξώδους απόσβεσης 0, 5, 15 και 30 %



$$u_{\max}^{\text{steady}} = \frac{P_{\max}/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}} = \frac{(u_{st})_{\max}}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}}$$

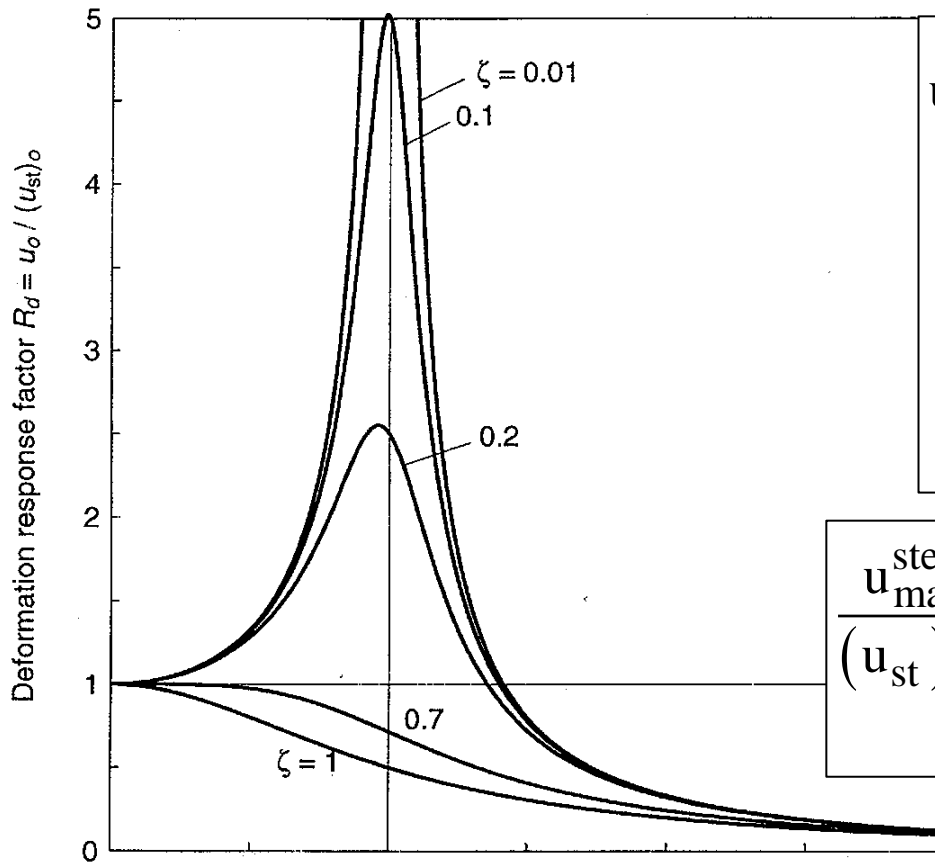
$$\frac{u_{\max}^{\text{steady}}}{(u_{st})_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στο σχήμα, όταν ο λόγος (ω/ω_n) είναι πολύ μικρός τότε ο ρυθμός επιβολής του αρμονικού φορτίου είναι τόσο αργός όπου το εύρος της μόνιμης ταλάντωσης, u_{\max}^{steady} , ισούται προσεγγιστικά με τη μέγιστη μετακίνηση $(u_{\text{st}})_{\max}$ για στατική επιβολή του φορτίου, $u_{\max}^{\text{steady}} \simeq (u_{\text{st}})_{\max}$.

Αντιθέτως, όταν ο λόγος ω/ω_n είναι πολύ μεγάλος τότε ο ρυθμός επιβολής του αρμονικού φορτίου είναι τόσο γρήγορος που ο φορέας δεν προφταίνει να αποκριθεί και το εύρος της μόνιμης ταλάντωσης u_{\max}^{steady} είναι μικρότερο της στατικής απόκρισης και τείνει στο μηδέν αφού $u_{\max}^{\text{steady}} \simeq \frac{(u_{\text{st}})_{\max}}{(\omega/\omega_n)^2}$.

Όταν $\omega = \omega_n$ έχουμε συντονισμό, με συνέπεια μεγάλες τιμές του εύρους της μόνιμης ταλάντωσης u_{\max}^{steady} , ιδιαίτερα όσο πιο μικρός είναι ο λόγος ιξώδους απόσβεσης, ζ , αφού $u_{\max}^{\text{steady}} \simeq (u_{\text{st}})_{\max} / 2 \cdot \zeta$.

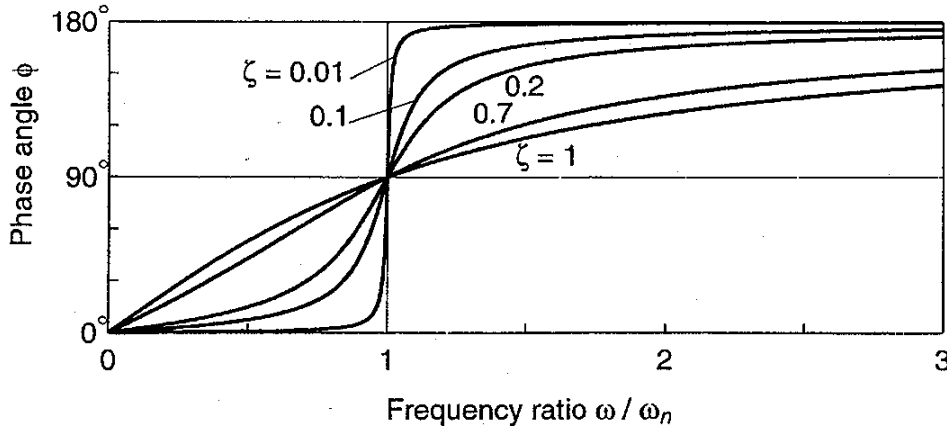
Deformation response factor and phase angle



$$u_{\max}^{\text{steady}} = \frac{P_{\max} / k}{\sqrt{\left(1 - (\omega / \omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)^2}}$$

$$= \frac{(u_{st})_{\max}}{\sqrt{\left(1 - (\omega / \omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)^2}}$$

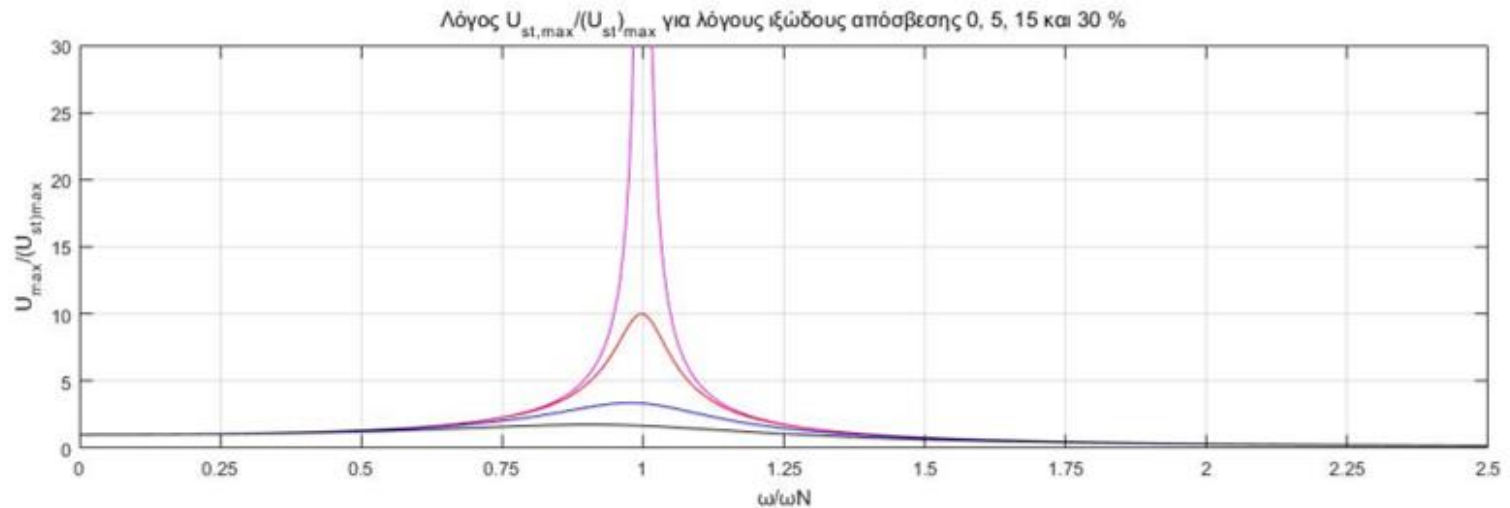
$$\frac{u_{\max}^{\text{steady}}}{(u_{st})_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega / \omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)^2}}$$



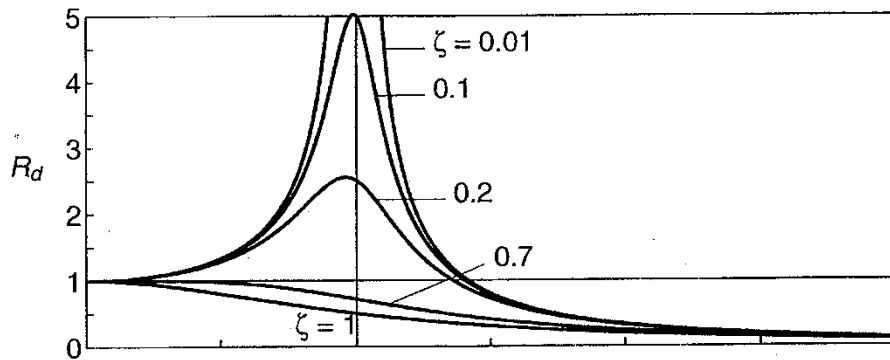
Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

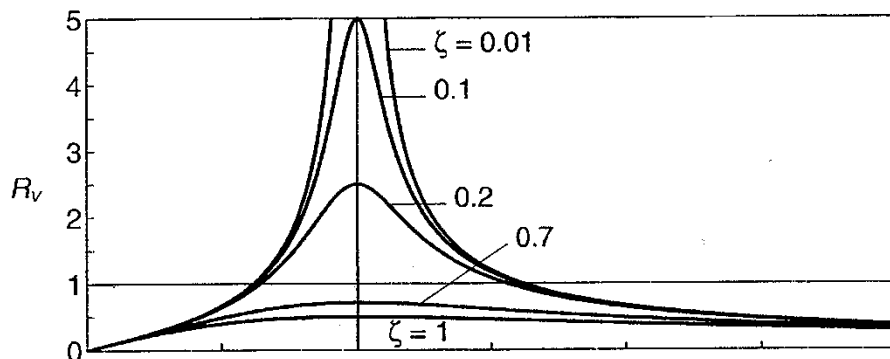
Για ένα ΜΒΣ χωρίς απόσβεση ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα διέγερσης, ω , ισούται με την ιδιοσυχνότητα, ω_n , ενώ όταν υπάρχει απόσβεση (η οποία μπορεί να εκτιμηθεί από την καμπύλη συχνότητας-απόκρισης μετακινήσεων) οι συχνότητες συντονισμού είναι: $\omega_n \cdot \sqrt{1-2 \cdot \zeta^2}$ για τις μετακινήσεις, ω_n για τις ταχύτητες και $\omega_n / \sqrt{1-2 \cdot \zeta^2}$ για τις επιταχύνσεις. Δηλαδή, τα μέγιστα των καμπυλών συχνότητας-απόκρισης για τις μετακινήσεις είναι μετατοπισμένα προς τα αριστερά του $\omega / \omega_n = 1$, ενώ τα μέγιστα των καμπυλών συχνότητας-απόκρισης για τις επιταχύνσεις είναι μετατοπισμένα προς τα δεξιά του $\omega / \omega_n = 1$. Αυτά μπορούν να αποδειχθούν παραγωγίζοντας τις σχέσεις για τις μετακινήσεις και επιταχύνσεις, αντίστοιχα, ως προς το λόγο ω / ω_n και θέτοντας τις ίσες με μηδέν για να προσδιοριστούν τα σχετικά ακρότατα των μετακινήσεων και επιταχύνσεων.



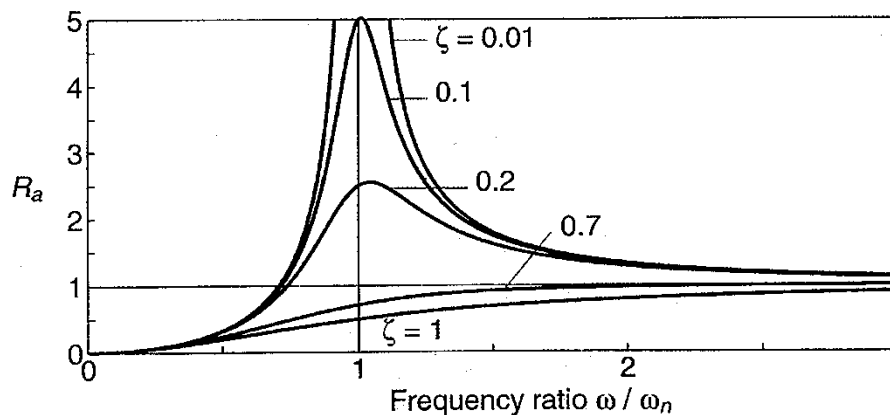
Deformation, velocity and acceleration response factors



(a)



(b)

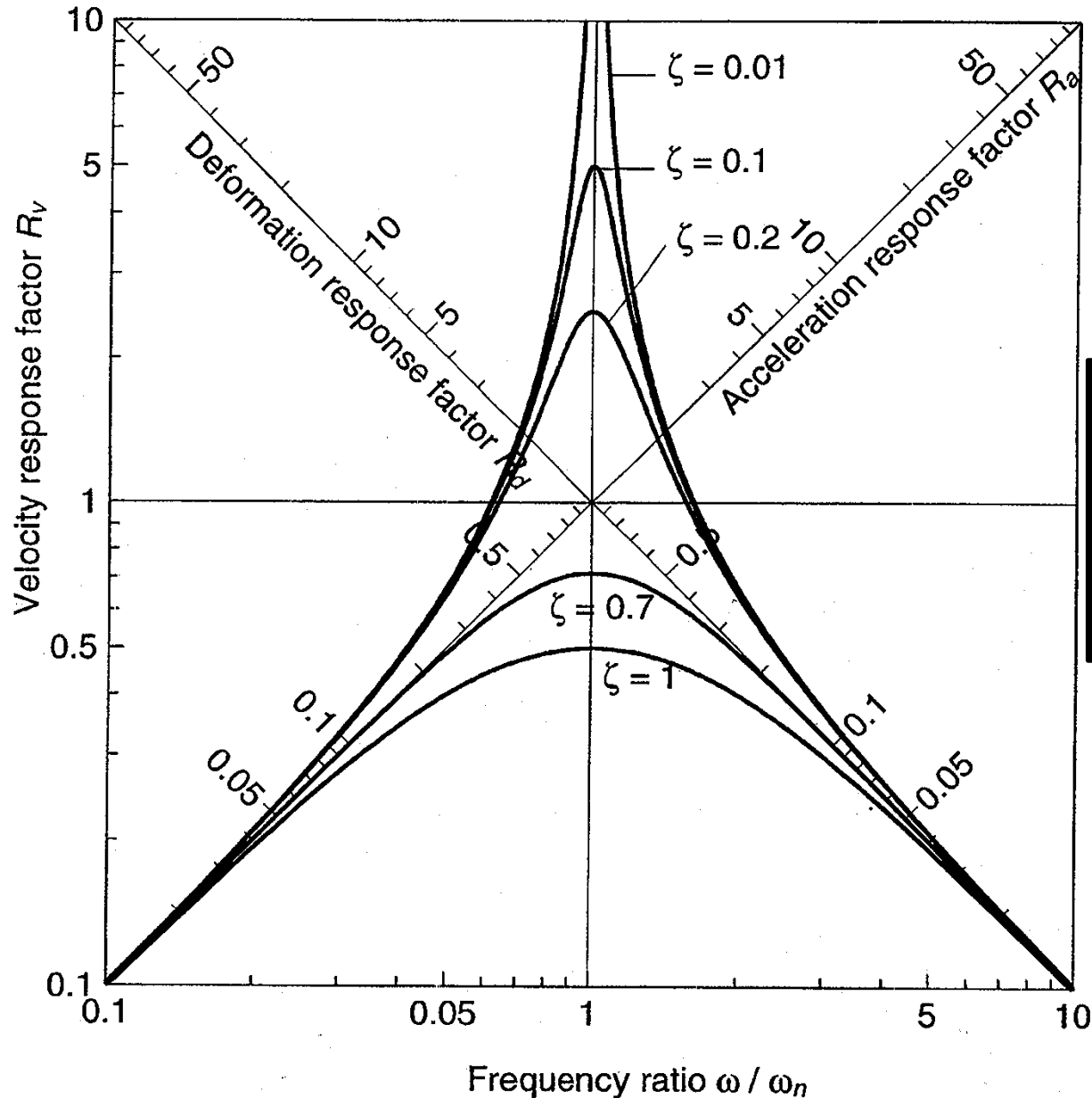


(c)

Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures:
Theory and Applications
to Earthquake
Engineering*”

- Anil K. Chopra

Four-way logarithmic plot of R_d , R_v , and R_a

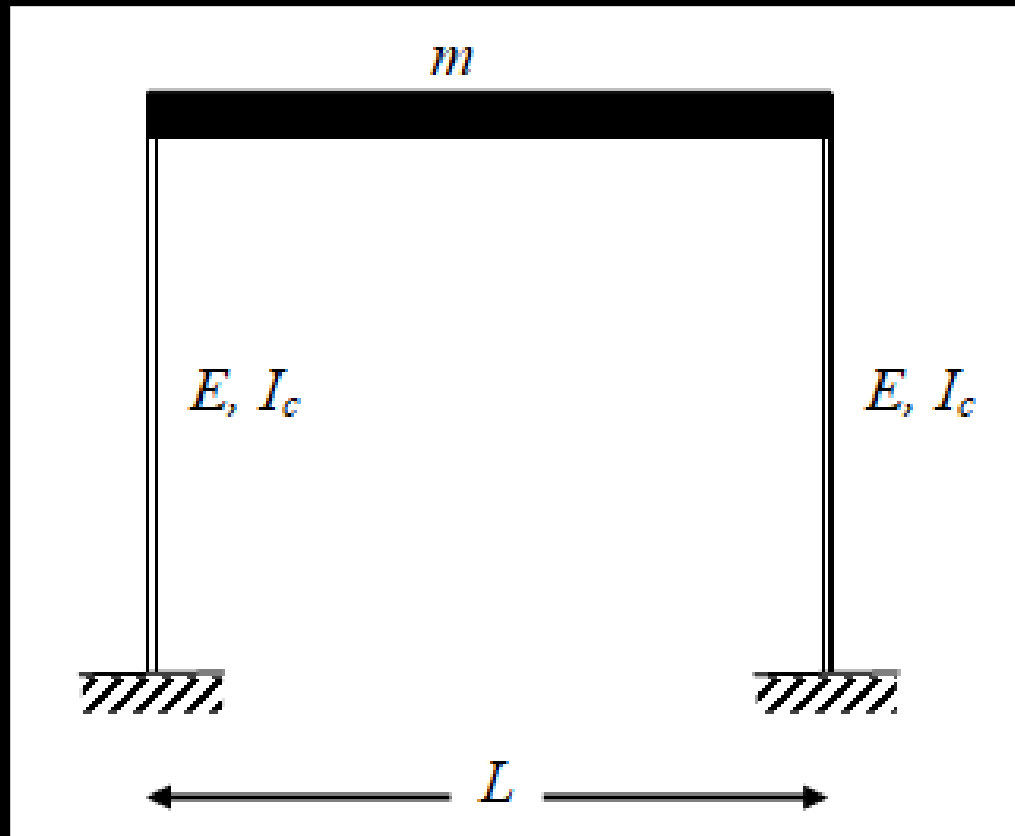


Από το βιβλίο:
*“Dynamics of Structures:
 Theory and Applications
 to Earthquake
 Engineering”*

- Anil K. Chopra

Παράδειγμα

Υπολογίστε το ποσοστό (λόγο) απόσβεσης του πιο κάτω πλαισίου, το οποίο μπορεί να εξιδανικευτεί σαν ΜΒΣ, όταν σε μια δοκιμή εξαναγκασμένης ταλάντωσης με αρμονική διέγερση, το εύρος ταλάντωσης κατά το συντονισμό είναι 5 φορές μεγαλύτερο από το εύρος της ταλάντωσης σε 25% μεγαλύτερη συχνότητα διέγερσης.



Ο λόγος του εύρους μόνιμης ταλάντωσης, u_{\max}^{steady} , προς το εύρος της μετακίνησης από στατική εφαρμογή του φορτίου, $(u_{\text{st}})_{\max}$, δίνεται από το συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης, συναρτήσει του λόγου της συχνότητας διέγερσης προς την ιδιοσυχνότητα και του λόγου απόσβεσης:

$$\frac{u_{\max}^{\text{steady}}}{(u_{\text{st}})_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega/\omega_n)^2}}$$

Εφόσον η μέγιστη μετακίνηση της αρμονικής ταλάντωσης κατά το συντονισμό $\omega = \omega_n$ είναι 5 φορές μεγαλύτερη από το εύρος ταλάντωσης όταν η συχνότητα διέγερσης είναι 25 % μεγαλύτερη, δηλαδή $\omega = 1.25 \cdot \omega_n$, ισχύει η πιο κάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{u_{\max}^{\text{steady}}}{(u_{\text{st}})_{\max}} \Big|_{\omega=\omega_n} &= 5 \cdot \frac{u_{\max}^{\text{steady}}}{(u_{\text{st}})_{\max}} \Big|_{\omega=1.25\omega_n} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (1)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot 1)^2}} &= \frac{5}{\sqrt{\left(1 - (1.25)^2\right)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot 1.25)^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (2 \cdot \zeta)^2}} = \frac{5}{\sqrt{\left(1 - (1.25)^2\right)^2 + (2.5 \cdot \zeta)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \zeta} = \frac{5}{\sqrt{0.3164 + 6.25 \cdot \zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \zeta^2} = \frac{25}{0.3164 + 6.25 \cdot \zeta^2}$$

$$\Rightarrow 0.3164 + 6.25 \cdot \zeta^2 = 100 \cdot \zeta^2$$

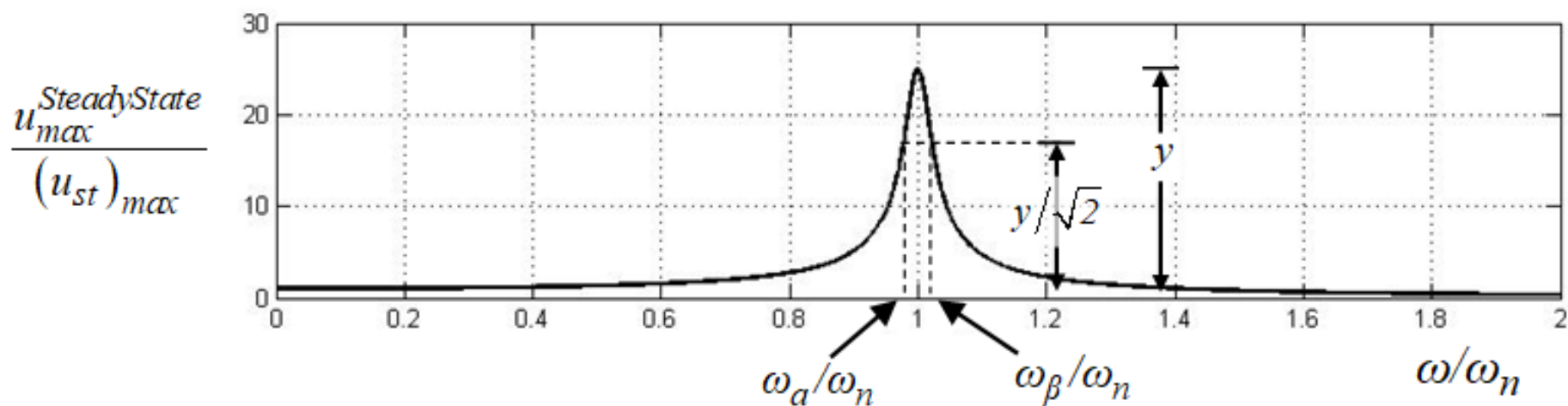
$$\Rightarrow 0.3164 = 93.75 \cdot \zeta^2$$

$$\Rightarrow \zeta^2 = 93.75 / 0.3164 = 0.003375$$

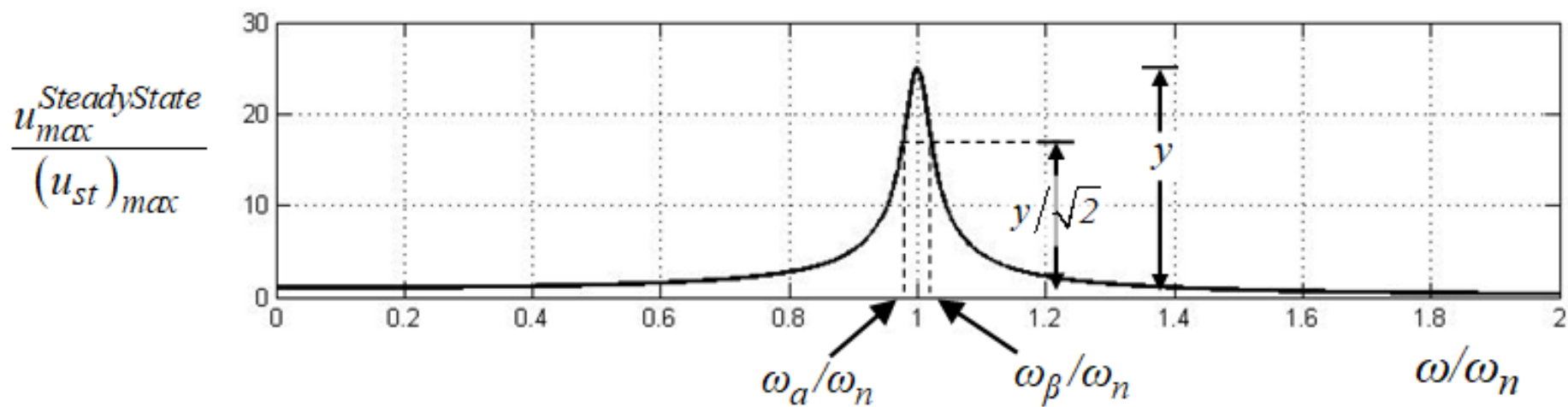
$$\Rightarrow \zeta = 0.0581 = 5.81\%$$

Ο λόγος ιξώδους απόσβεσης ενός ΜΒΣ μπορεί να εκτιμηθεί από τις μέγιστες αποκρίσεις σε αρμονικές ταλαντώσεις με μεταβαλλόμενη τη συχνότητα διέγερσης, σχεδιάζοντας το διάγραμμα του λόγου $u_{\max}^{\text{steady}} / (u_{\text{st}})_{\max}$ συναρτήσει του λόγου (ω/ω_n) .

Έτσι, με ένα μηχάνημα που επιβάλλει αρμονική διέγερση με μεταβαλλόμενη συχνότητα διέγερσης, για κάθε συχνότητα διέγερσης, αφού επιβληθεί η διέγερση και παρέλθουν αρκετοί κύκλοι ταλάντωσης ώστε να αποσβεστεί το μεταβατικό μέρος, προσδιορίζεται το μέγιστο εύρος ταλάντωσης. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται η καμπύλη του λόγου του μέγιστου εύρους παραμένουσας ταλάντωσης προς τη μέγιστη μετακίνηση $(u_{\text{st}})_{\max}$ για στατική επιβολή του φορτίου.



Χρησιμοποιώντας το μέγιστο εύρος ταλάντωσης y κατά το συντονισμό, όπως φαίνεται στη σχετική καμπύλη, διαιρεμένο με $\sqrt{2}$ προσδιορίζουμε τις συχνότητες ω_α και ω_β , για τις οποίες μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει η πιο κάτω σχέση που παρέχει προσεγγιστικά το λόγο ιξώδους απόσβεσης συναρτήσει των συχνοτήτων διέγερσης ω_α και ω_β , και της φυσικής ιδιοσυχνότητας, ω_n :



$$\zeta = \frac{\omega_\beta - \omega_\alpha}{2 \cdot \omega_n}$$

Από το βιβλίο:
*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications
to Earthquake
Engineering”*

- Anil K. Chopra

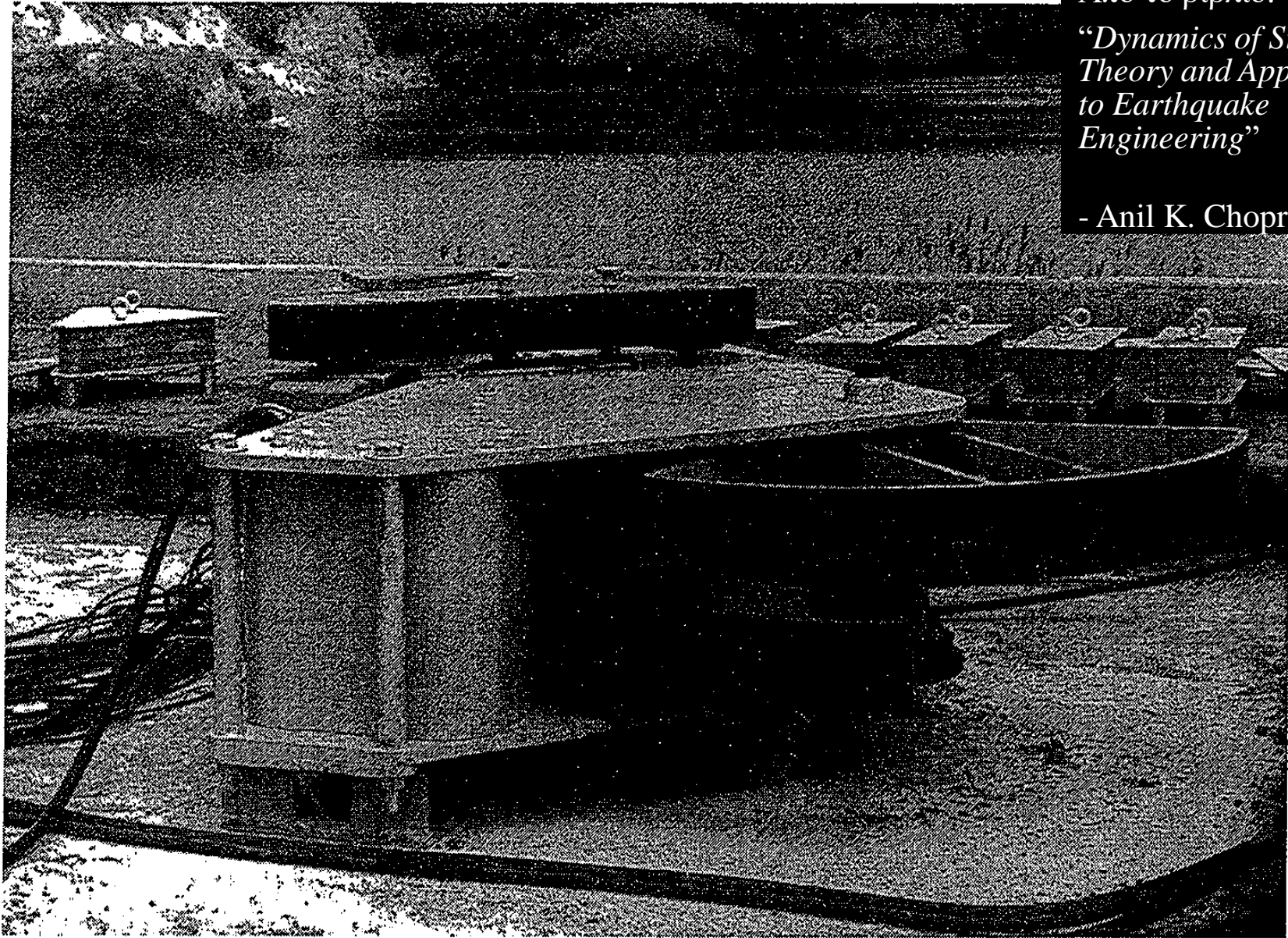


Figure 3.3.1 Counterrotating eccentric weight vibration generator. (Courtesy of D. E. Hudson.)

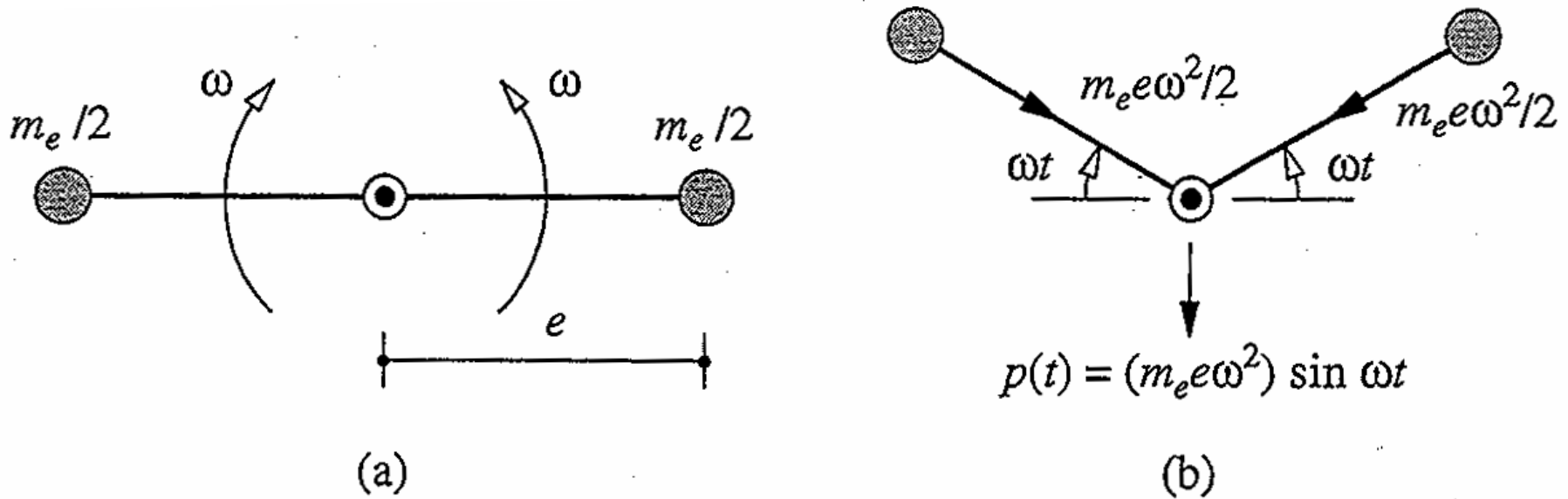


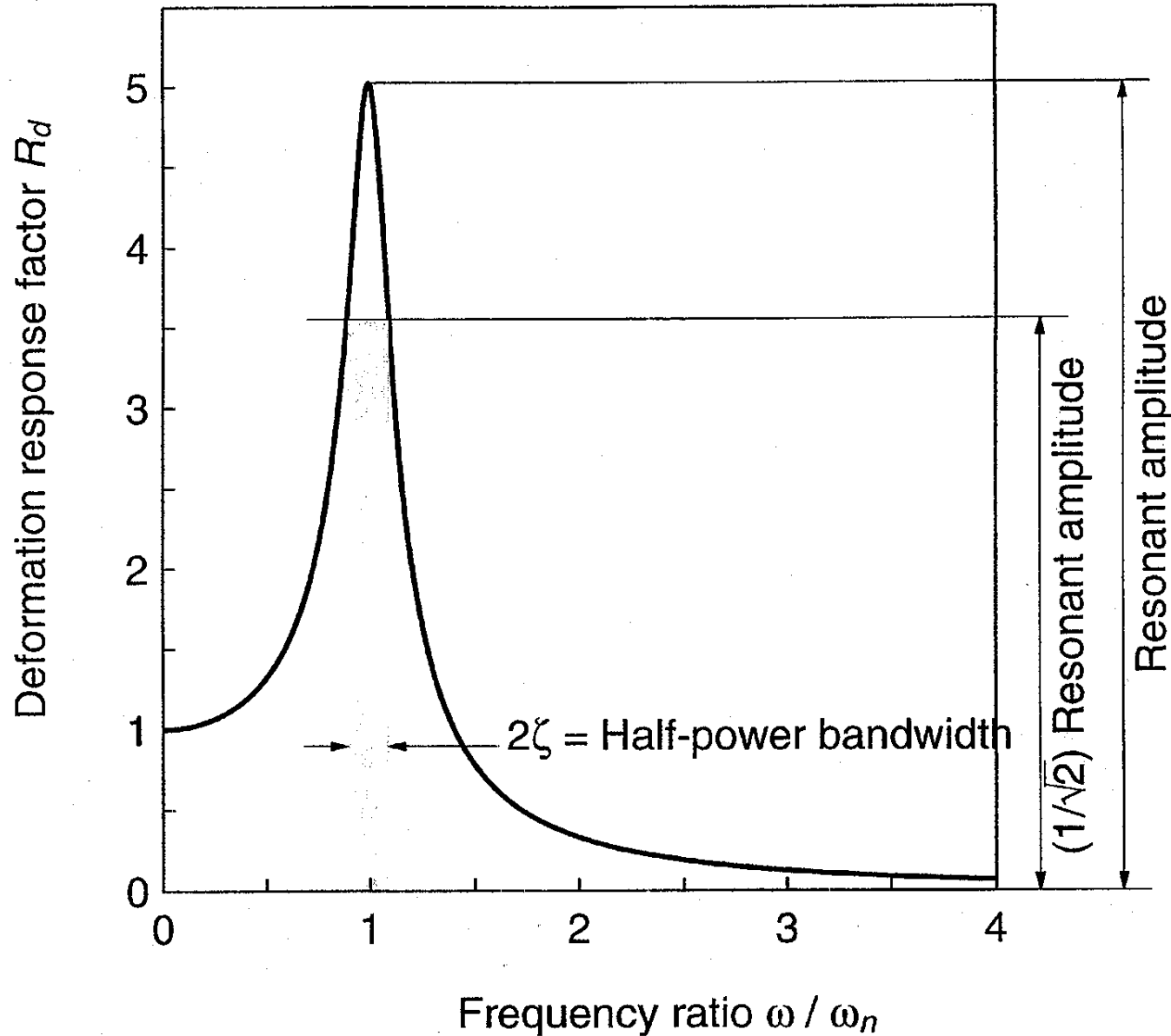
Figure 3.3.2 Vibration generator: (a) initial position; (b) position and forces at time t .

Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

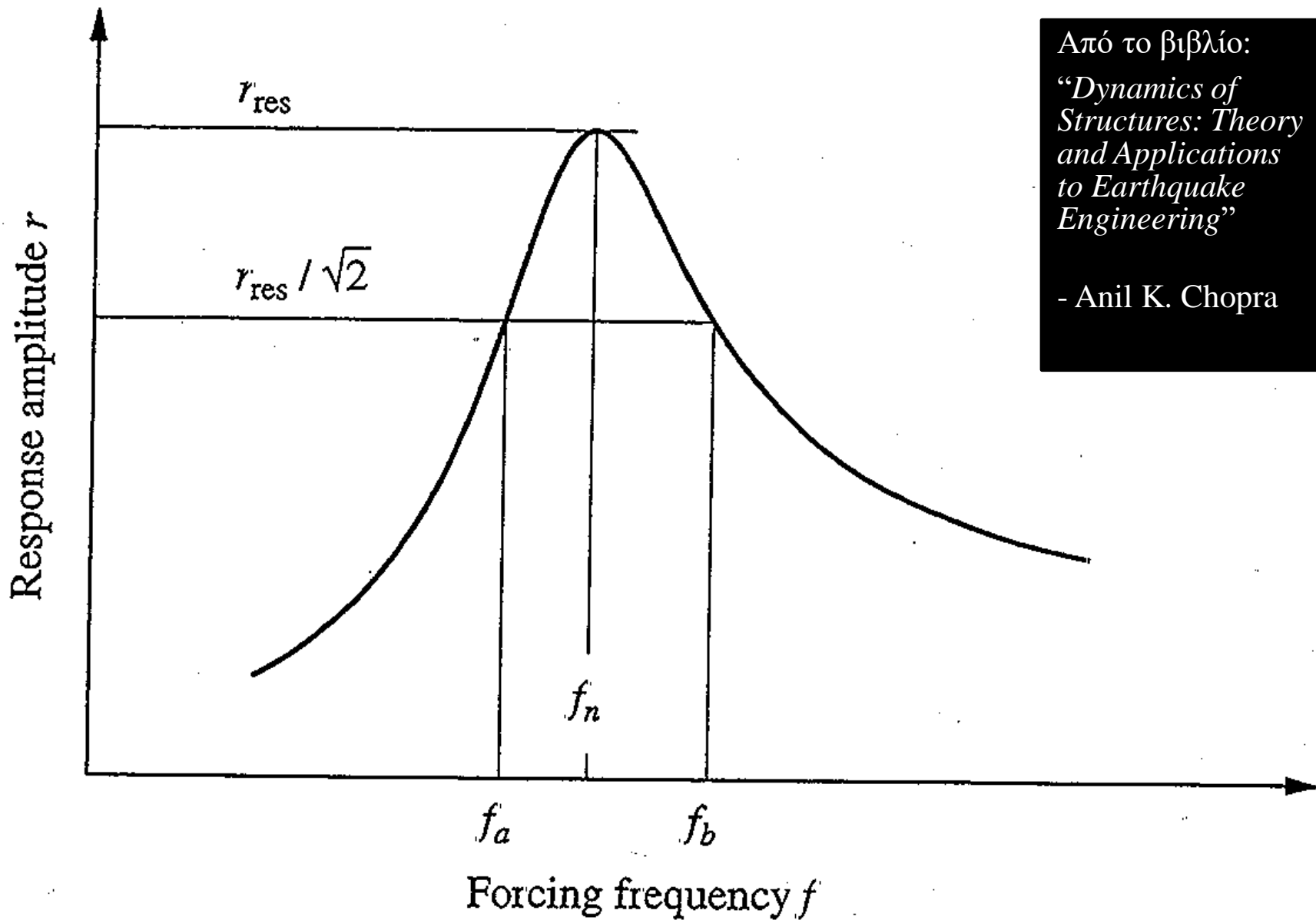
- Anil K. Chopra

Half-power band width



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

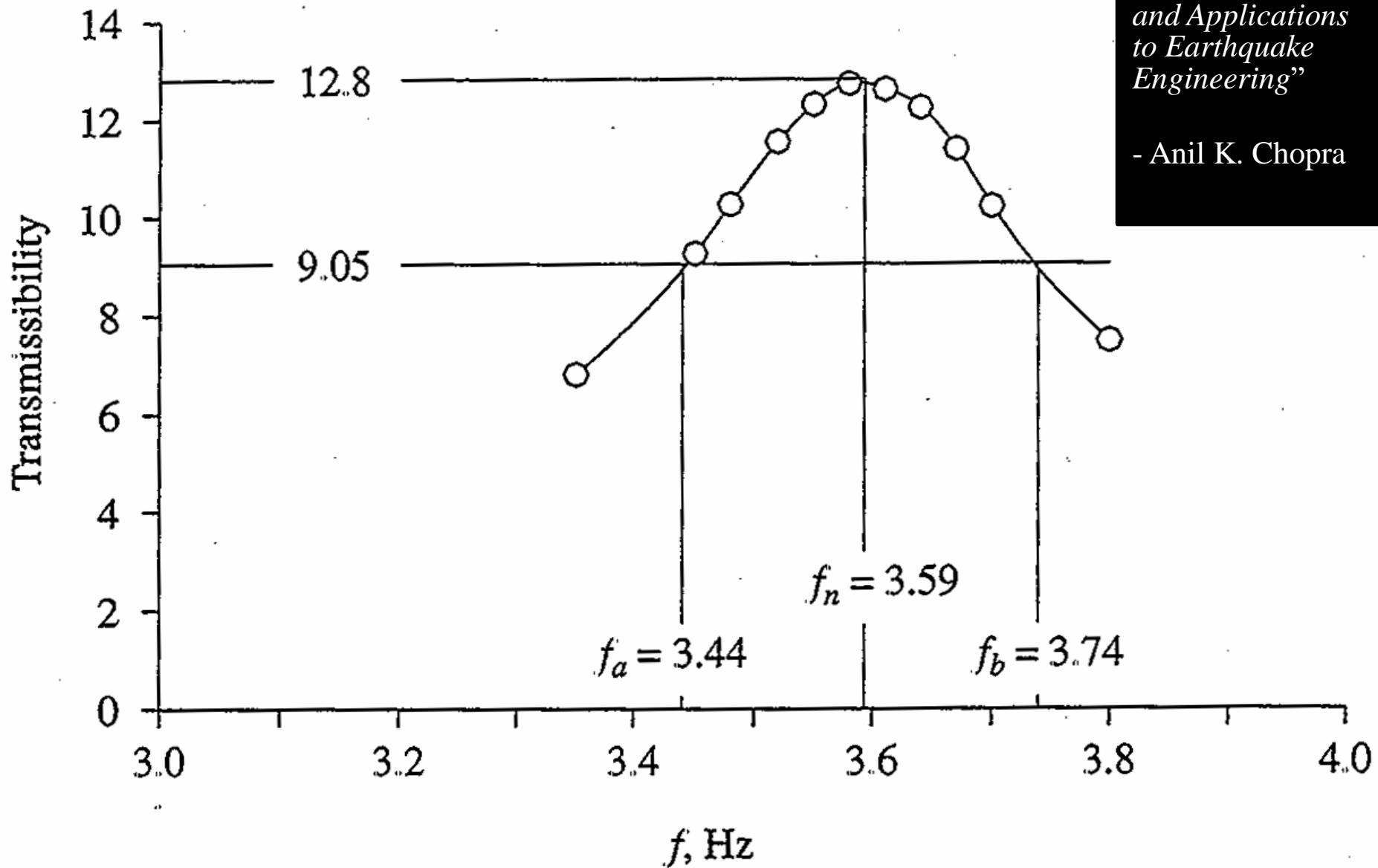


Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

Figure 3.4.1 Evaluating damping from frequency-response curve.

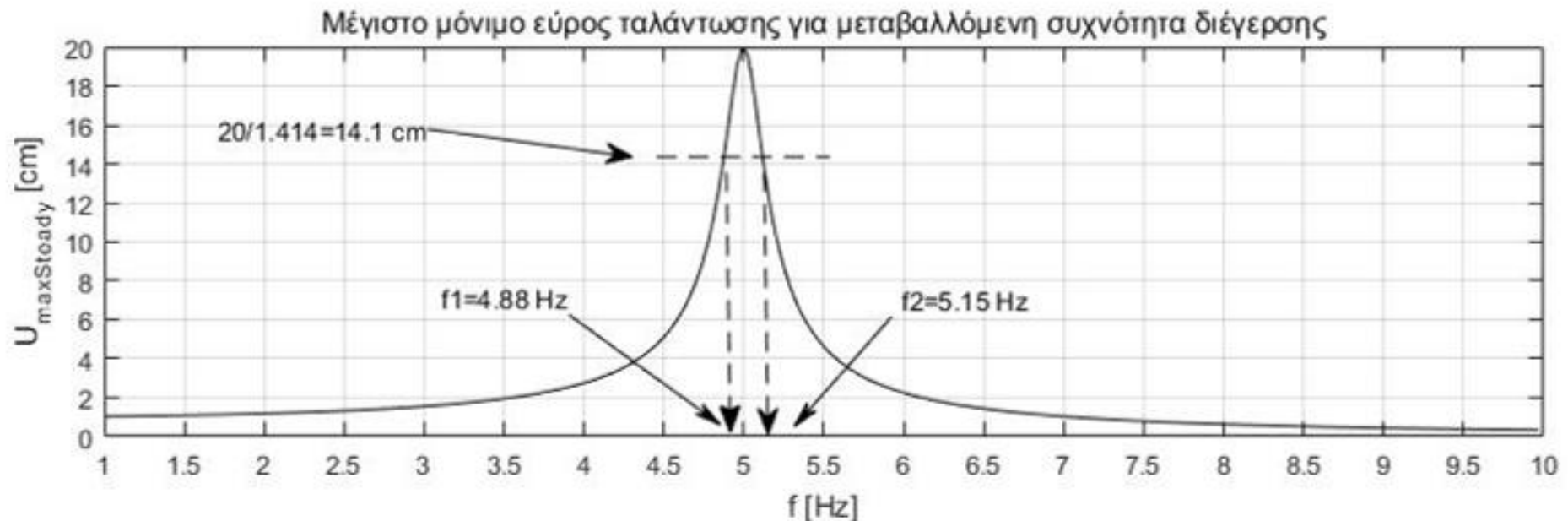
Από το βιβλίο:
“Dynamics of
Structures: Theory
and Applications
to Earthquake
Engineering”

- Anil K. Chopra



Παράδειγμα

Υπολογίστε την ιδιοπερίοδο και το ποσοστό απόσβεσης ενός ΜΒΣ το οποίο έχει υποβληθεί σε αρμονική διέγερση με μεταβαλλόμενη συχνότητα και παρουσίασε τα πιο κάτω μέγιστα εύρη ταλαντώσεων.



Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ΜΒΣ, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι 5 Hz και, συνεπώς η ιδιοπερίοδος είναι 0.2 δευτερόλεπτα:

$$f_n = 5 \text{ Hz} \Rightarrow T_n = 0.2 \text{ s}$$

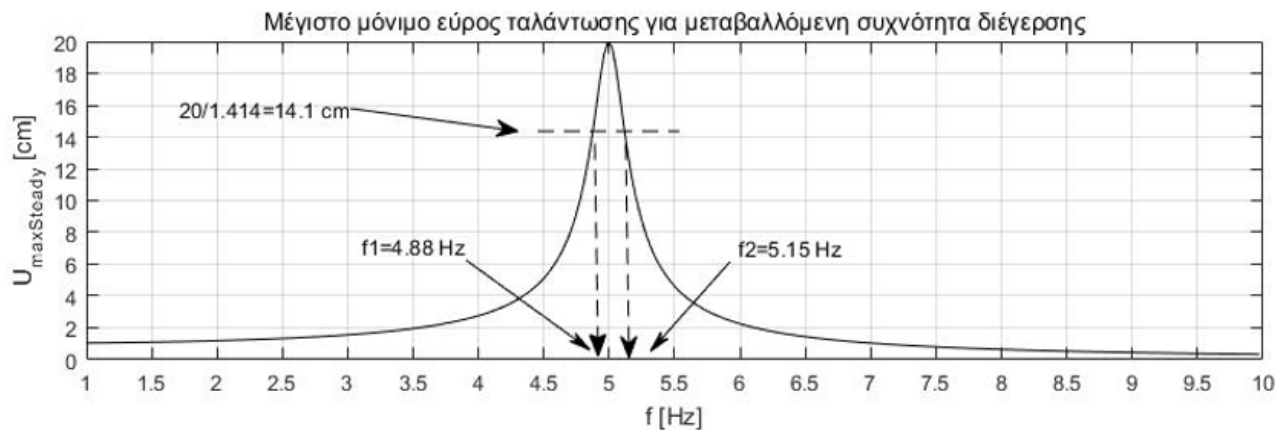
Το μέγιστο εύρος (παραμένουσας) αρμονικής ταλάντωσης, το οποίο συμβαίνει κατά το συντονισμό, ισούται με 20 εκατοστά. Έτσι, για την εκτίμηση του λόγου απόσβεσης, πρέπει να προσδιοριστούν οι συχνότητες διεγέρσεις f_1 και f_2 που προκαλούν εύρος ταλάντωσης ίσο με:

$$20 / \sqrt{2} = 14.1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow f_1 = 4.88 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = 5.15 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{f_2 - f_1}{2 \cdot f_n} = \frac{5.15 - 4.88}{2 \cdot 5} = 0.027$$

$$\Rightarrow \zeta = 2.7\%$$



Σχήμα 11.23: Μέγιστο εύρος (παραμένουσας) αρμονικής ταλάντωσης, u_{\max}^{steady} , ΜΒΣ υπό μεταβαλλόμενη συχνότητα διέγερσης συναρτήσει της κυκλικής ιδιοσυχνότητας διέγερσης, f , και εκτίμηση του λόγου ιξώδους απόσβεσης, ζ .

Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ΜΒΣ, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι 5 Hz και, συνεπώς η ιδιοπερίοδος είναι 0.2 δευτερόλεπτα:

$$f_n = 5 \text{ Hz} \Rightarrow T_n = 0.2 \text{ s}$$

Το μέγιστο εύρος (παραμένουσας) αρμονικής ταλάντωσης, το οποίο συμβαίνει κατά το συντονισμό, ισούται με 20 εκατοστά. Έτσι, για την εκτίμηση του λόγου απόσβεσης, πρέπει να προσδιοριστούν οι συχνότητες διεγέρσεις f_1 και f_2 που προκαλούν εύρος ταλάντωσης ίσο με:

$$20 / \sqrt{2} = 14.1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow f_1 = 4.88 \text{ Hz} \quad \text{και} \quad f_2 = 5.15 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{f_2 - f_1}{2 \cdot f_n} = \frac{5.15 - 4.88}{2 \cdot 5} = 0.027$$

$$\Rightarrow \zeta = 2.7\%$$

Αριθμητικός υπολογισμός δυναμικής απόκρισης ΜΒΣ

Αναλυτική λύση της ΔΕ κίνησης ενός ΜΒΣ είναι δύσκολη και σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις, όπως π.χ. για σεισμικές διεγέρσεις, αδύνατη. Για αυτόν το λόγο χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για τη χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης, οι οποίες έχουν την πιο κάτω γενική μορφή:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P(t)$$

Στην περίπτωση σεισμού, όπως θα δούμε στη συνέχεια, το ισοδύναμο επιβαλλόμενο φορτίο ισούται με:

$$P(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Με τις αριθμητικές μεθόδους υπολογίζεται η λύση της ΔΕ κίνησης σε συγκεκριμένες διακριτές χρονικές στιγμές, συνήθως ανά κάποιο σταθερό χρονικό διάστημα, Δt , κάνοντας κάποιες απλοποιητικές παραδοχές όσον αφορά τον τρόπο μεταβολής της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Ούτως ή άλλως, οι σεισμικές διεγέρσεις είναι γνωστές υπό μορφή τιμών επιταχύνσεων του εδάφους σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές ανά κάποιο μικρό χρονικό διάστημα, Δt . Έτσι, η επίλυση με τις μεθόδους κατευθείαν ολοκλήρωσης (direct integration methods) ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης μόνο σε αυτές τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P(t)$$

$$P(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t)$$

Γενικά, οι μέθοδοι αυτές ολοκληρώνουν βήμα προς βήμα τη ΔE κίνησης και, θεωρώντας ότι ήδη είναι γνωστή η μετακίνηση στις χρονικές στιγμές $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ υπολογίζεται η μετακίνηση στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$. Οι μέθοδοι αυτές διαχωρίζονται σε άμεσες (explicit) ή έμμεσες (implicit) αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης και θα δούμε, αντίστοιχα, τη Μέθοδο Κεντρικής Διαφοράς (Central Difference Method - CDF) και τη μέθοδο Newmark.

Μέθοδος Κεντρικής Διαφοράς για ΜΒΣ

Η μέθοδος κεντρικής διαφοράς (ΜΚΔ), βασίζεται στις πιο κάτω σχέσεις πεπερασμένων διαφορών για την ταχύτητα και επιτάχυνση:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2 \cdot \Delta t}, \quad \ddot{u}(t) = \frac{u(t+\Delta t) - 2 \cdot u(t) + u(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις στην εξίσωση κίνησης:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P(t)$$

προκύπτει μια σχέση με μόνο άγνωστο τη μετακίνηση $u(t + \Delta t)$:

$$\hat{K} \cdot u(t + \Delta t) = \hat{P}(t)$$

$$\text{όπου: } \hat{K} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2 \cdot \Delta t}$$

$$\hat{P}(t) = P(t) - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2 \cdot \Delta t} \right) \cdot u(t - \Delta t) - \left(k - \frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} \right) \cdot u(t)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική μετακίνηση $u(0)$ και ταχύτητα $\dot{u}(0)$ μπορεί να προσδιοριστεί η αρχική επιτάχυνση $\ddot{u}(0)$ από την εξίσωση κίνησης:

$$\ddot{u}(0) = \frac{P(0) - c \cdot \dot{u}(0) - k \cdot u(0)}{m}$$

Για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος χρειάζεται να υπολογιστεί η μετακίνηση $u(-\Delta t)$:

$$u(-\Delta t) = \ddot{u}(0) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} - \Delta t \cdot \dot{u}(0) + u(0)$$

Η ΜΚΔ είναι αριθμητικά ευσταθής (stable) μόνο εάν το χρονικό βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι μικρότερο από κάποια κρίσιμη τιμή:

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} = \Delta t_{cr}$$

Ενώ για να εξασφαλιστεί ικανοποιητική ακρίβεια πρέπει το βήμα ολοκλήρωσης Δt να είναι σημαντικά μικρότερο της κρίσιμης τιμής, Δt_{cr} (τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μικρότερο). Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις, όπως π.χ. για τη δυναμική ανάλυση συστημάτων με φαινόμενα συγκρούσεων, το βήμα ολοκλήρωσης, Δt , μπορεί να πρέπει να είναι ακόμη μικρότερο.

Μέθοδος *Newmark* για ΜΒΣ

Οι πιο κάτω προσεγγιστικές σχέσεις χρησιμοποιούνται για τη μετακίνηση $u(t + \Delta t)$, σε χρόνο $(t + \Delta t)$, θεωρώντας ότι είναι γνωστή η απόκριση μέχρι τη χρονική στιγμή t και ότι η επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα Δt παραμένει σταθερή.

Αυτή η συγκεκριμένη διατύπωση της μεθόδου του *Newmark*, σε αντίθεση με τη ΜΚΔ, είναι πάντα ευσταθής. Παρόλα ταύτα, για σκοπούς ακρίβειας θα πρέπει το βήμα ολοκλήρωσης, Δt , να είναι ακόμη ικανοποιητικά μικρό.

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \frac{(\ddot{u}(t + \Delta t) + \ddot{u}(t))}{2} \cdot \Delta t$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \frac{\ddot{u}(t + \Delta t) + \ddot{u}(t)}{2} \cdot \Delta t^2$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις, προσδιορίζουμε σχέσεις για την επιτάχυνση και την ταχύτητα σε χρόνο $(t + \Delta t)$. Αυτές τις σχέσεις τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης σε χρόνο $(t + \Delta t)$:

$$m \cdot \ddot{u}(t + \Delta t) + c \cdot \dot{u}(t + \Delta t) + k \cdot u(t + \Delta t) = P(t + \Delta t)$$

$$m \cdot \ddot{u}(t + \Delta t) + c \cdot \dot{u}(t + \Delta t) + k \cdot u(t + \Delta t) = P(t + \Delta t)$$

Με δεδομένη τη λύση μέχρι τη χρονική στιγμή t , κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, προκύπτει η πιο κάτω σχέση:

$$\hat{K} \cdot u = \hat{P}$$

όπου: $\hat{K} = k + a_0 \cdot m + a_1 \cdot c$

$$\begin{aligned} \hat{P}(t + \Delta t) = & P(t + \Delta t) + m \cdot (a_0 \cdot u(t) + a_2 \cdot \dot{u}(t) + a_3 \cdot \ddot{u}(t)) \\ & + c \cdot (a_1 \cdot u(t) + a_4 \cdot \dot{u}(t) + a_5 \cdot \ddot{u}(t)) \end{aligned}$$

όπου: $a_0 = \frac{4}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{2}{\Delta t}$, $a_2 = \frac{4}{\Delta t}$, $a_3 = a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = \frac{\Delta t}{2}$

Έτσι η μετακίνηση στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ισούται με: $u(t + \Delta t) = \frac{\hat{P}(t + \Delta t)}{\hat{K}}$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \frac{\hat{\mathbf{P}}(t + \Delta t)}{\hat{\mathbf{K}}}$$

Στη συνέχεια, η ταχύτητα και η επιτάχυνση στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ μπορούν να υπολογιστούν από τις πιο κάτω σχέσεις:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \mathbf{a}_0 \cdot (\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)) - \mathbf{a}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{a}_3 \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{a}_6 \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{a}_7 \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$$

Προγραμματισμός Μεθόδου Κεντρικής Διαφοράς και Newmark για αριθμητική δυναμική ανάλυση ΜΒΣ

MBSquake.m

```
clear
```

```
% Fortwsh epitaxynsewn edafoys
```

```
load AthensAccel
```

```
t = AthensAccel(:,1);
```

```
ag = AthensAccel(:,2);
```

```
% Dedomena kataskeyhs
```

```
E = 30e9;
```

```
I = 0.4^3*0.3/12;
```

```
L = 3;
```

```
k = 24*E*I/L^3;
```

```
m = 15000;
```

```
ksi = 0.05;
```

```
% Arxikes syn8hkes
```

```
u0=0;
```

```
v0=0;
```

```
dt = t(2)-t(1);
```

```
numberPoints = length(t);
```

```
g=9.81;
```

```
pga=abs(ag(1));
```

```
tPGA=t(1);
```

```

for i=2:numberPoints
    if pga < abs(ag(i))
        pga=abs(ag(i));
        tPGA=t(i);
    end
end
fprintf('\n Exoyn diabastei %d times epitaxynsewn edafoys ana %.3f sec',
                                               numberPoints, dt)
fprintf('\n Megisth epitaxynsh edafoys = %.2f m/sec^2 = %.3f g sta %.3f sec\n', pga,
                                               pga/g, tPGA)

% Υπολογισμος idiotimwn
wN=sqrt(k/m);
Tn=2*pi/wN;
fN= 1/Tn;

```

```

% Υπολογισμός συντελεστή απόσβεσης
c=2*ksi*wN*m;

% Εκτύπωση δεδομένων
printDataAg(k, m, c, ksi, Tn, wN, fN);

% Έγγραφή ισodynamoy εξωτερικά επιβαλλομένης φορτίου
P = -ag*m;

% Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Newmark
fprintf('***** Xρήση Newmark *****')
[u,v,a] = newmark(numberPoints, dt, t, P, k, m, c, u0, v0);
% Εκτύπωση μεγίστων τιμών αποκρίσης
printPeakValuesAg(t, u, v, a, ag, wN)

% Σχεδίαση διαγραμμάτων
plotGraphsAg(t, u, v, a, ag, wN)

```


printDataAg.m

```
function printDataAg(k, m, c, ksi, Tn, wN, fN);  
% Εκτύπωση δεδομένων και χαρακτηριστικών CDOF system  
  
fprintf('\n Stiffness = %e N/m \n Mass = %e kg ', k, m)  
fprintf('\n Damping coefficient, C = %.3f   Damping ratio, ksi = %.4f \n', c, ksi)  
fprintf('\n Fundamental Period = %.4f sec', Tn)  
fprintf('\n Eigen-frequency = %.2f rad/sec', wN)  
fprintf('\n Cyclic eigenfrequency = %.2f [Hertz]\n', fN)  
  
end
```

```
function [u,v,a]=cdm(n, dt, t, P, k, m, c, u0, v0)    % Μεθoδος Kentriks diaforas

wN = sqrt(k/m);    % Eleggcos eystaθeias CDM
checkStability(dt,wN)

kEff = m/(dt*dt)+c/(2*dt);
pEff_1 = k-2*m/(dt*dt);
pEff_2 = m/(dt*dt)-c/(2*dt);

u(1)=u0;
v(1)=v0;
up=u(1);
a(1)=(P(1)-c*v(1)-k*u(1))/m;
upp=up-dt*v(1)+(0.5*dt*dt)*a(1);
```

```

for i=1:n-1
    pEff = P(i) - pEff_1*up - pEff_2*upp;
    u(i+1) = pEff/kEff;
    a(i) = (u(i+1)-2*up+upp) / (dt*dt);
    v(i) = (u(i+1)-upp) / (2*dt);
    upp=up;
    up=u(i+1);
end

pEff = P(n) - pEff_1*u(i+1) - pEff_2*u(i);
uNext = pEff/kEff;
a(n) = (uNext-2*up+upp) / (dt*dt);
v(n) = (uNext-upp) / (2*dt);

end

```

checkStability.m

```
function checkStability(dt, wN) % Ελεγχος ευσταθείας μεθόδου

DTcr=2/wN;
if (DTcr/dt)<1
    fprintf('\n The time step is larger than the critical time step!!!! ')
end

end
```

Newmark.m

```
function [u,v,a]=newmark(n, dt, t, P, k, m, c, u0, v0)    % Μεθoδος Newmark
alpha=0.25;
delta=0.5;

a0=1/(alpha*dt*dt);
a1=delta/(alpha*dt);
a2=1/(alpha*dt);
a3=1/(2*alpha)-1;
a4=delta/alpha-1;
a5=dt/2*(delta/alpha-2);
a6=dt*(1-delta);
a7=delta*dt;
```

$$k_{\text{Eff}} = k + a_0 \cdot m + a_1 \cdot c;$$

$$p_{\text{Eff}_1} = k \cdot 2 \cdot m / (dt \cdot dt);$$

$$p_{\text{Eff}_2} = m / (dt \cdot dt) - c / (2 \cdot dt);$$

$$u(1) = u_0;$$

$$v(1) = v_0;$$

$$a(1) = (P(1) - c \cdot v(1) - k \cdot u(1)) / m;$$

$$u_p = u(1);$$

$$v_p = v(1);$$

$$a_p = a(1);$$

for i=1:n-1

$$p_{\text{Eff}} = P(i+1) + m \cdot (a_0 \cdot u_p + a_2 \cdot v_p + a_3 \cdot a_p) + c \cdot (a_1 \cdot u_p + a_4 \cdot v_p + a_5 \cdot a_p);$$

$$u(i+1) = p_{\text{Eff}} / k_{\text{Eff}};$$

$$a(i+1) = a_0 \cdot (u(i+1) - u_p) - a_2 \cdot v_p - a_3 \cdot a_p;$$

$$v(i+1) = v_p + a_6 \cdot a_p + a_7 \cdot a(i+1);$$

$$u_p = u(i+1);$$

$$v_p = v(i+1);$$

$$a_p = a(i+1);$$

end

printPeakValuesAg.m

```
function printPeakValues(t, u, v, a, ag, w)
```

```
% Finds and prints peak values
```

```
i=1;
```

```
num=length(t);
```

```
umax=u(i);
```

```
t_umax=t(i);
```

```
vmax=v(i);
```

```
t_vmax=t(i);
```

```
amax=a(i);
```

```
t_amax=t(i);
```

```
for i=2:num
```

```
    if umax < abs(u(i))
```

```
        umax=abs(u(i));
```

```
        t_umax=t(i);
```

```
    end
```

```
    if vmax < abs(v(i))
```

```
        vmax= abs(v(i));
```

```
        t_vmax=t(i);
```

```
    end
```

```
    if amax < abs(a(i))
```

```
        amax=abs(a(i));
```

```
        t_amax=t(i);
```

```
    end
```

```
end
```

```

% Absolute accelerations
aTot = a' + ag;
i=1;
aTotMax=aTot(i);
t_aTotMax=t(i);

for i=2:num
    if aTotMax < abs(aTot(i))
        aTotMax=abs(aTot(i));
        t_aTotMax=t(i);
    end
end

% Pseudovelocities (Sv) and pseudo-accelerations (Sa)
Sv = u*w;
Sa = u*w*w;

i=1;
SvMax=Sv(i);
t_SvMax=t(i);
SaMax=Sa(i);
t_SaMax=t(i);

```



```

for i=2:num
    if SvMax < abs(Sv(i))
        SvMax= abs(Sv(i));
        t_SvMax=t(i);
    end
    if SaMax < abs(Sa(i))
        SaMax=abs(Sa(i));
        t_SaMax=t(i);
    end
end
end
fprintf('\n Maximum relative displacement: %.3f mm at time: %.3f sec\n', u_max*1000,
                                               t_umax);
fprintf('\n Maximum relative velocity: %.4f m/s at time: %.3f sec', vmax, t_vmax);
fprintf('\n Maximum pseudo-velocity: %.4f m/s at time: %.3f sec\n', SvMax,
                                               t_SvMax);
fprintf('\n Maximum relative acceleration: %.4f m/s/s at time: %.3f sec', amax,
                                               t_amax);
fprintf('\n Maximum absolute acceleration: %.4f m/s/s at time: %.3f sec', aTotMax,
                                               t_aTotMax);
fprintf('\n Maximum pseudo-acceleration: %.4f m/s/s at time: %.3f sec \n', SaMax,
                                               t_SaMax);
end

```

plotGraphsAg.m

```
function plotGraphsAg(t, u, v, a, ag, w)    % Sxediash grafikwn parastasewn

figure(1)
clf
orient tall

subplot(4,1,1)
plot(t,ag)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Ground accelerations, Ag [m/s^2]')

subplot(4,1,2)
plot(t,1000*u)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Displacements, u [mm]')
```

```

subplot(4,1,3)
plot(t,v)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Velocities, v [m/s]')

subplot(4,1,4)
plot(t,a'+ag)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Absolute accelerations, a [m/s^2]')

figure(2)
clf
orient tall

subplot(4,1,1)
plot(t,ag)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Ground accelerations, Ag [m/s^2]')

```

```

subplot(4,1,2)
plot(t,1000*u)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Displacement, u [mm]')

subplot(4,1,3)
plot(t, u*w)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Pseudo-velocity, Sv [m/sec]')

subplot(4,1,4)
plot(t, u*w^2)
grid on
xlabel('Time, t [sec]')
ylabel('Pseudo-acceleration, Sa [m/sec^2]')
end

```

>> MBSquake

Exoyn diabastei 4603 times epitaxynsewn edafoys ana 0.010 sec

Megisth epitaxynsh edafoys = $3.20 \text{ m/sec}^2 = 0.326 \text{ g}$ sta 6.820 sec

Stiffness = $4.266667\text{e}+007 \text{ N/m}$

Mass = $1.500000\text{e}+004 \text{ kg}$

Damping coefficient, C = 80000.000 Damping ratio, ksi = 0.0500

Fundamental Period = 0.1178 sec

Eigen-frequency = 53.33 rad/sec

Cyclic eigenfrequency = 8.49 [Hertz]

***** Xrhsh Newmark *****

Maximum relative displacement: 3.210 mm at time: 6.520 sec

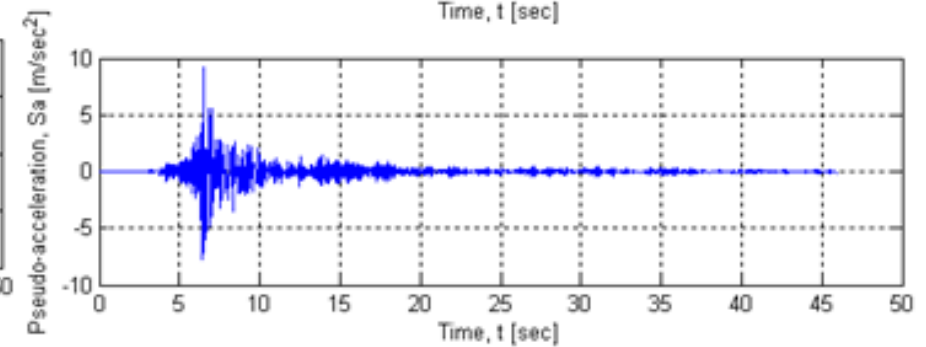
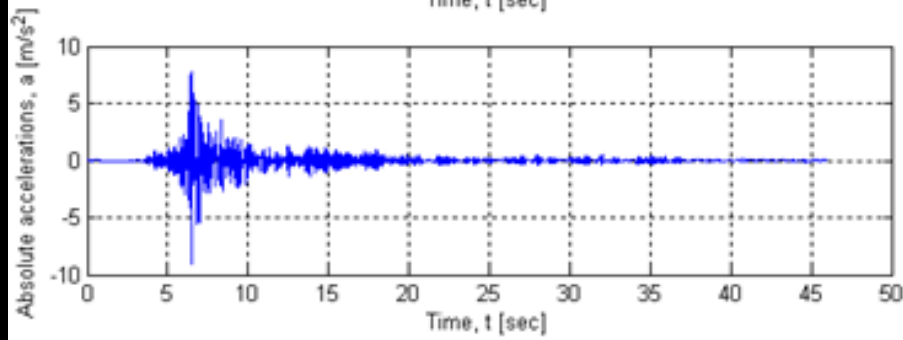
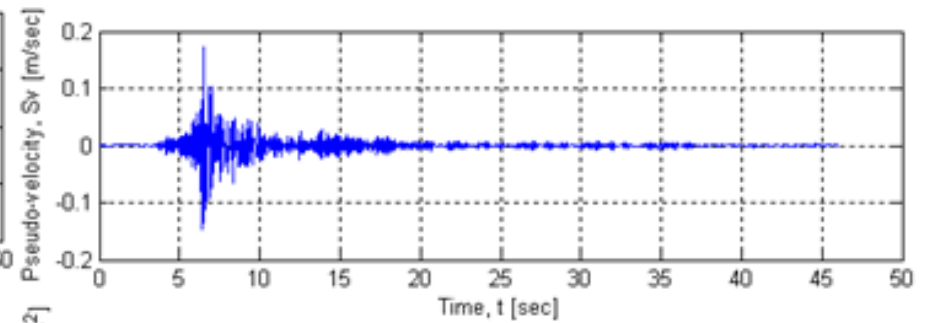
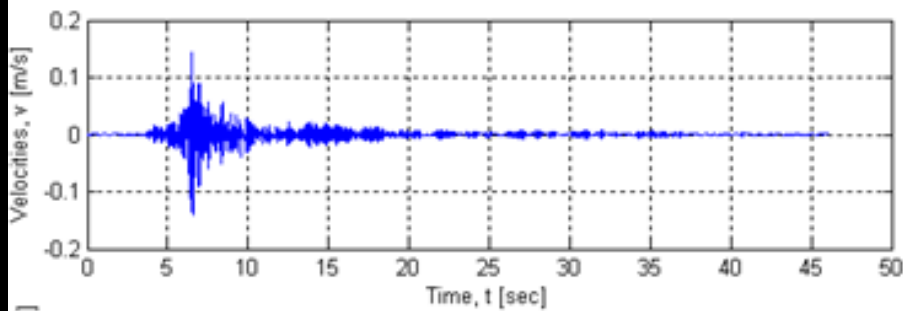
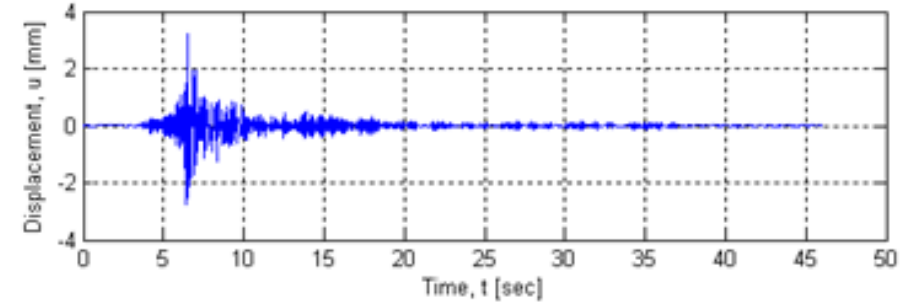
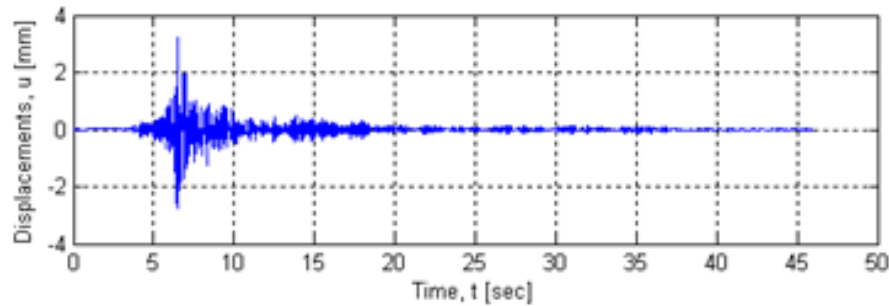
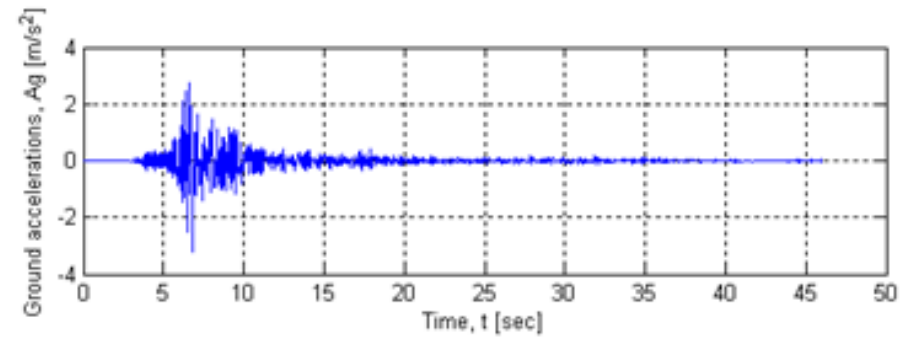
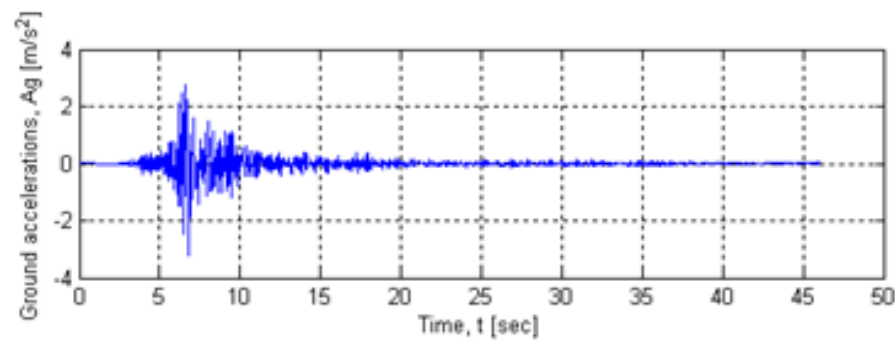
Maximum relative velocity: 0.1428 m/s at time: 6.480 sec

Maximum pseudo-velocity: 0.1712 m/s at time: 6.520 sec

Maximum relative acceleration: 6.9855 m/s/s at time: 6.520 sec

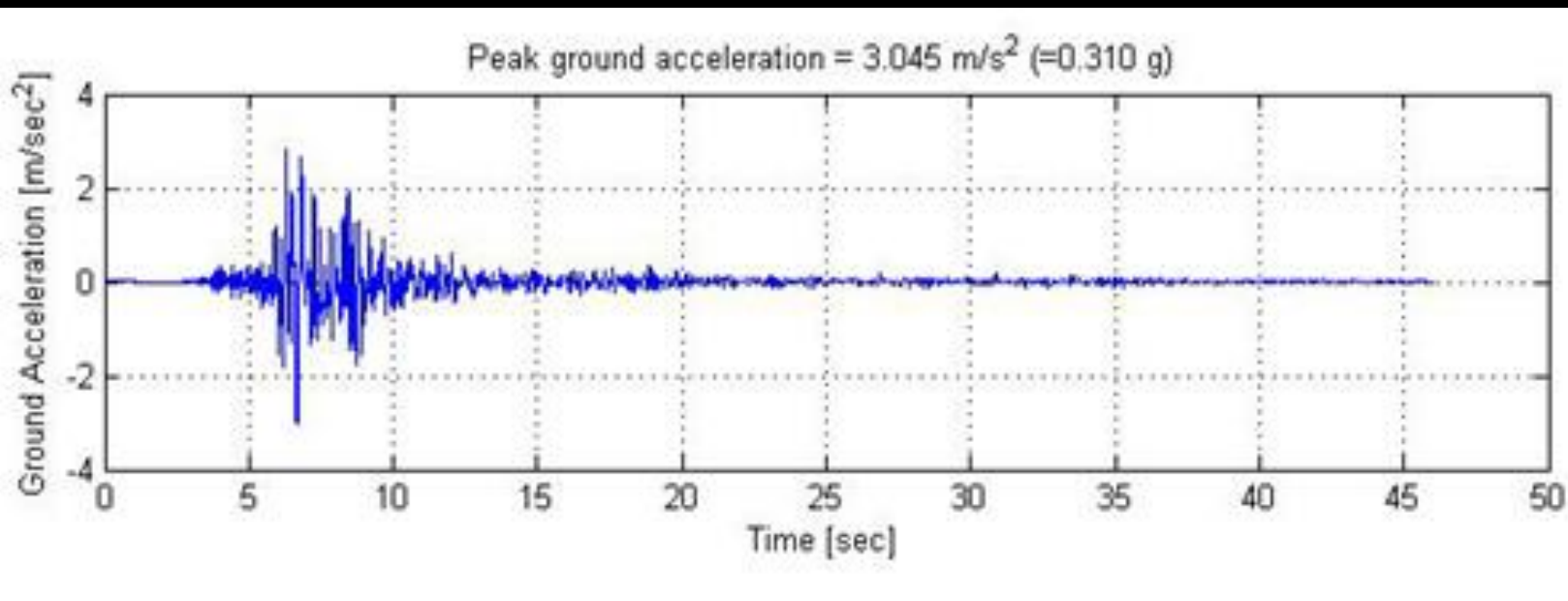
Maximum absolute acceleration: 9.0397 m/s/s at time: 6.510 sec

Maximum pseudo-acceleration: 9.1304 m/s/s at time: 6.520 sec

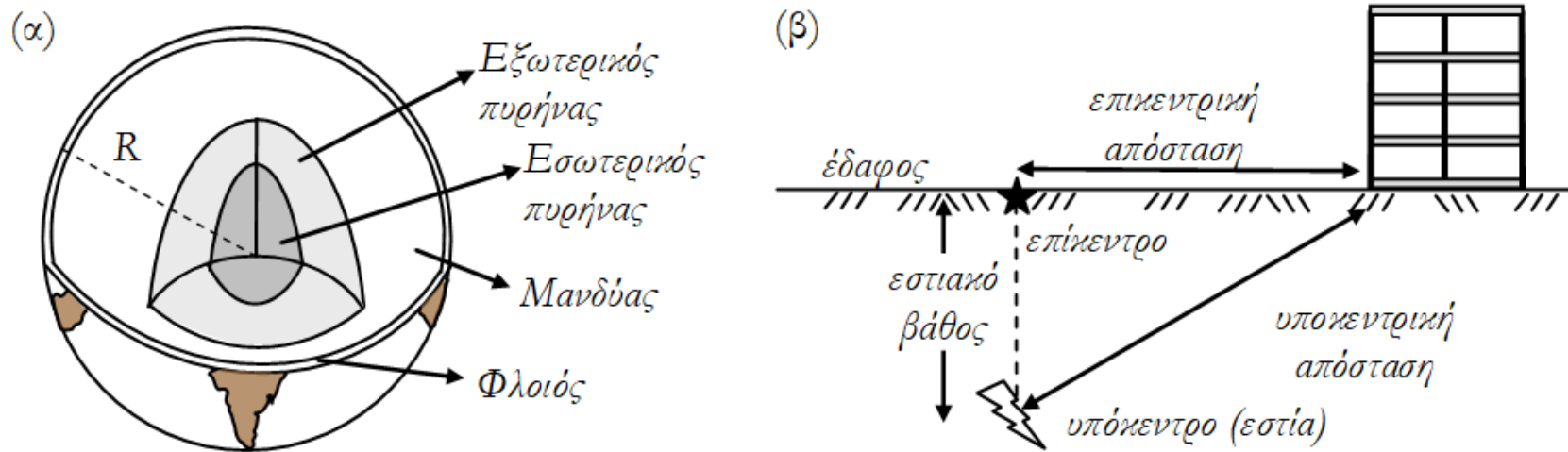


Σεισμικές διεγέρσεις και αποκρίσεις ΜΒΣ

Στον ελληνικό χώρο οι σεισμικές διεγέρσεις είναι συνήθως οι πιο κρίσιμες δράσεις για το σχεδιασμό και διαστασιολόγηση των περισσότερων κοινών κατασκευών πολιτικού μηχανικού. Έτσι, είναι σημαντικός ο υπολογισμός της απόκρισης, ιδιαίτερα των μέγιστων τιμών, μιας κατασκευής όσον αφορά μετακινήσεις, επιταχύνσεις αλλά και εντατικά μεγέθη και τις αντίστοιχες τάσεις και παραμορφώσεις. Για αυτό το λόγο σε αυτή την παράγραφο γίνεται μια σύντομη εισαγωγή σε κάποια βασικά στοιχεία τεχνικής σεισμολογίας.

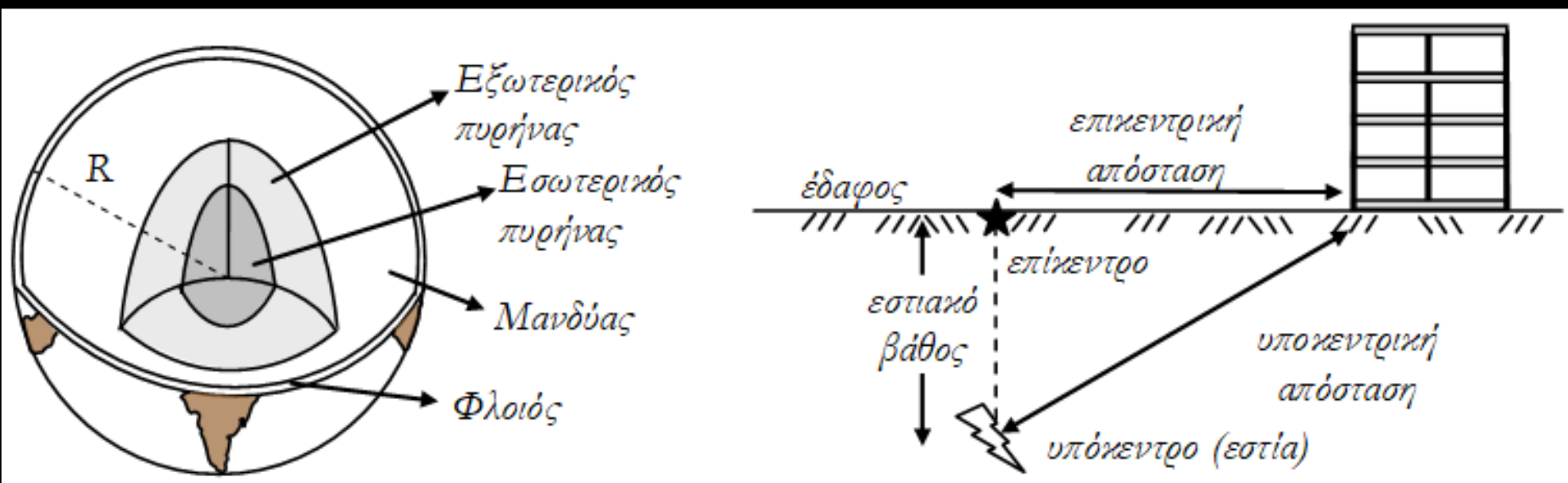


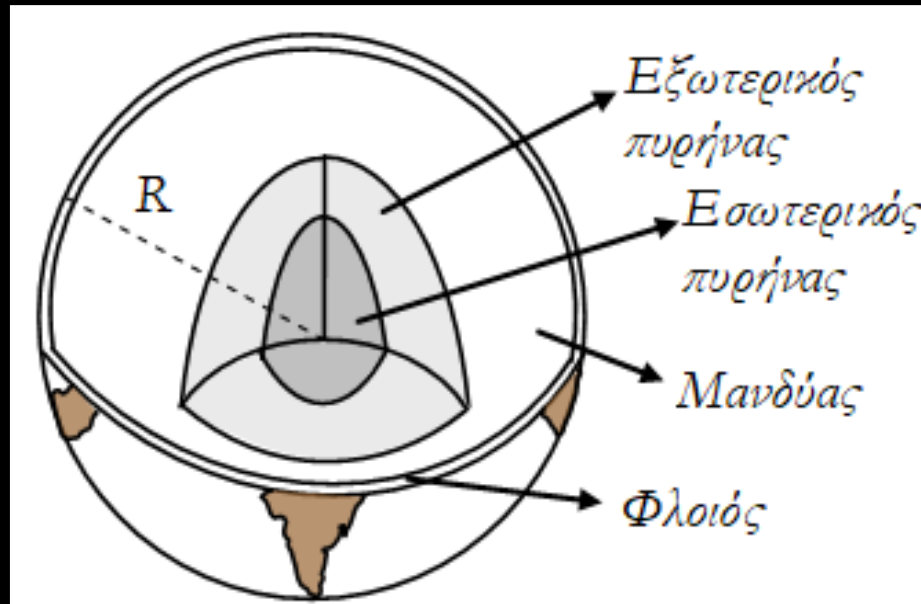
Οι σεισμοί οφείλονται κυρίως στις σχετικές μετακινήσεις των λιθοσφαιρικών πλακών λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών στην ασθενόσφαιρα. Η γη, η οποία έχει ακτίνα γύρω στα 6500 χιλιόμετρα (km), αποτελείται από το φλοιό, δηλαδή το εξωτερικό περίβλημα, που έχει πάχος 10-35 km, το μανδύα πάχους σχεδόν 3000 km και τον πυρήνα, του οποίου το εξωτερικό μέρος είναι σε ρευστή κατάσταση, ενώ το εσωτερικό μέρος είναι σε στερεή κατάσταση (Σχήμα 11.24). Η λιθόσφαιρα είναι ουσιαστικά ένα δύσκαμπτο στρώμα, πάχους περίπου 80-100 km και αποτελείται από το στερεό φλοιό και ένα μέρος του στερεού ανώτερου μανδύα κάτω από το στερεό φλοιό.



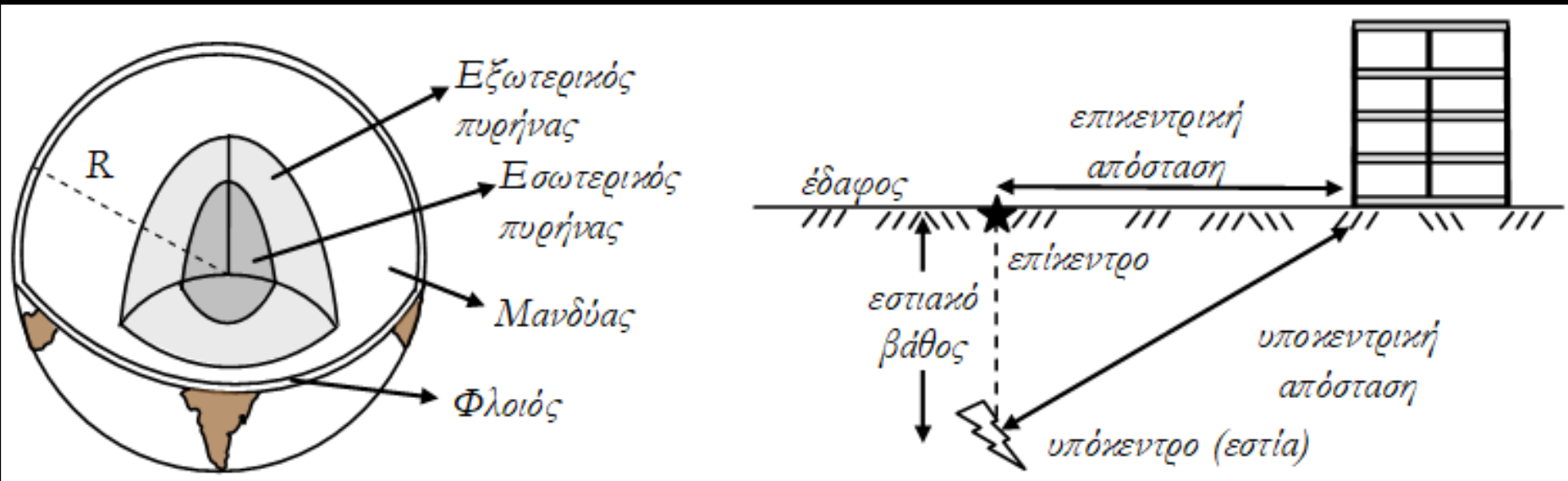
Σχήμα 11.24: (α) Στρώματα της γης σε τρισδιάστατη απεικόνιση με εσωτερική τομή, (β) επίπεδη τομή με τις σχετικές αποστάσεις από την κατασκευή κατά τη γένεση του σεισμού.

Οι σεισμοί οφείλονται κυρίως στις σχετικές μετακινήσεις των λιθοσφαιρικών πλακών λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών στην ασθενόσφαιρα. Η γη, η οποία έχει ακτίνα γύρω στα 6500 χιλιόμετρα (km), αποτελείται από το φλοιό, δηλαδή το εξωτερικό περίβλημα, που έχει πάχος 10-35 km, το μανδύα πάχους σχεδόν 3000 km και τον πυρήνα, του οποίου το εξωτερικό μέρος είναι σε ρευστή κατάσταση, ενώ το εσωτερικό μέρος είναι σε στερεή κατάσταση. Η λιθόσφαιρα είναι ουσιαστικά ένα δύσκαμπτο στρώμα, πάχους περίπου 80-100 km και αποτελείται από το στερεό φλοιό και ένα μέρος του στερεού ανώτερου μανδύα κάτω από το στερεό φλοιό.





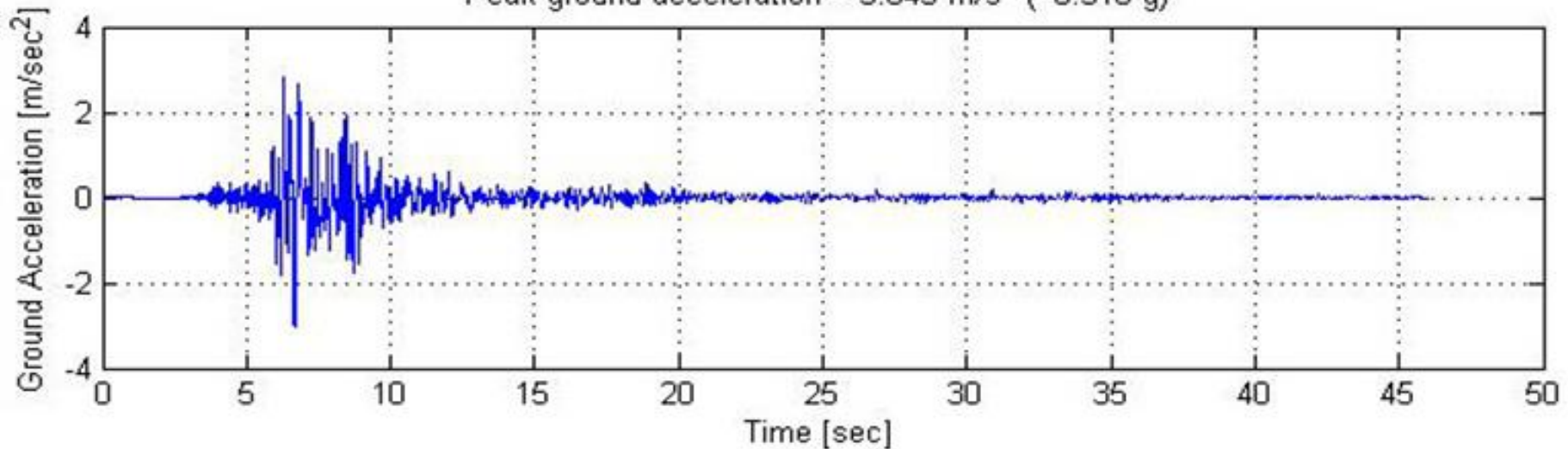
Η λιθόσφαιρα είναι κατακερματισμένη σχηματίζοντας τις λιθοσφαιρικές πλάκες, οι οποίες τείνουν να έχουν κάποιες σχετικές μετακινήσεις μεταξύ τους, αφού επιπλέον πάνω στην ημίρρευστη ασθενόσφαιρα. Θα μπορούσε κάποιος να χαρακτηρίσει τη γη με τις σχετικά πολύ λεπτές κατακερματισμένες λιθοσφαιρικές πλάκες, με ένα αυγό του οποίου το τσόφλι έχει έντονα σπάσει, δηλαδή ρηγματωθεί. Με τη σχετική κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών συσσωρεύεται ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης στα πετρώματα, όπως συγκρούονται οι λιθοσφαιρικές πλάκες, όταν η τάση υπερβεί τα όρια αντοχής του υλικού προκαλείται απότομα θραύση, δηλαδή σεισμικό ρήγμα, και η συσσωρευμένη δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική με σχετική κίνηση των πλακών, δημιουργώντας την αντίστοιχη σεισμική κίνηση.

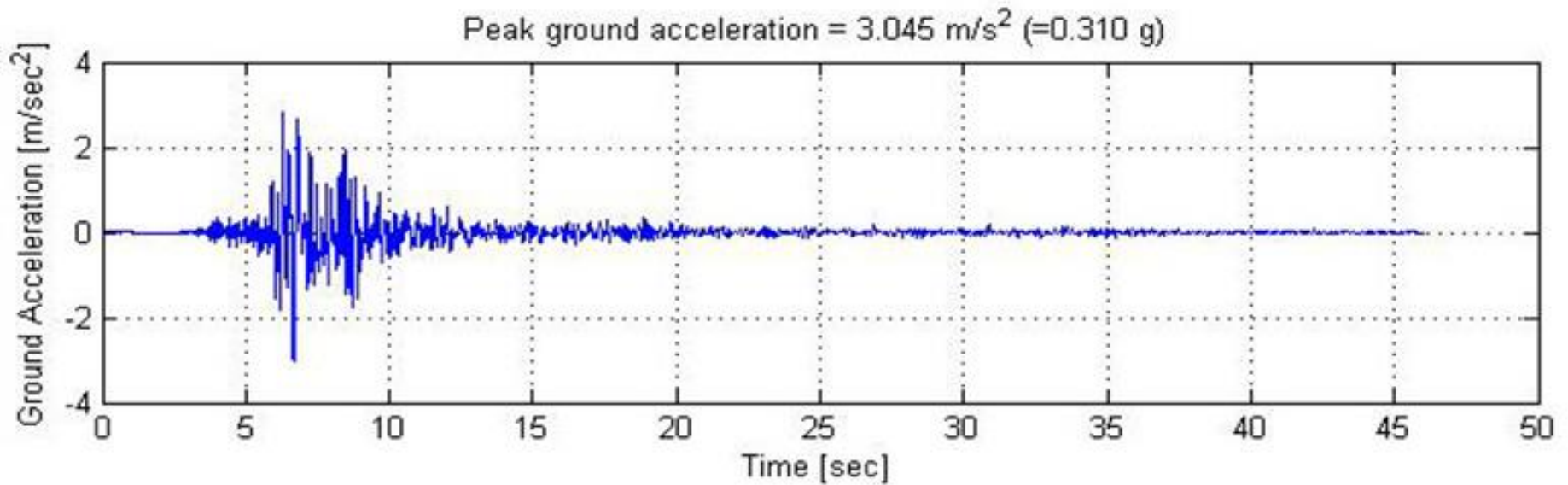


Υπόκεντρο ενός σεισμού είναι το σημείο όπου ξεκινά η θραύση των πετρωμάτων, ενώ επίκεντρο είναι η κατακόρυφη προβολή του στην επιφάνεια της γης. Η απόσταση μεταξύ υπόκεντρου και επίκεντρου ενός σεισμού ονομάζεται εστιακό βάθος του σεισμού. Η ενέργεια που απελευθερώνεται στο σεισμικό ρήγμα μεταφέρεται στην επιφάνεια της γης και το δομημένο περιβάλλον μέσω διαμηκών (P-waves), εγκάρσιων (S-waves) και επιφανειακών (Love και Rayleigh) σεισμικών κυμάτων.

Οι σεισμοί καταγράφονται με διάφορα όργανα, αλλά όσον αφορά τις κατασκευές πολιτικού μηχανικού, πιο χρήσιμες καταγραφές είναι οι επιταχύνσεις του εδάφους. Η επιτάχυνση του εδάφους καταγράφεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού από επιταχυνσιογράφους ισχυρών κινήσεων ανά πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, της τάξης του 1/100 του δευτερολέπτου ή και μικρότερου. Μετά από κάποιες απαραίτητες διορθώσεις, τα επιταχυνσιογραφήματα ενός σεισμού, συνήθως στις δύο οριζόντιες και στην κατακόρυφη διεύθυνση, παρέχονται στους μηχανικούς και ερευνητές για δυναμικές αναλύσεις κατασκευών.

Peak ground acceleration = 3.045 m/s^2 ($=0.310 \text{ g}$)





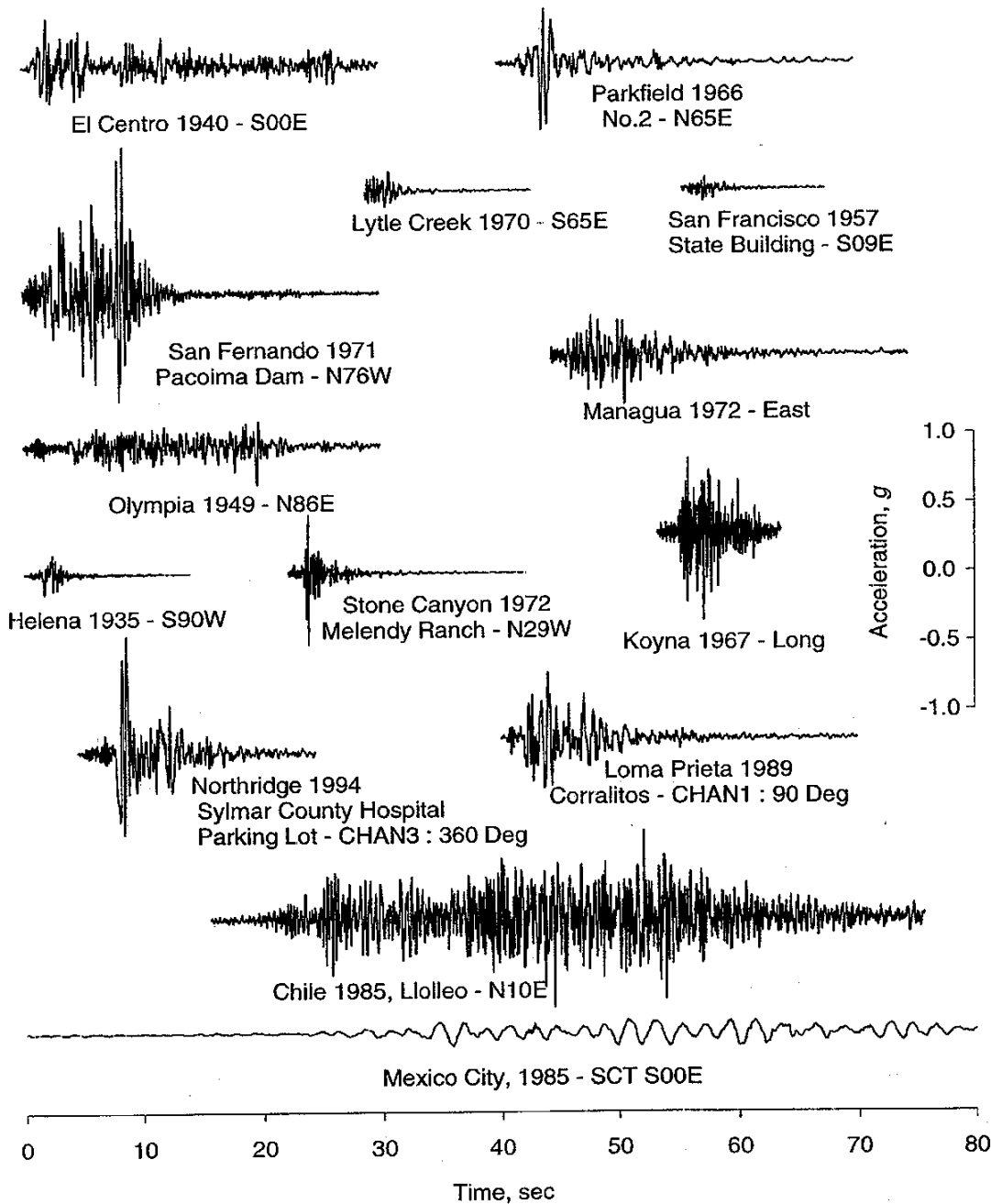
Η μέγιστη, σε απόλυτη τιμή, επιτάχυνση του εδάφους συμβολίζεται σαν PGA (Peak Ground Acceleration) και συχνά χρησιμοποιείται για να τροποποιηθούν κατάλληλα οι επιταχύνσεις του εδάφους, ώστε να έχουν συγκεκριμένο απόλυτο μέγεθος. Όπως φαίνεται στο επιταχυνσιογράφημα του σχήματος, η επιτάχυνση του εδάφους είναι τυχηματική και ακανόνιστη.

Το μέγεθος M ενός σεισμού, το οποίο χαρακτηρίζει την ενέργεια που εκλύεται κατά τη διάρκεια του σεισμού, μετρείται με διάφορες κλίμακες, όπως η κλίμακα Ρίχτερ (M_L), και είναι απόλυτο χαρακτηριστικό του σεισμού. Η κλίμακα Ρίχτερ (Richter), η οποία είναι λογαριθμική, ορίζεται βάσει του λογάριθμου, με βάση το 10, του μέγιστου πλάτους του σεισμικού κύματος όπως θα καταγράφονταν σε ένα σειсмоγράφο τύπου Wood-Anderson σε απόσταση 100 χιλιομέτρων από το επίκεντρο του σεισμού. Αύξηση κατά μία μονάδα μεγέθους του σεισμού, εκφρασμένου στην κλίμακα Ρίχτερ, αντιστοιχεί σε δεκαπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης των δονήσεων που θα καταγράφονταν από ένα σειсмоγράφο τύπου Wood-Anderson και περίπου 30 φορές μεγαλύτερη έκλυση σεισμικής ενέργειας. Ως βαθμός μηδέν στην κλίμακα Ρίχτερ είχε καθοριστεί η ασθενέστερη σεισμική δόνηση που θα μπορούσε να καταγραφεί με τους τότε διαθέσιμους σειсмоγράφους, αν και οι σύγχρονοι σειсмоγράφοι μπορούν να καταγράψουν ασθενέστερους σεισμούς, οι οποίοι ορίζονται με αρνητικές τιμές. Η μέγιστη τιμή μεγέθους σεισμού στη κλίμακα Ρίχτερ που θα μπορούσε πρακτικά να υπάρξει είναι γύρω στο 9.5 R. Τα τελευταία χρόνια, αντί της κλίμακας Ρίχτερ, χρησιμοποιείται η Σεισμική Ροπή (M_w) για να ποσοτικοποιηθεί το μέγεθος ενός σεισμού.

Οι επιπτώσεις ενός σεισμού στις κατασκευές εξαρτώνται από την απόσταση από το επίκεντρο του σεισμού, το εστιακό βάθος, τα εδάφη μεταξύ υποκέντρου και κατασκευής κ.λπ. Ο βαθμός και το είδος των επιπτώσεων ενός σεισμού, δηλαδή ζημιών, χαρακτηρίζονται από την ένταση του σεισμού, η οποία διαφέρει από περιοχή σε περιοχή. Η γνωστότερη κλίμακα μέτρησης της έντασης ενός σεισμού, της οποίας η μέτρηση είναι υποκειμενική, είναι η κλίμακα Mercalli. Η κλίμακα Mercalli, η οποία έχει 12 στάθμες (από I έως XII) εκτίμησης της έντασης μέσω των επιπτώσεων ενός σεισμού, χρησιμοποιείται κυρίως για εκτίμηση της έντασης ενός σεισμού σε πυκνοκατοικημένες περιοχές.

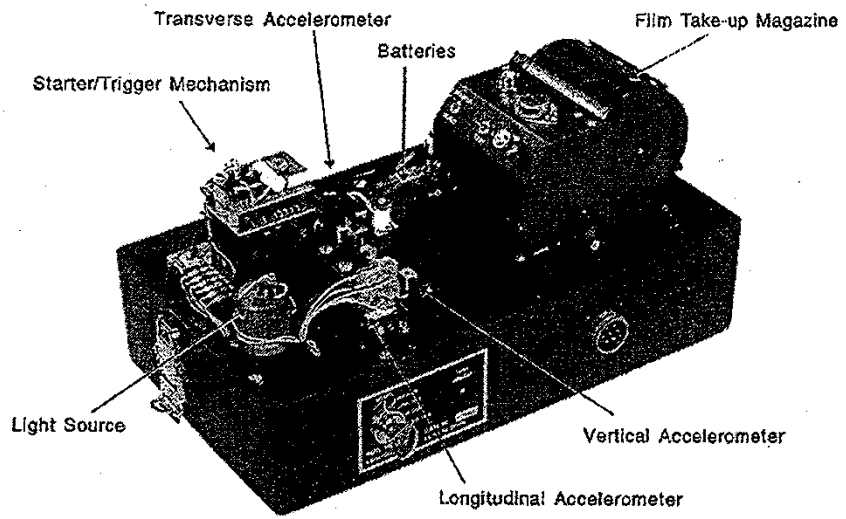
Η Ελλάδα δυστυχώς, είναι από τις πιο σεισμόπληκτες περιοχές λόγω σύγκλισης της Αφρικανικής προς την Ευρασιατική πλάκα στην περιοχή του ελληνικού τόξου. Οι πιο ισχυροί σεισμοί των τελευταίων χρόνων στον ελληνικό χώρο είναι οι σεισμοί της Θεσσαλονίκης (6.5R, 1978), των Αλκυονίδων Νήσων (6.7R, 1981), της Καλαμάτας (6.0R, 1986), του Αίγιου (6.1R, 1995), της Αθήνας (5.9R, 1999), των Κυθήρων (5.9R, 2006) και της Λευκάδας (6.5R, 2015). Επιπλέον, στον ελληνικό χώρο οι επικρατούσες συχνότητες των περισσότερων σεισμών δυστυχώς βρίσκονται στην περιοχή των κύριων ιδιοσυχνοτήτων των κοινών κατασκευών, προκαλώντας, όπως θα δούμε στη συνέχεια, έντονα φαινόμενα συντονισμού και σημαντικά σεισμικά φορτία με τις αντίστοιχες επιπτώσεις.

Ground motions

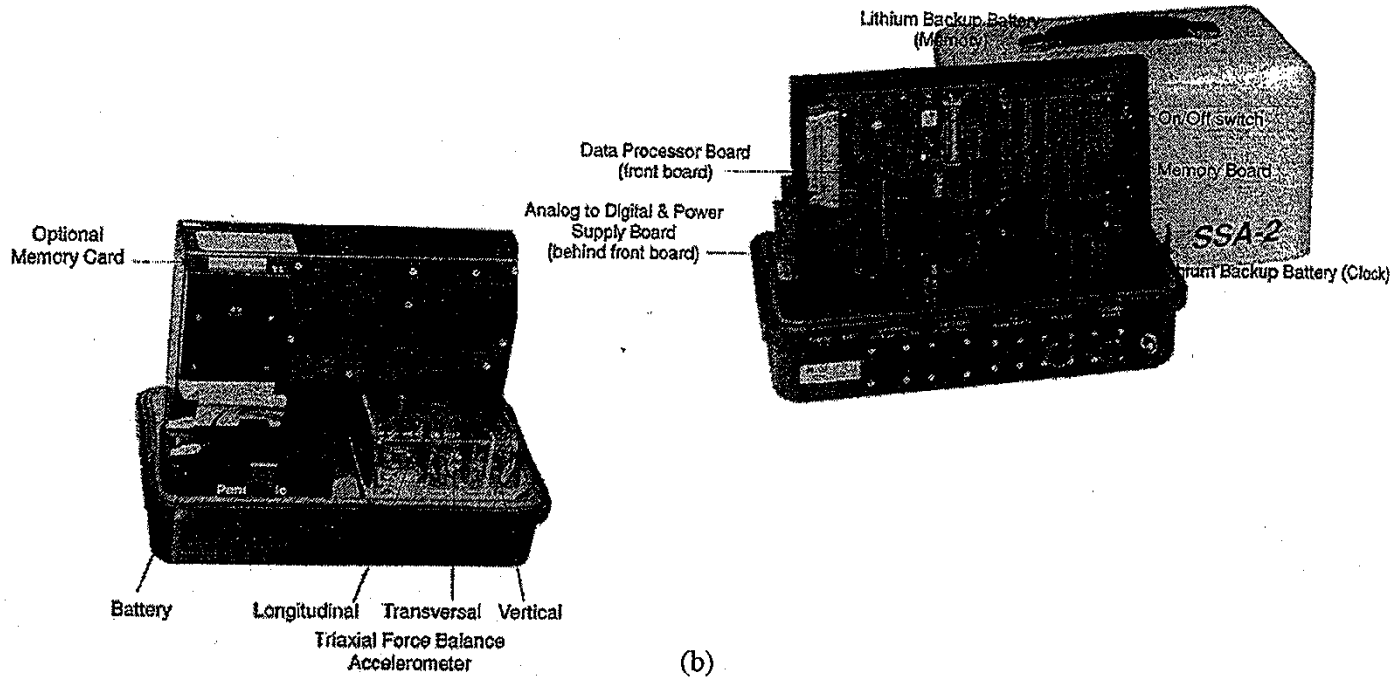


Από το βιβλίο:
*“Dynamics of
Structures: Theory
and Applications
to Earthquake
Engineering”*

- Anil K. Chopra



(a)



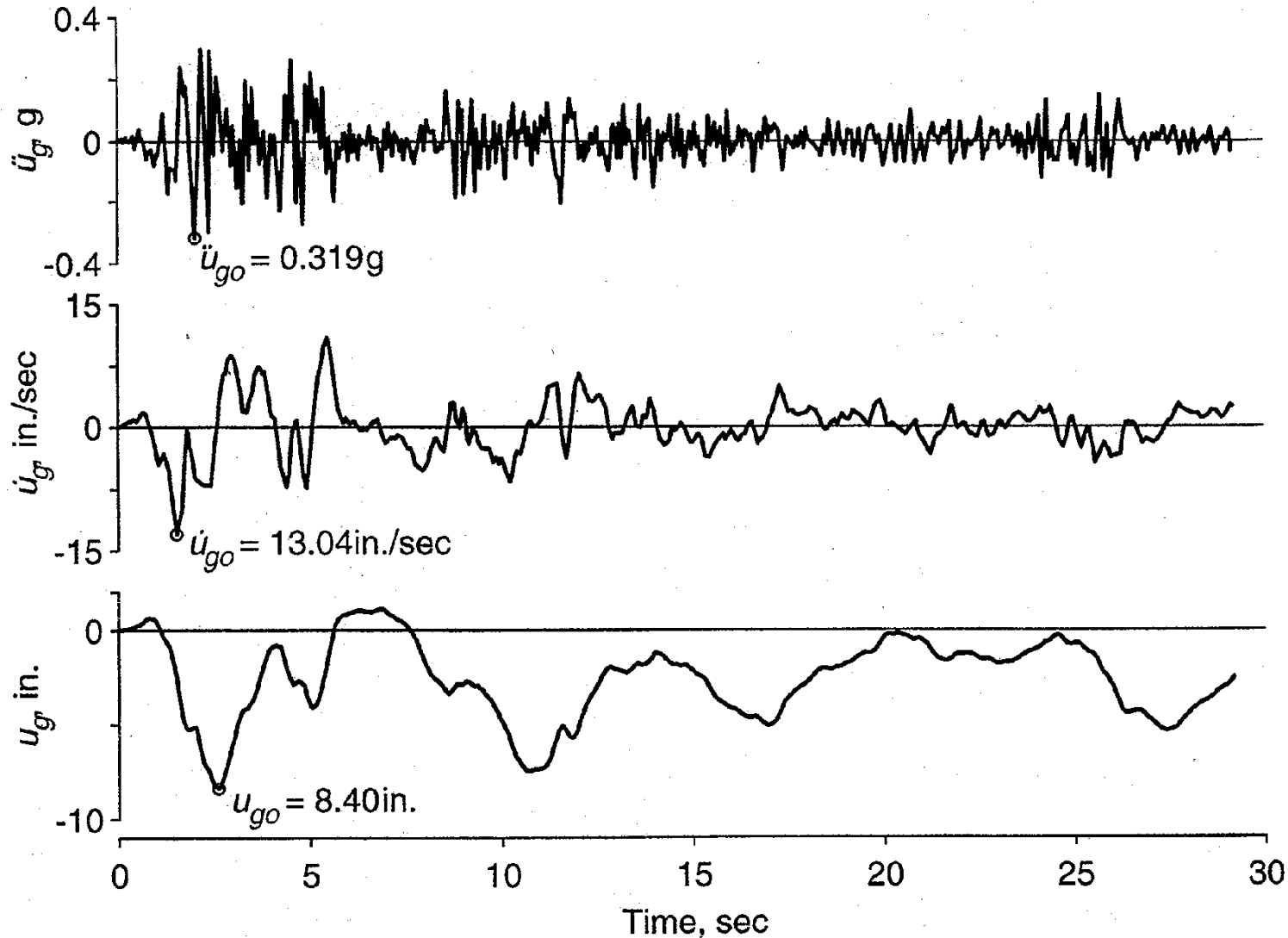
(b)

Figure 6.1.1 Strong motion accelerographs: (a) SMA-1, an analog-recording instrument with undamped natural frequency of 25 Hz and damping 60% of critical; (b) SSA-2, a digital recording instrument with undamped natural frequency of 50 Hz and damping 70% of critical. (Courtesy of Kinemetrics, Inc.)

Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

El Centro ground motion (N-S component) May 18, 1940



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra

Απόκριση ΜΒΣ υπό σεισμική διέγερση

Η εξίσωση κίνησης ενός ΜΒΣ υπό σεισμική διέγερση είναι:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t) = P_{\text{eff}}(t)$$

όπου $u_g(t)$ και $\ddot{u}_g(t)$ είναι η μετακίνηση και η επιτάχυνση του εδάφους, αντίστοιχα.

Δηλαδή, μπορεί να οριστεί ισοδύναμη εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη $P_{\text{eff}}(t)$, η οποία αντιπροσωπεύει τη σεισμική δράση.

Η εξίσωση κίνησης μπορεί εναλλακτικά να γραφεί και ως ακολούθως:

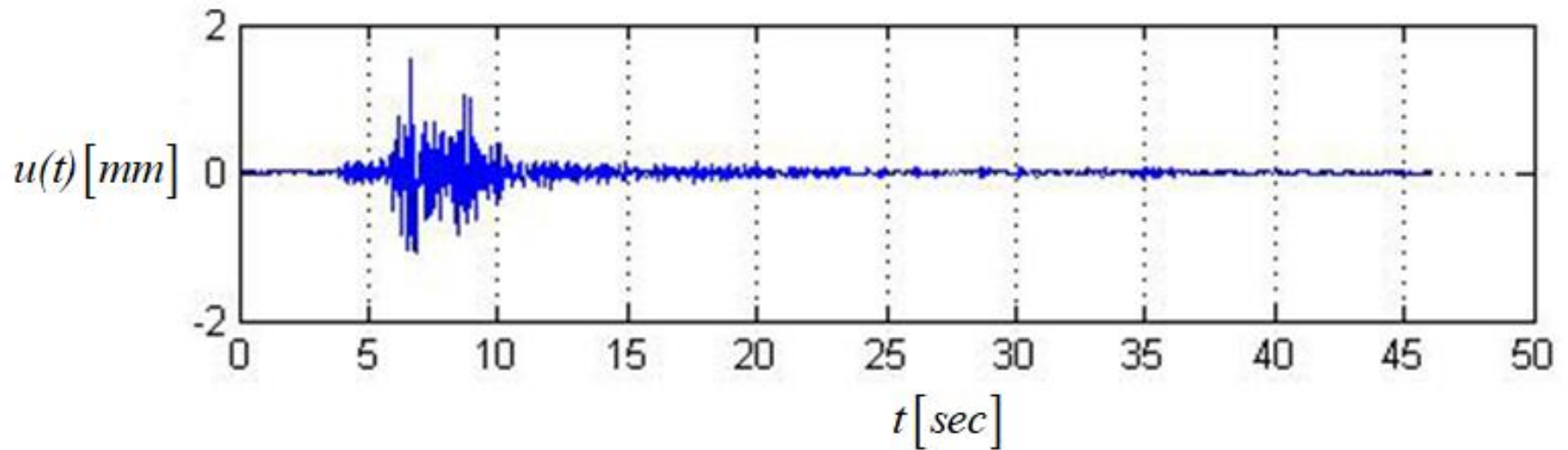
$$\ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t) = P_{\text{eff}}(t)$$

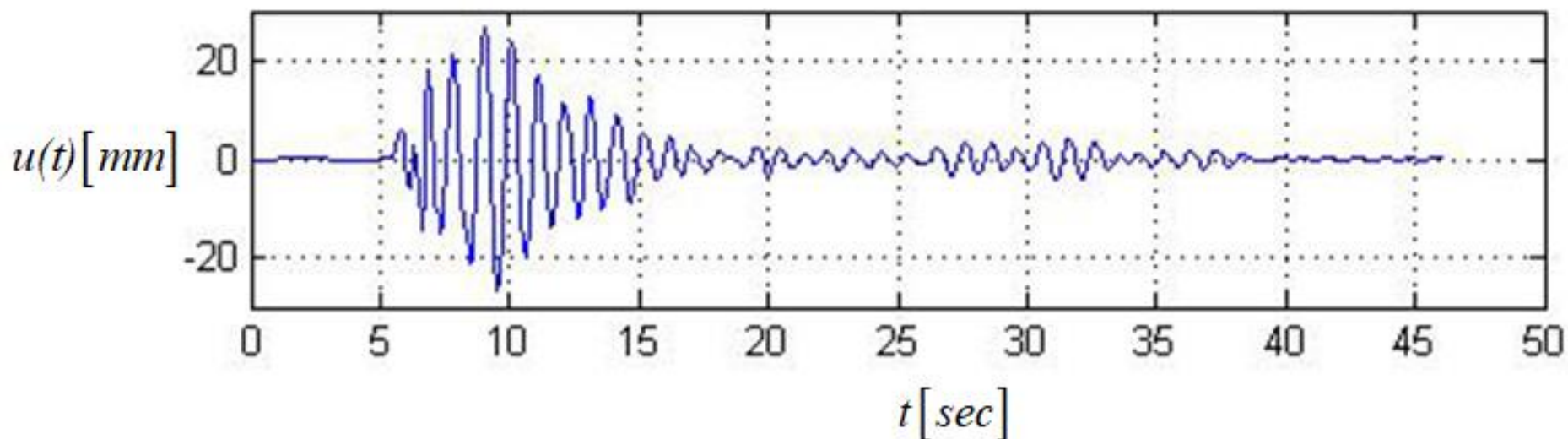
$$\ddot{u}(t) + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{u}(t) + \omega_n^2 \cdot u(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

Έχοντας τις επιταχύνσεις του εδάφους $\ddot{u}_g(t)$ ανά πολύ μικρά χρονικά διαστήματα (π.χ. κάθε $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$), μπορούν να υπολογιστούν οι άγνωστες μετακινήσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις, οι οποίες, εξαρτώνται από την ιδιοσυχνότητα, ω_n , και το λόγο απόσβεσης, ζ , ενός ΜΒΣ, πέρα από τις επιταχύνσεις του σεισμού. Αφού οι σεισμικές διεγέρσεις χαρακτηρίζονται από τόσο ακανόνιστες επιταχύνσεις του εδάφους χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για τη δυναμική ανάλυση, όπως οι προαναφερθέντες ΜΚΔ και η μέθοδος Newmark. Η απόκριση σε μια συγκεκριμένη σεισμική διέγερση εξαρτάται από την ιδιοπερίοδο της, T_n , και το λόγο ιξώδους απόσβεσης, ζ .

Το πιο κάτω σχήμα παρουσιάζει τη σχετική μετακίνηση ενός ΜΒΣ με ιδιοπερίοδο, T_n , ίση με 0.1 sec λόγω της σεισμικής διέγερσης του σεισμού Αθηνών (Σεπόλια,1999), θεωρώντας το λόγο ιξώδους απόσβεσης ίσο με 5 %.

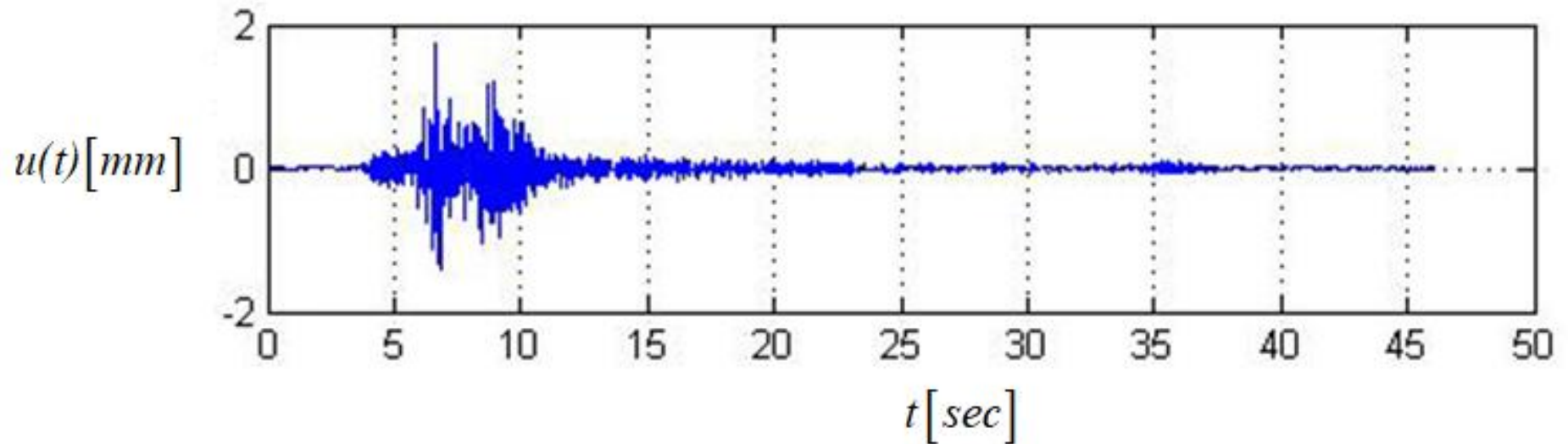


Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει τη σχετική μετακίνηση ενός ΜΒΣ με ιδιοπερίοδο 1.0 sec διατηρώντας τον ίδιο λόγο απόσβεσης, υπό την ίδια σεισμική διέγερση.

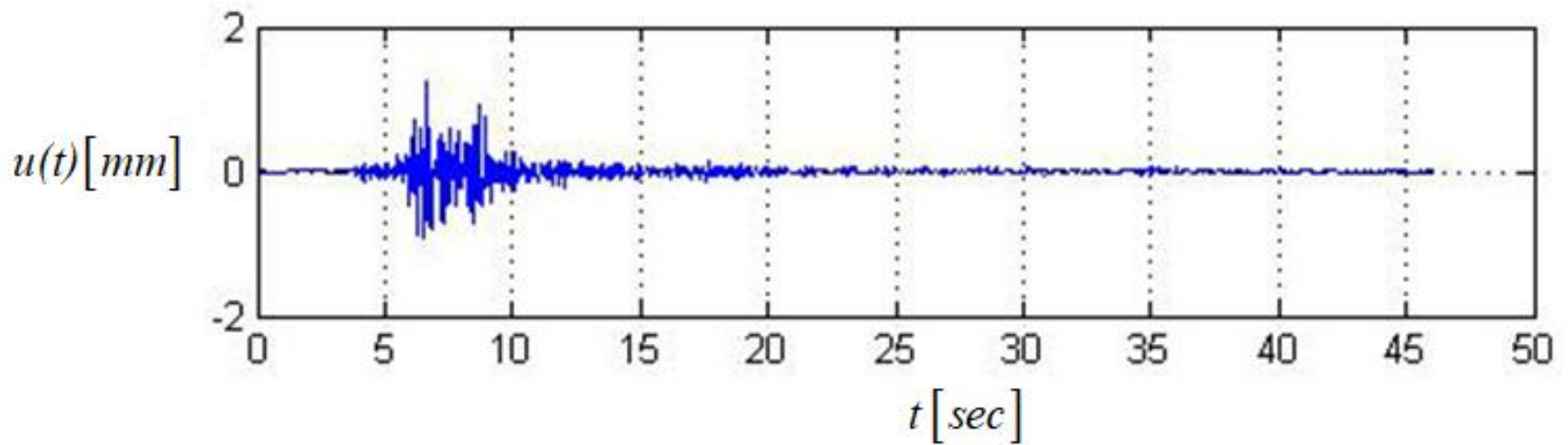


Είναι φανερή η έντονη επίδραση της ιδιοπεριόδου του ΜΒΣ στην απόκριση του σε κάποια συγκεκριμένη σεισμική διέγερση, όπως φαίνεται από τα προηγούμενα σχήματα.

Για να διερευνηθεί ο ρόλος της απόσβεσης, στο επόμενο σχήμα, παρουσιάζεται η απόκριση ενός ΜΒΣ με ιδιοπερίοδο ίση με 0.1 δευτερόλεπτα και ποσοστό απόσβεσης 2% .



Ενώ, το επόμενο σχήμα, δίνει την απόκριση του ίδιου ΜΒΣ με ποσοστό ιξώδους απόσβεσης 10 %, υπό την ίδια σεισμική διέγερση, όπου είναι εμφανής η μείωση της απόκρισης με την αύξηση του λόγου απόσβεσης.



Από το βιβλίο:

“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

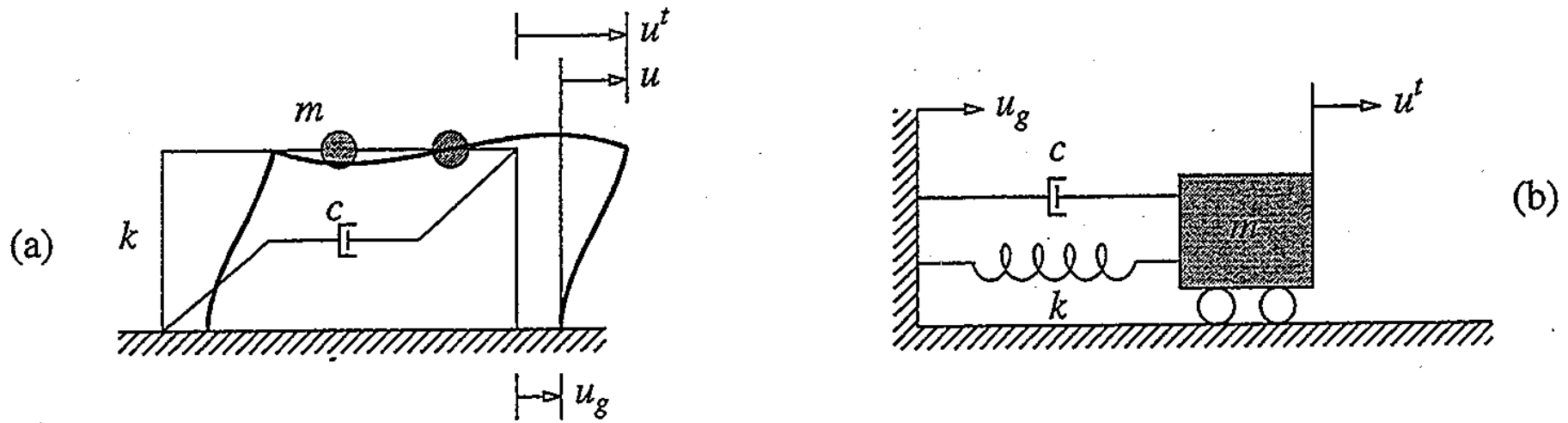
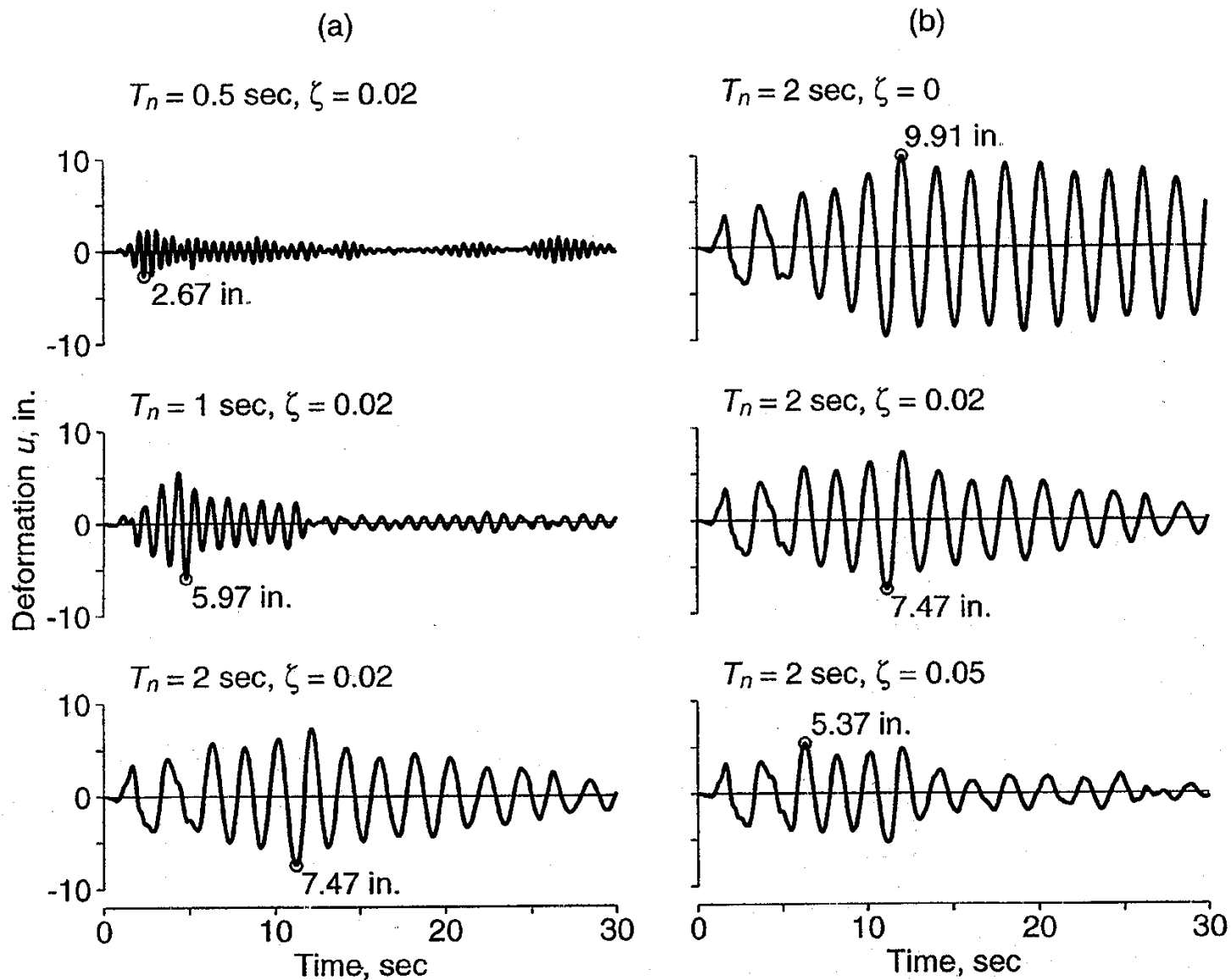


Figure 6.2.1 Single-degree-of-freedom systems.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t) = P_{\text{eff}}(t)$$

Deformation response of SDF systems to El Centro ground motion



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 6.4.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t) = P_{\text{eff}}(t)$$

Αφού υπολογιστούν οι σχετικές μετακινήσεις, $u(t)$, μπορούν ακολούθως να προσδιοριστούν τα εντατικά μεγέθη ή οποιοδήποτε άλλο μέγεθος σε κάθε χρονική στιγμή t με στατική ανάλυση του ΜΒΣ υπό τα αντίστοιχα ισοδύναμα στατικά φορτία:

$$f_s(t) = k \cdot u(t)$$

$$k = m \cdot \omega_n^2 \Rightarrow f_s(t) = m \cdot \omega_n^2 \cdot u(t) = m \cdot S_a(t)$$

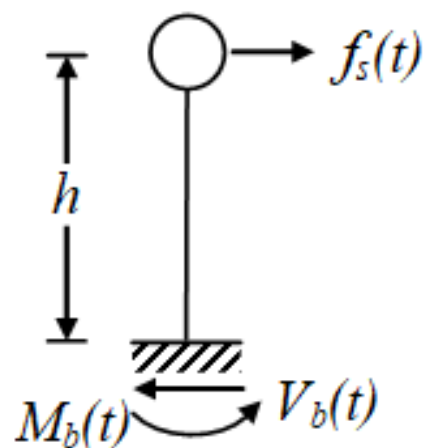
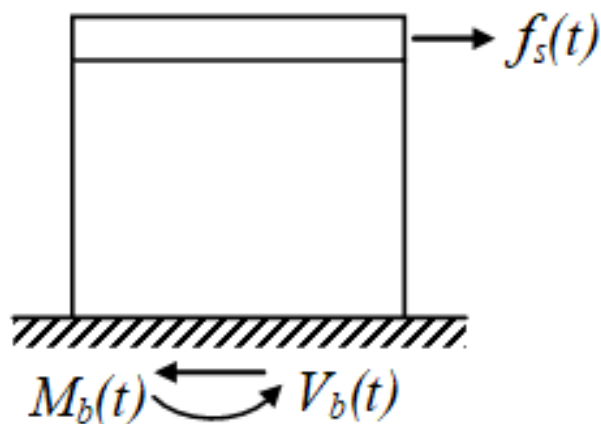
Το γινόμενο $(\omega_n^2 \cdot u(t))$ ορίζεται ως φασματική επιτάχυνση (spectral acceleration), ή ψευδοεπιτάχυνση (pseudoacceleration), $S_a(t)$.

$$S_a(t) = \omega_n^2 \cdot u(t)$$

Επιβάλλοντας την αντίστοιχη ισοδύναμη στατική φόρτιση ($m \cdot A(t)$) σε ένα ΜΒΣ μπορούν να υπολογιστούν, από απλή στατική ανάλυση, η τέμνουσα βάσης, $V_b(t)$, και η ροπή ανατροπής, $M_b(t)$, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, t , ως ακολούθως:

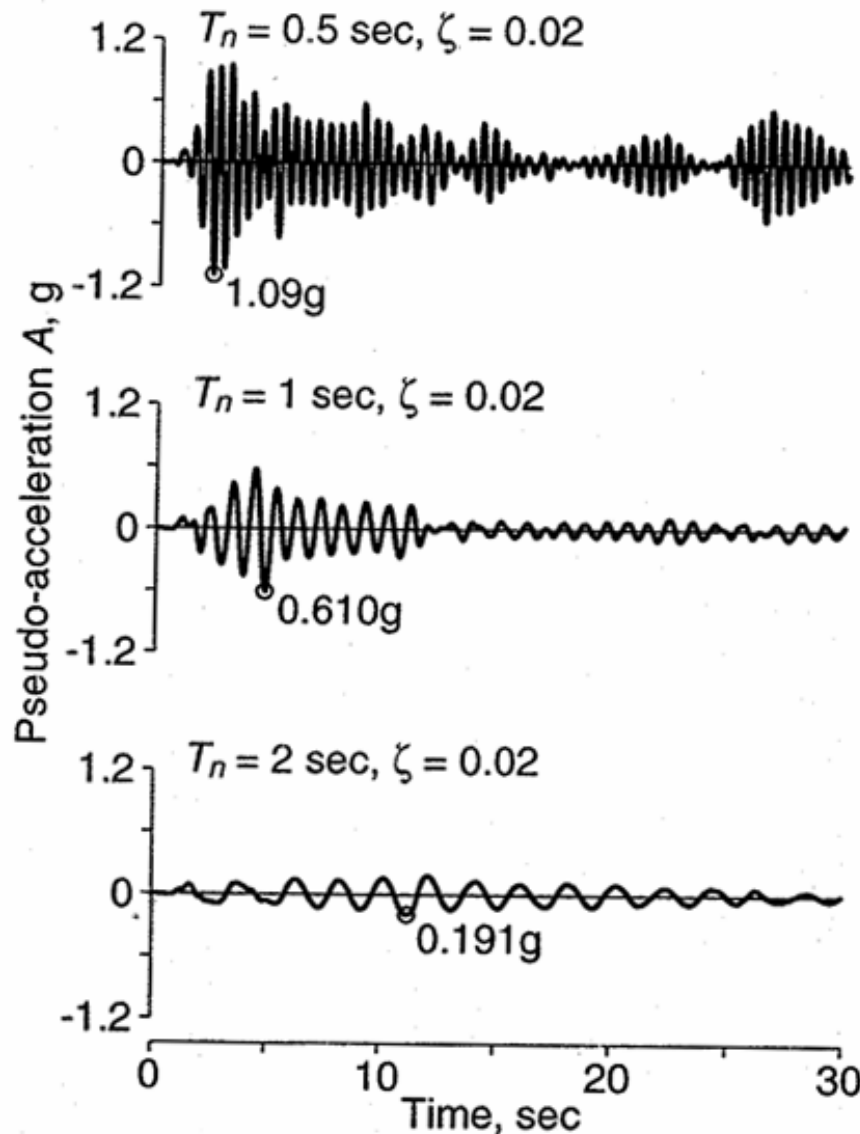
$$V_b(t) = f_s(t) = k \cdot u(t) = m \cdot S_a(t)$$

$$M_b(t) = f_s(t) \cdot h = V_b(t) \cdot h = m \cdot h \cdot S_a(t)$$



$$F_s(t) = k \cdot u(t)$$

Pseudo-acceleration response of SDF systems to El Centro ground motion

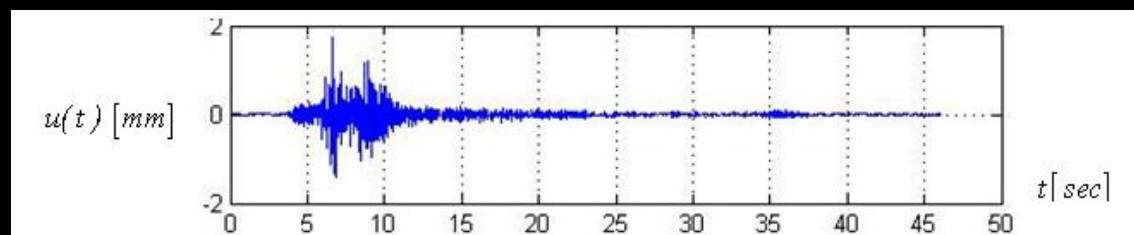


Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

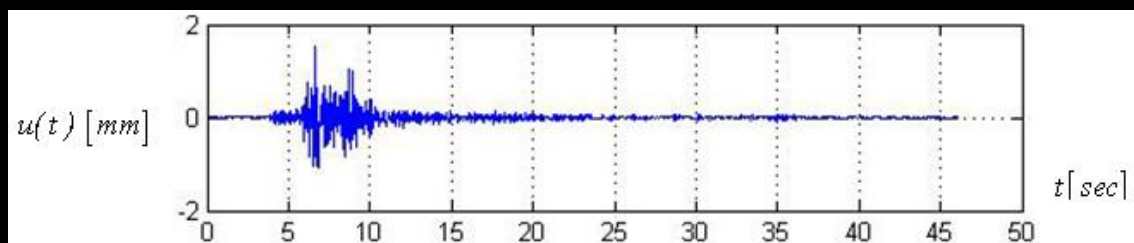
- Anil K. Chopra

Απόκριση ΜΒΣ λόγω σεισμικής διέγερσης του σεισμού Αθηνών (Σεπόλια, 1999)

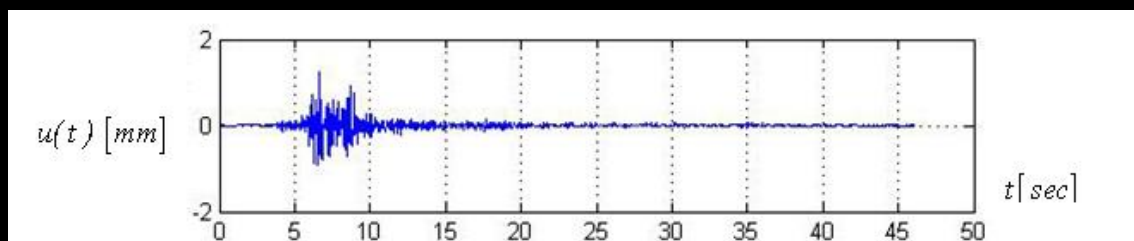
$$T_n = 0.1 \text{ sec}, \zeta = 2\%$$



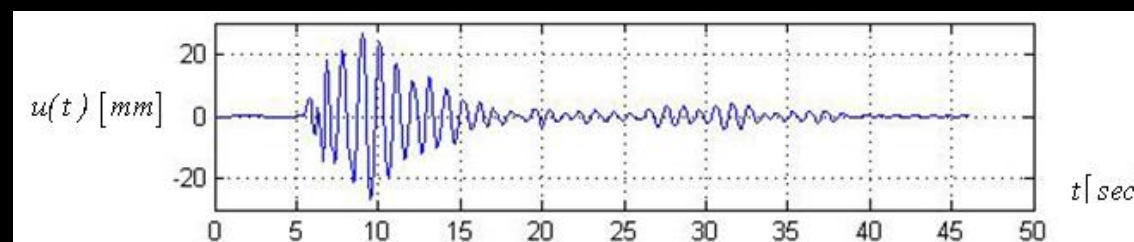
$$T_n = 0.1 \text{ sec}, \zeta = 5\%$$



$$T_n = 0.1 \text{ sec}, \zeta = 10\%$$



$$T_n = 1.0 \text{ sec}, \zeta = 5\%$$



Φάσματα απόκρισης

Στην πράξη για σκοπούς μόρφωσης και διαστασιολόγησης μια κατασκευής μας ενδιαφέρουν οι μέγιστες τιμές που είναι και συνήθως οι πιο κρίσιμες.

Για αυτό το λόγο δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της χρονοϊστορίας της απόκρισης μιας κατασκευής υπό σεισμική διέγερση, δηλαδή οι τιμές των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά επαρκεί ο υπολογισμός ή η εκτίμηση των μέγιστων τιμών των αποκρίσεων.

Λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της κάθε σεισμικής διέγερσης που θα δράσει σε μια κατασκευή, αλλά και το γεγονός ότι, ακόμη και για την ίδια σεισμική διέγερση, είναι αρκετά έντονες οι διακυμάνσεις των μέγιστων αποκρίσεων ανάλογα με τα δυναμικά χαρακτηριστικά της κατασκευής, τα οποία δεν μπορούν να υπολογιστούν με απόλυτη ακρίβεια, ίσως συνιστά περιττό υπολογιστικό κόστος ο ακριβής προσδιορισμός της χρονοϊστορίας της απόκρισης.

Αντί του υπολογισμού της χρονοϊστορίας της απόκρισης μιας κατασκευής, είναι πολύ πιο οικονομική, από υπολογιστικής πλευράς, η εκτίμηση της μέγιστης απόκρισης, αξιοποιώντας τα φάσματα απόκρισης ή σχεδιασμού, των οποίων ο τρόπος κατασκευής περιγράφεται πιο κάτω.

Ένα φάσμα απόκρισης, οποιουδήποτε μεγέθους απόκρισης μας ενδιαφέρει, παρέχει κατευθείαν τη μέγιστη απόκριση εκείνου του συγκεκριμένου μεγέθους για το συγκεκριμένο σεισμό, βάσει της φυσικής ιδιοπεριόδου ή ιδιοσυχνότητας και του λόγου ιξώδους απόσβεσης του ΜΒΣ, χωρίς να χρειάζεται να διενεργηθεί οποιαδήποτε δυναμική ανάλυση.

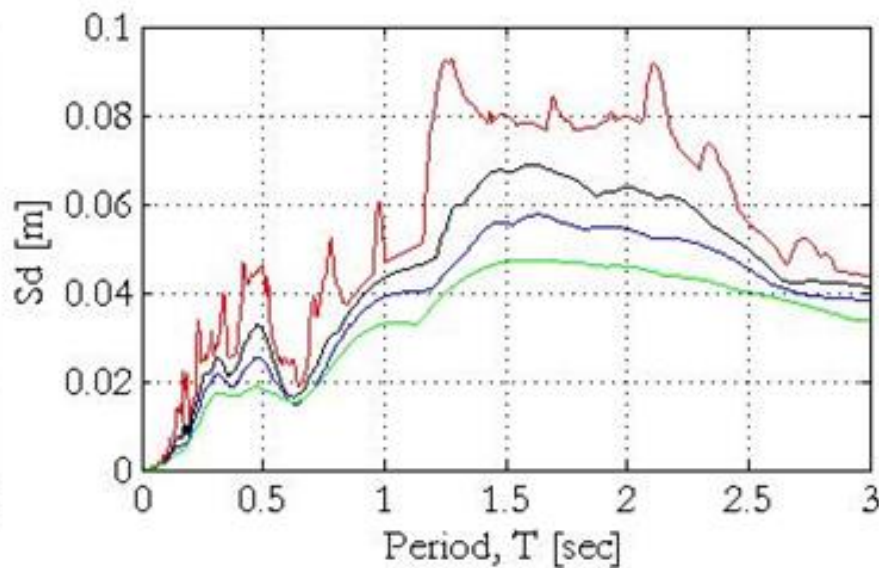
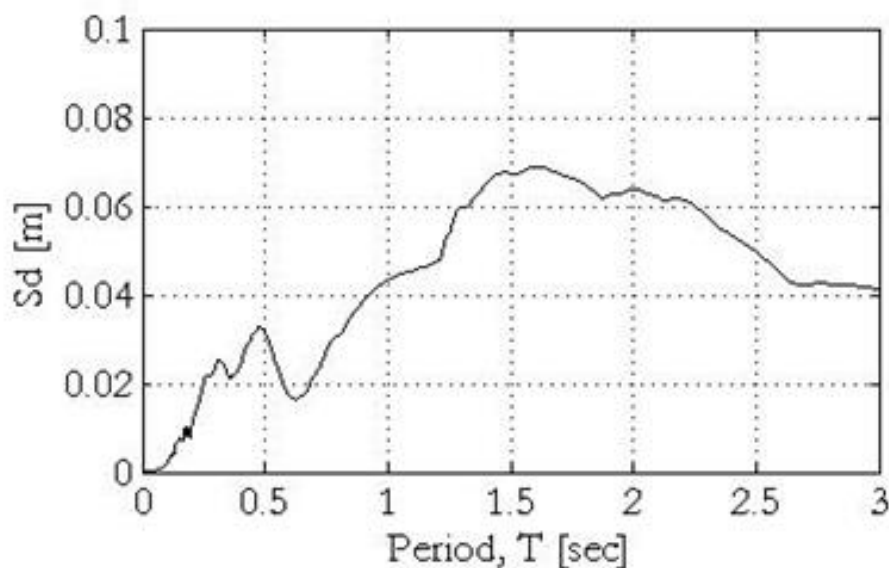
Το μέγεθος απόκρισης που μας ενδιαφέρει περισσότερο στην πράξη για το σχεδιασμό μιας κατασκευής είναι συνήθως η μέγιστη σχετική μετακίνηση, u_{\max} .

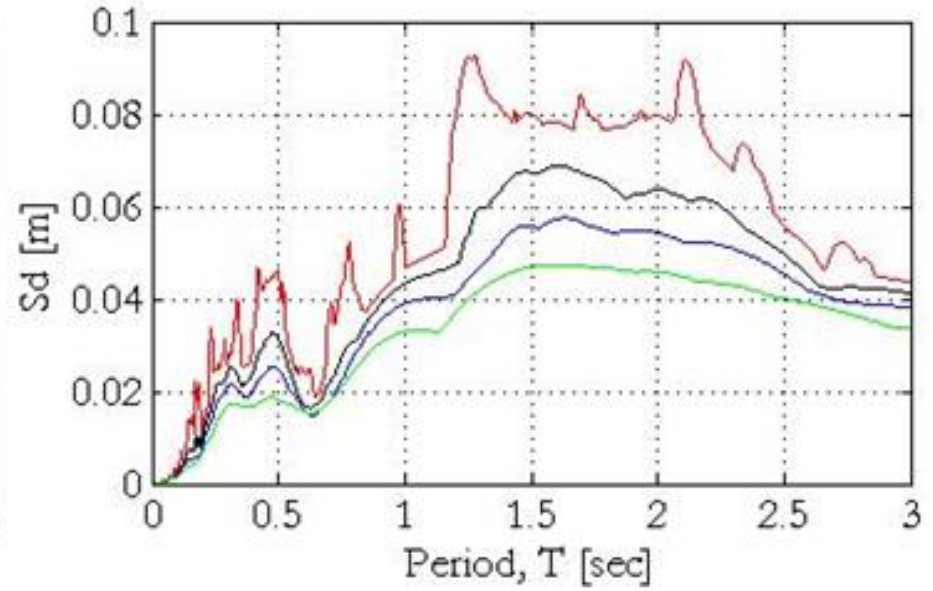
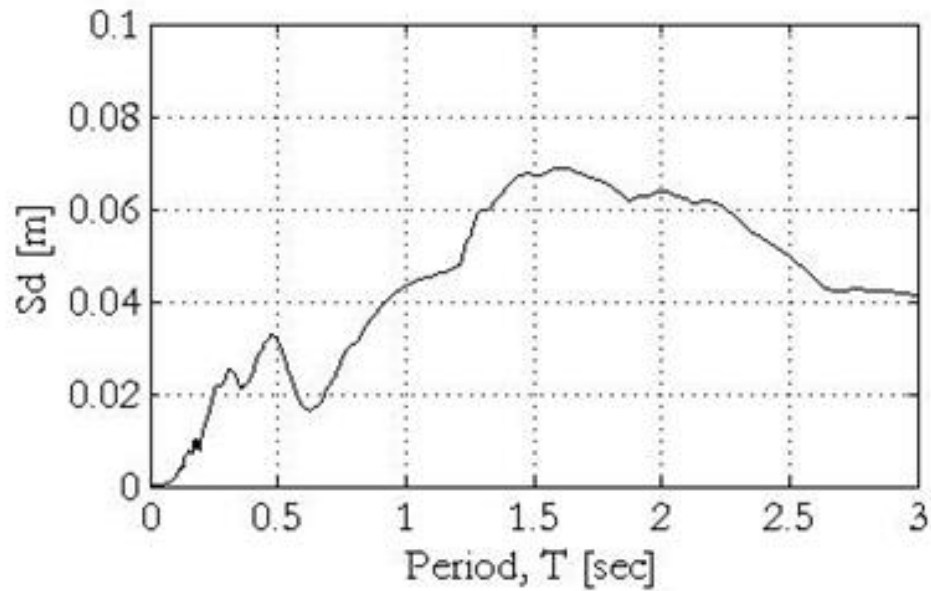
Η μέγιστη σχετική μετακίνηση ενός γραμμικού ελαστικού ΜΒΣ για κάποιο συγκεκριμένο σεισμό εξαρτάται αποκλειστικά από την ιδιοπερίοδο, T_n , και το λόγο ιξώδους απόσβεσης, ζ .

Αυτήν ακριβώς την πληροφορία μας παρέχει το φάσμα απόκρισης (response spectrum) σχετικών (ή φασματικών) μετακινήσεων (spectral displacements - S_d), το οποίο κατασκευάζεται, μεταβάλλοντας, με κάποιο μικρό βήμα, την ιδιοπερίοδο, T_n , για συγκεκριμένο λόγο απόσβεσης, ζ , επιλύοντας το ΜΒΣ και προσδιορίζοντας τη μέγιστη απόκριση, π.χ. τη μέγιστη σχετική μετακίνηση u_{\max} .

$$S_d(T_n, \zeta) = \max |u(t, T_n, \zeta)|$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για διάφορους λόγους απόσβεσης, ζ , προκύπτουν οι αντίστοιχες καμπύλες των φασμάτων απόκρισης, καλύπτοντας κάθε ΜΒΣ με οποιαδήποτε φυσική ιδιοπερίοδο, T_n , και λόγο ιξώδους απόσβεσης, ζ .



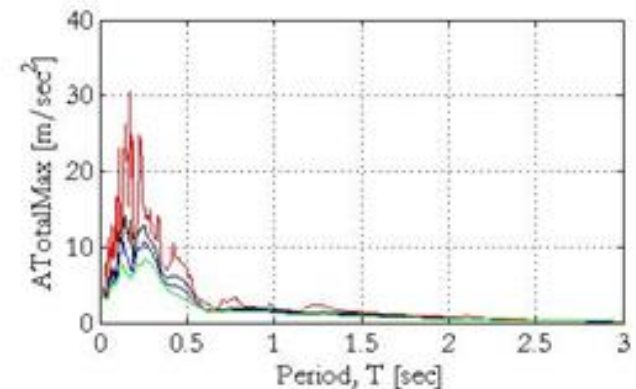
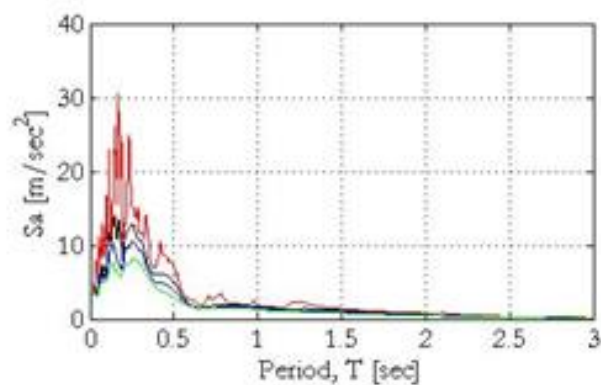
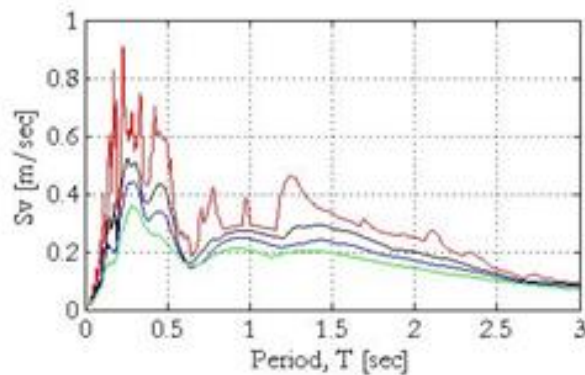


Οι πιο κάτω σχέσεις παρέχουν τα φάσματα απόκρισης ψευδοταχυτήτων (ή φασματικών ταχυτήτων - spectral velocities), ψευδοεπιταχύνσεων (φασματικών επιταχύνσεων - spectral accelerations) και απόλυτων επιταχύνσεων, αντίστοιχα.

$$S_v(T_n, \zeta) = \max |u(t, T_n, \zeta)| \cdot \omega_n$$

$$S_a(T_n, \zeta) = \max |u(t, T_n, \zeta)| \cdot \omega_n^2$$

$$\ddot{u}_{\max}(T_n, \zeta) = \max |\ddot{u}(t, T_n, \zeta) + \ddot{u}_g(t)|$$



Deformation response spectrum

Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

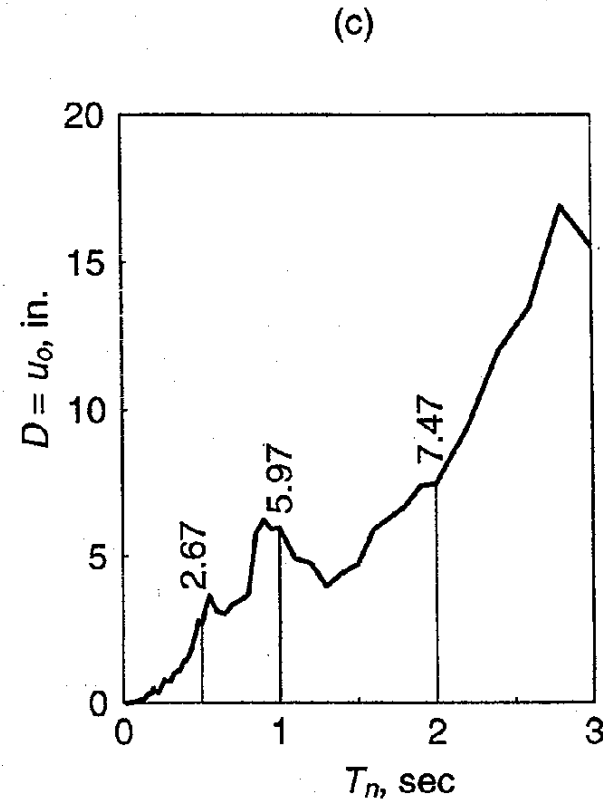
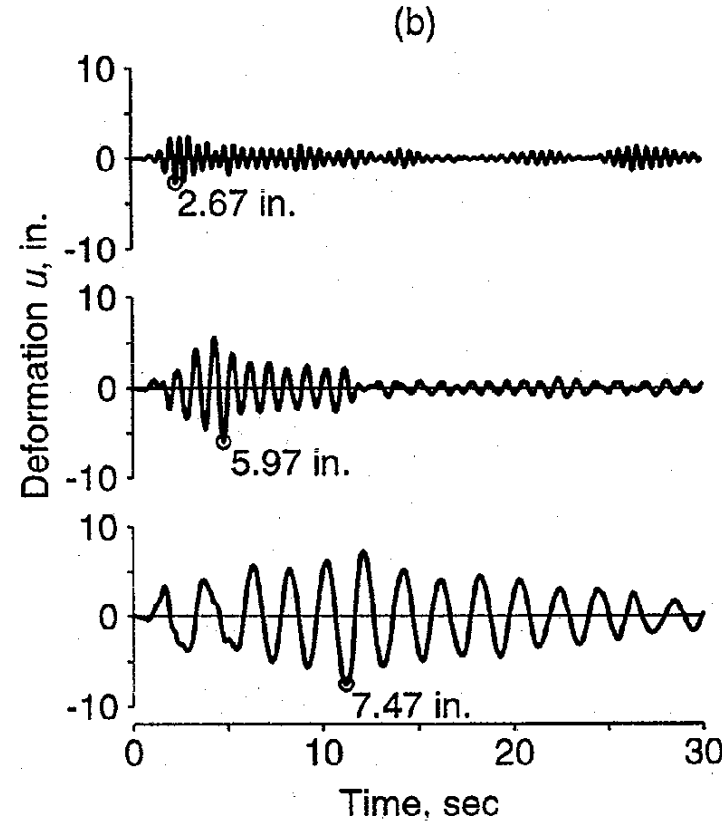
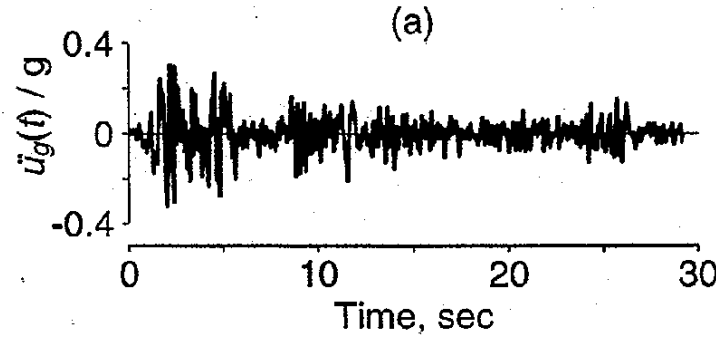
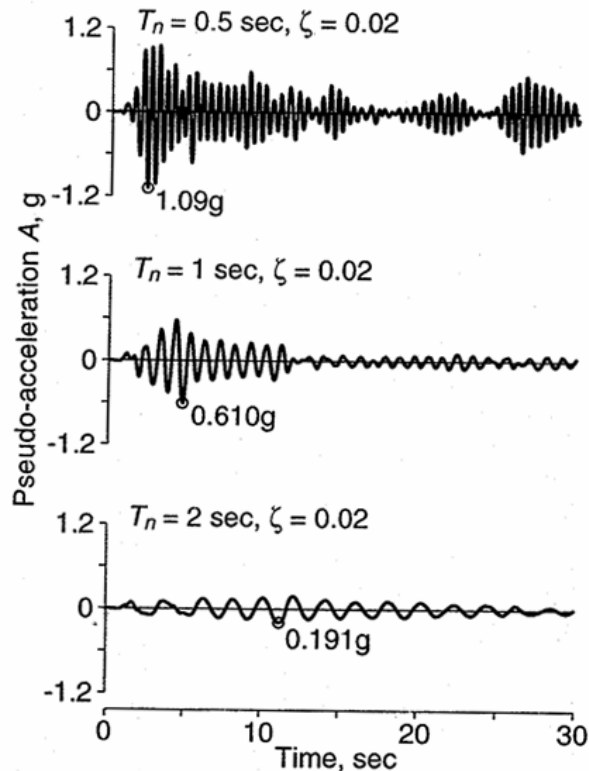


Figure 6.6.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Pseudo-acceleration response of SDF systems to El Centro ground motion



Deformation, pseudo-velocity, and pseudo-acceleration response spectra ($\zeta = 2\%$)

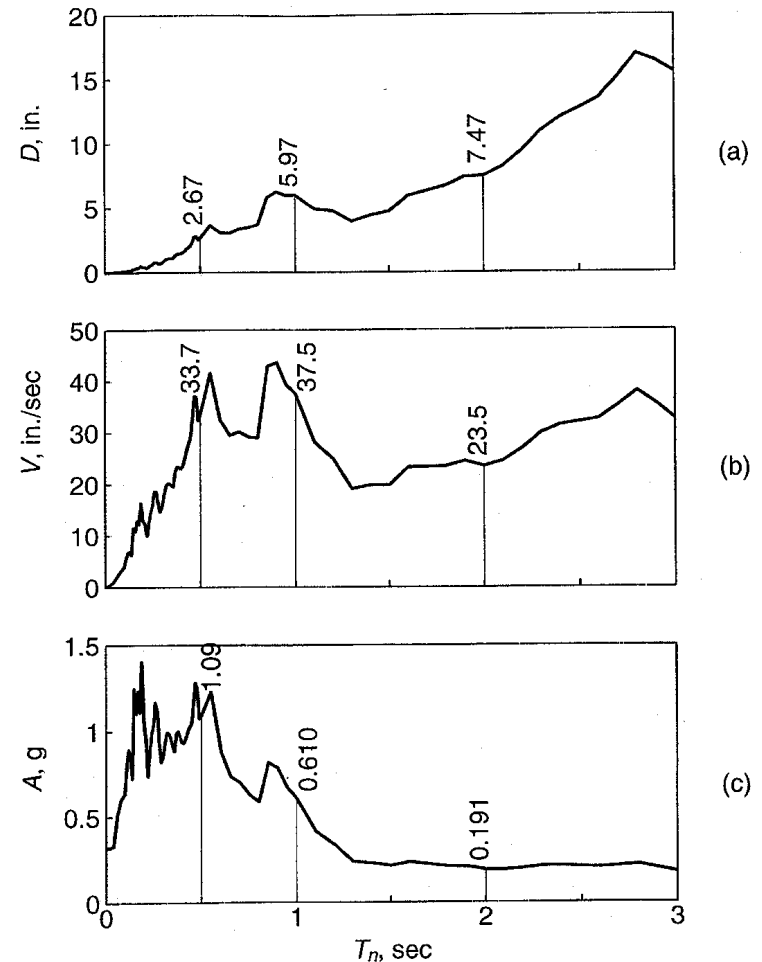


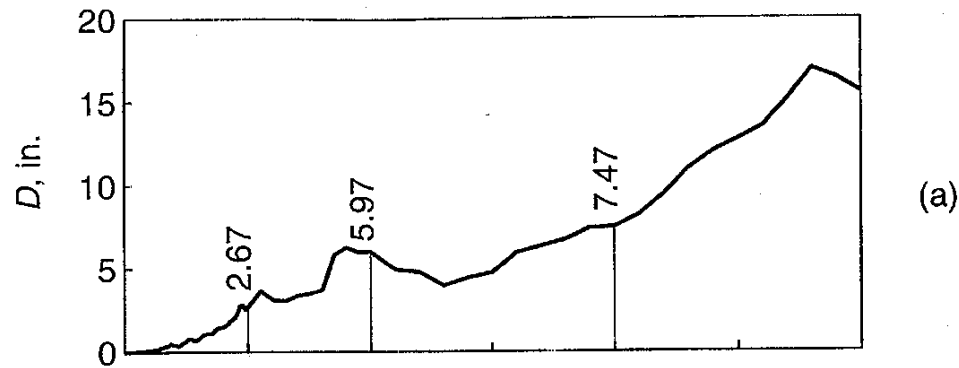
Figure 6.4.3 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prenti

Από το βιβλίο:

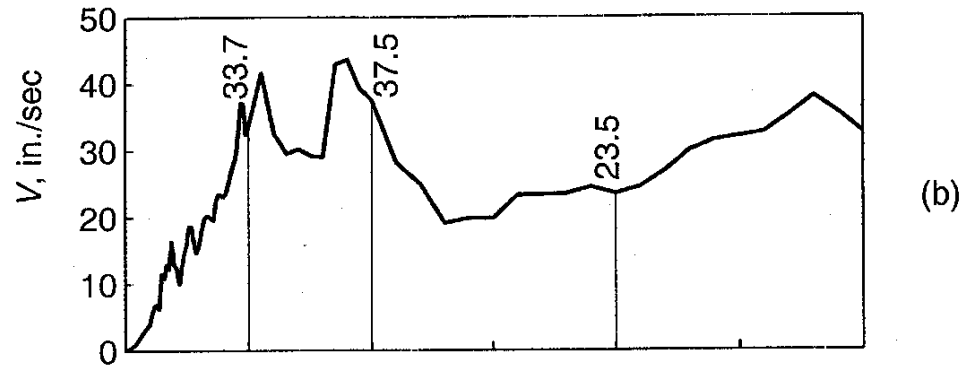
*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

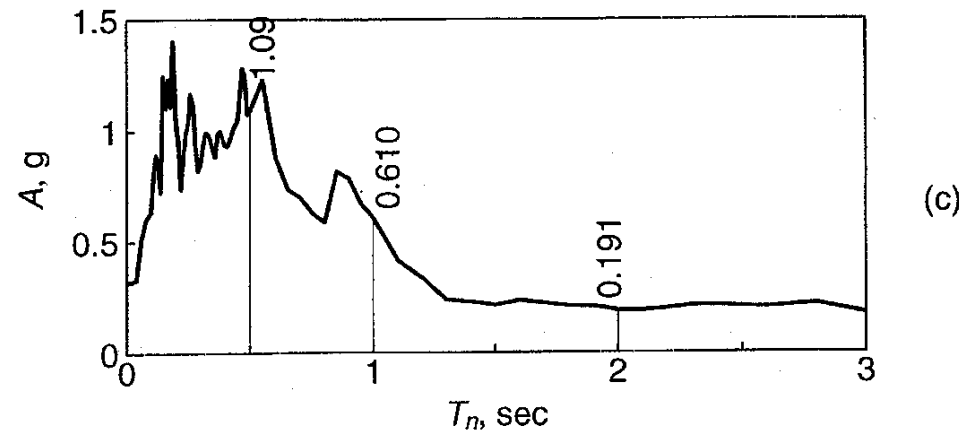
Deformation, pseudo-velocity, and pseudo-acceleration response spectra ($\zeta = 2\%$)



(a)



(b)



(c)

Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering*”

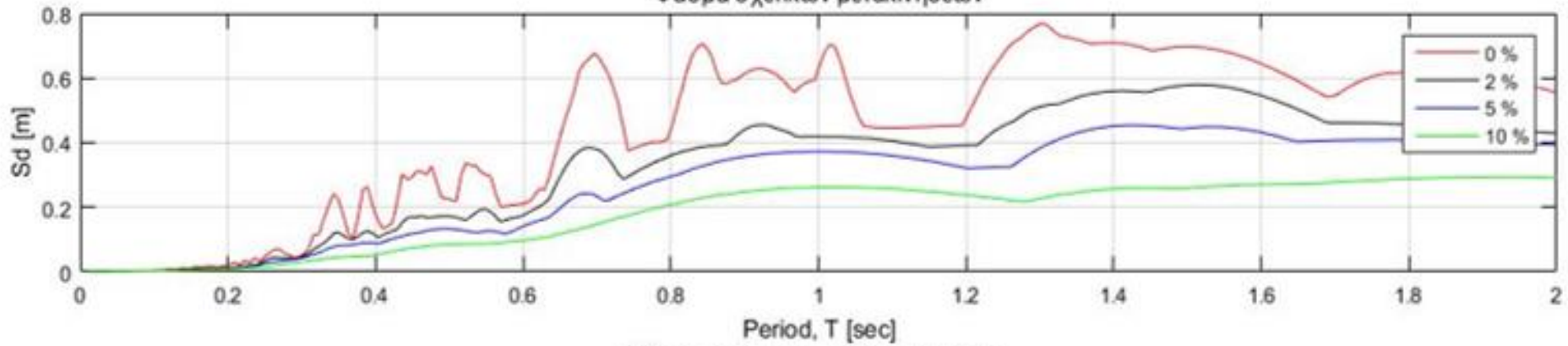
- Anil K. Chopra

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται (α) τα φάσματα απόκρισης σχετικών μετακινήσεων, (β) τα φάσματα ψευδοταχυτήτων (ή φασματικών ταχυτήτων, S_v) και (γ) τα φάσματα ψευδοεπιταχύνσεων (ή φασματικών επιταχύνσεων, S_a) για το σεισμό του Kobe (7.3 βαθμών στην Κλίμακα Ρίχτερ) που είχε συμβεί στην Ιαπωνία το 1995, σκοτώνοντας πάνω από 6000 άτομα και προκαλώντας ζημιές πέραν των 100 δισεκατομμυρίων Ευρώ, για λόγους ιξώδους απόσβεσης $\zeta=0, 2, 5$ και 10%.

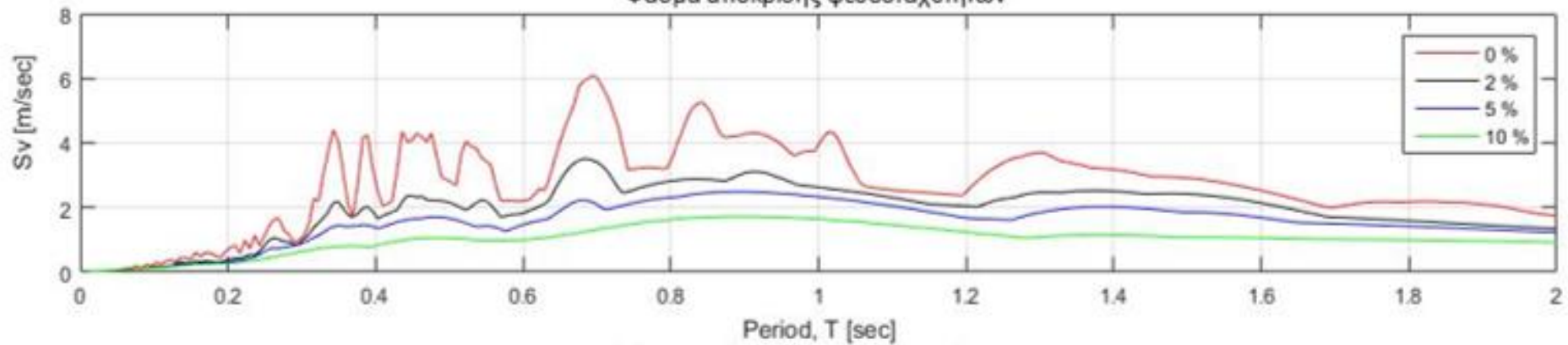
Και, στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα φάσματα απόκρισης σχετικών ταχυτήτων και απόλυτων επιταχύνσεων, για την ίδια σεισμική διέγερση και λόγους ιξώδους απόσβεσης ($\zeta=0, 2, 5$ και 10%).

Τόσο το φάσμα ψευδοταχύτητας, ή φασματικής ταχύτητας, όσο και το φάσμα ψευδοεπιτάχυνσης, ή φασματικής επιτάχυνσης διαφέρουν ελαφρώς από τα αντίστοιχα φάσματα σχετικής ταχύτητας και επιτάχυνσης, καθώς αυξάνει η απόσβεση.

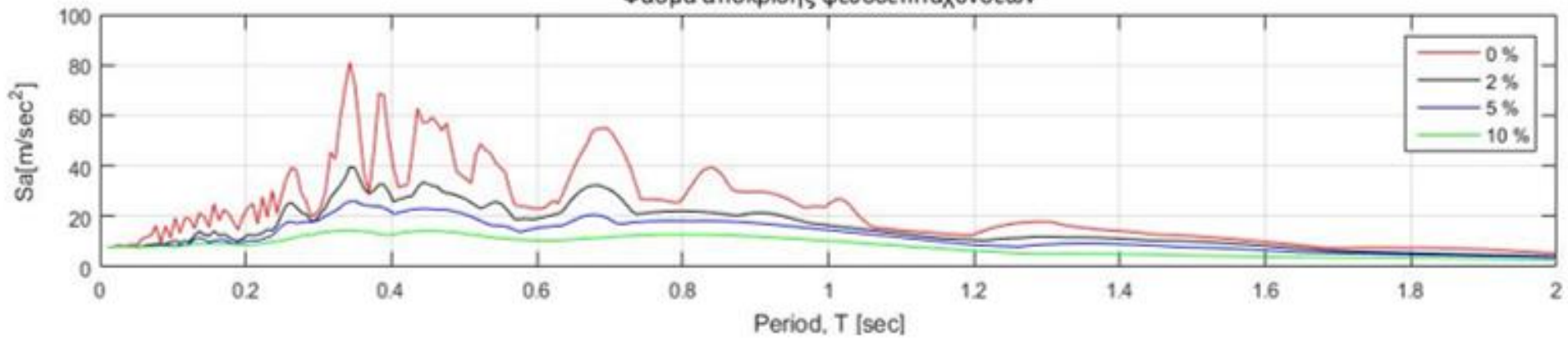
Φάσμα σχετικών μετακινήσεων



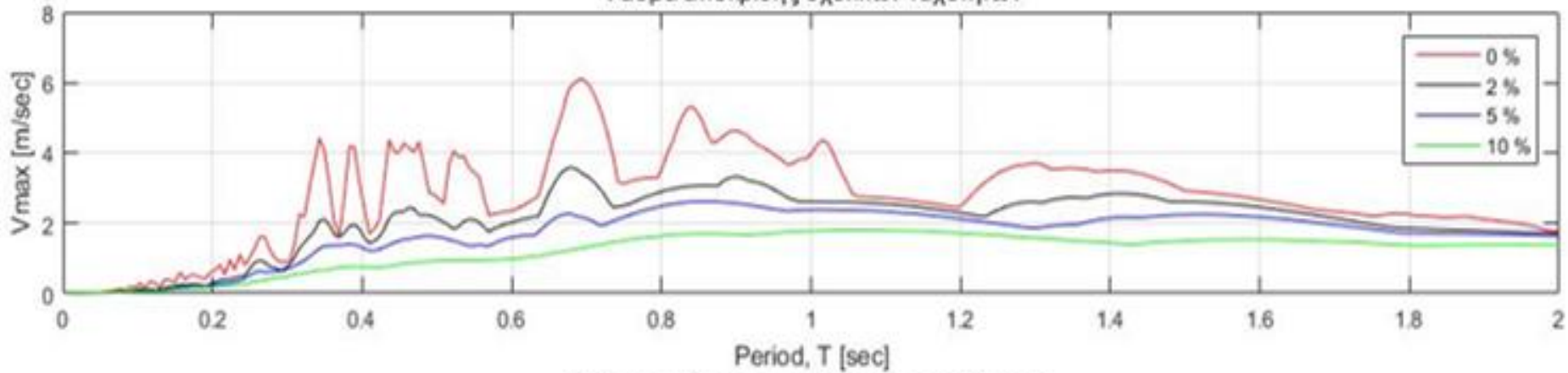
Φάσμα απόκρισης ψευδοταχυτήτων



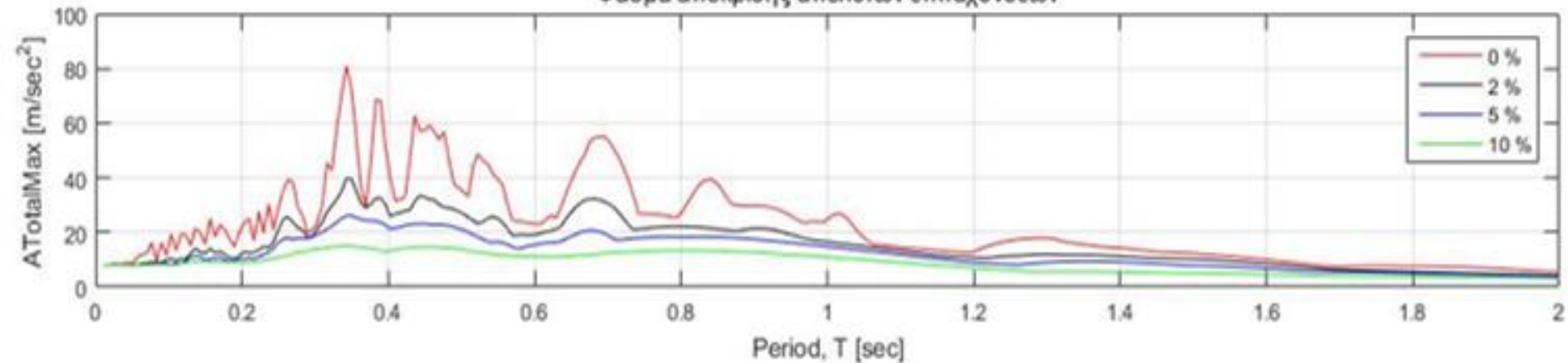
Φάσμα απόκρισης ψευδοεπιταχύνσεων



Φάσμα απόκρισης σχετικών ταχυτήτων



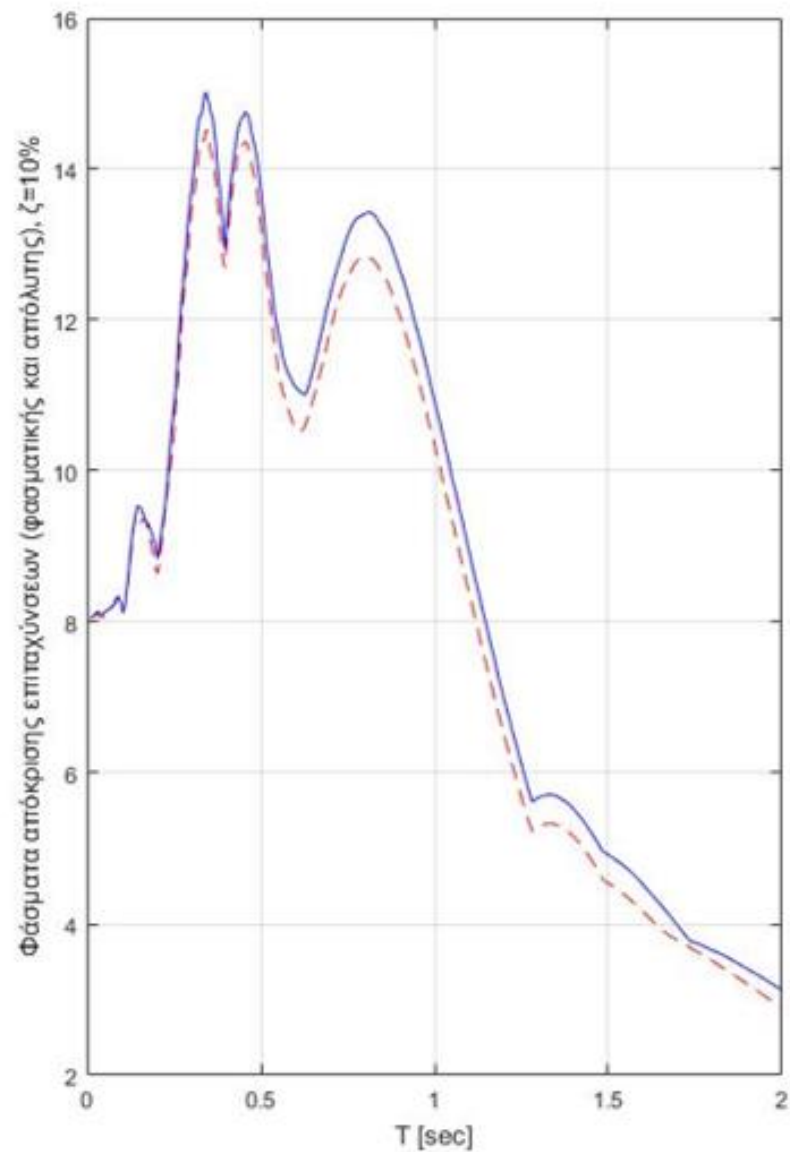
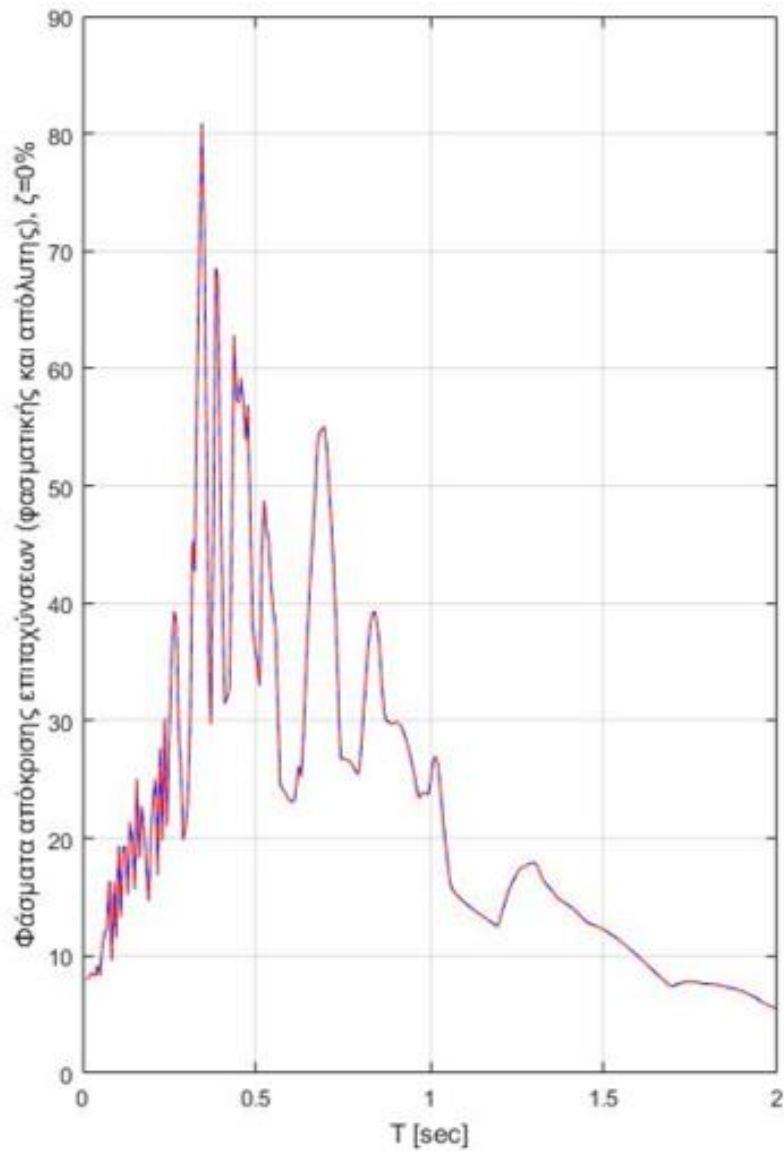
Φάσμα απόκρισης απόλυτων επιταχύνσεων



Το φάσμα ψευδοταχύτητας δεν ταυτίζεται με το φάσμα σχετικής ταχύτητας, αλλά διαφέρει από αυτό, υπερεκτιμώντας για μικρές ιδιοπεριόδους και υποεκτιμώντας σε μεγάλες ιδιοπεριόδους τις μέγιστες σχετικές ταχύτητες.

Αντίστοιχα, το φάσμα ψευδοεπιτάχυνσης υποεκτιμά τις αντίστοιχες μέγιστες σχετικές επιταχύνσεις όσον αυξάνει η ιδιοπερίοδος.

Όταν η απόσβεση είναι μηδενική η φασματική επιτάχυνση ισούται με την πραγματική μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση.



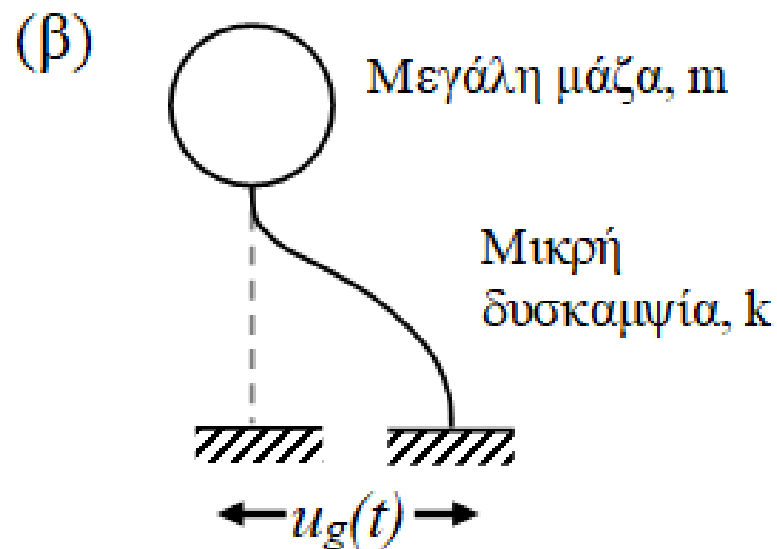
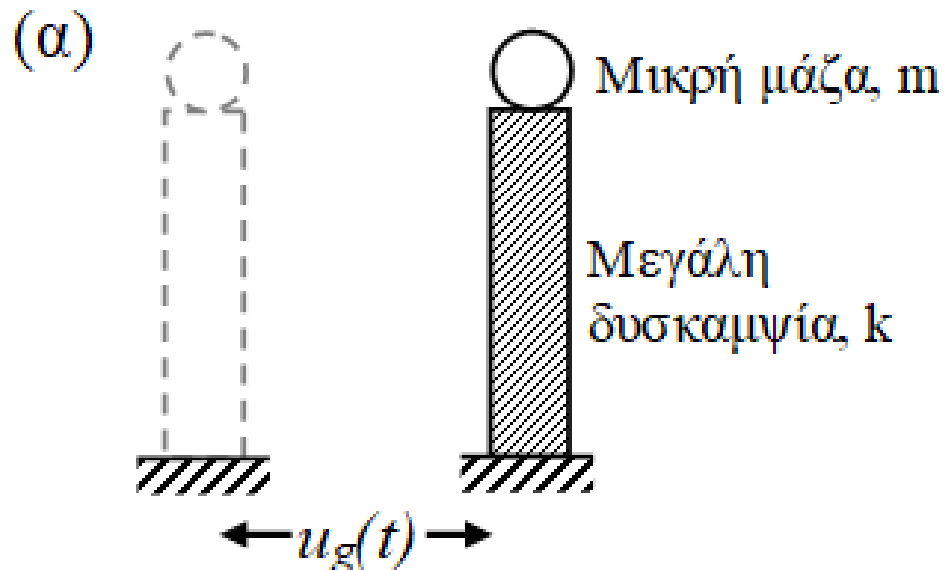
Φάσματα απόκρισης ψευδοεπιταχύνσεων και απολύτων επιταχύνσεων $[m/s^2]$, συναρτήσει ιδιοπεριόδων $[s]$, για λόγους ιξώδους απόσβεσης (α) $\zeta=0\%$ και (β) $\zeta=10\%$.

Τα φάσματα απόκρισης για μια συγκεκριμένη σεισμική διέγερση, πέραν του ότι μας παρέχουν απευθείας τις μέγιστες αποκρίσεις οποιουδήποτε ΜΒΣ, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη απόκριση ενός ΠΒΣ με τη φασματική μέθοδο υπό τη συγκεκριμένη σεισμική διέγερση.

Τα φάσματα απόκρισης έχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στις οριακές περιπτώσεις όσον αφορά τις φυσικές ιδιοπεριόδους ή ιδιοσυχνότητες. Συγκεκριμένα, για συστήματα με πολύ μικρή ιδιοπερίοδο ($T_n \rightarrow 0$), τα οποία έχουν πολύ μεγάλη δυσκαμψία σε σχέση με τη μάζα, το ΜΒΣ τείνει να κινείται μαζί με το έδαφος έχοντας την επιτάχυνση του εδάφους και μηδενική σχετική μετακίνηση.

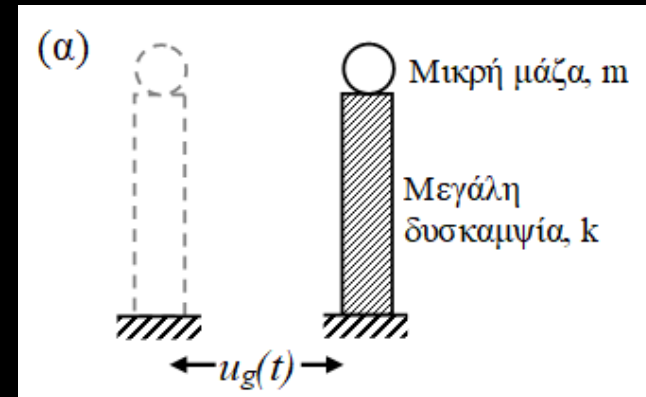
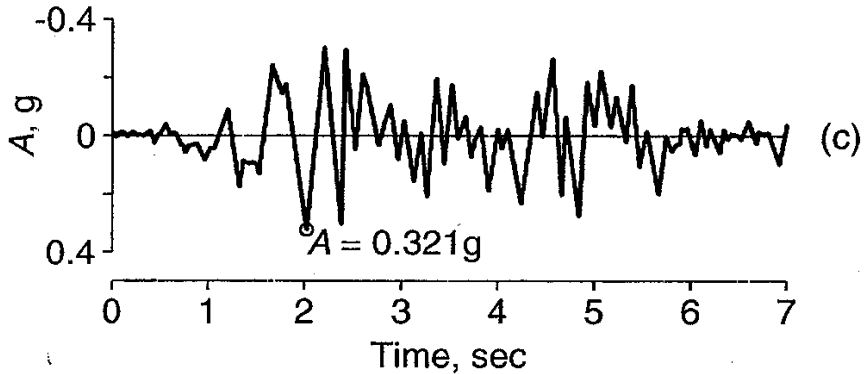
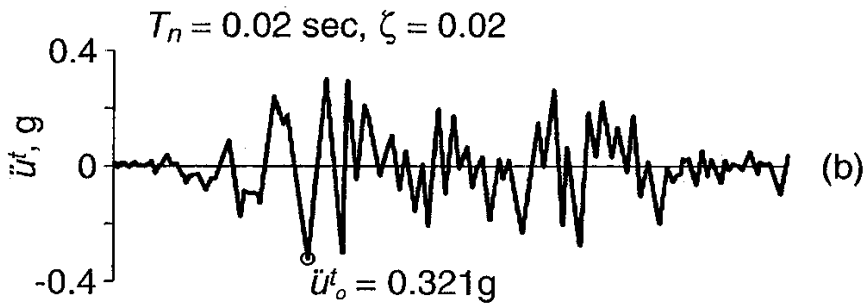
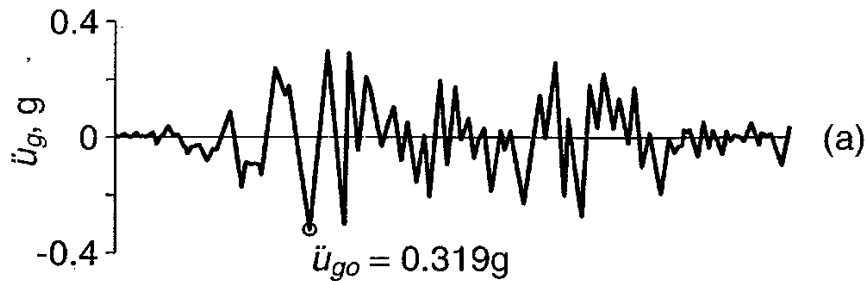
Συνεπώς, η μέγιστη σχετική μετακίνηση τείνει στο μηδέν ($S_d \rightarrow 0$) και η μέγιστη φασματική επιτάχυνση τείνει να ταυτιστεί με τη μέγιστη εδαφική επιτάχυνση ($S_a \rightarrow PGA = \ddot{u}_{g,max}$).

Αντιθέτως, η μάζα ενός πολύ εύκαμπτου ΜΒΣ, το οποίο έχει πολύ μεγάλη φυσική ιδιοπερίοδο, τείνει να παραμείνει στη θέση της, κατά τη διάρκεια μιας σεισμικής διέγερσης, έχοντας σχεδόν μηδενικές επιταχύνσεις και σχετικές μετακινήσεις ίσες με τη μέγιστη σχετική μετακίνηση του εδάφους.



Ακραίες περιπτώσεις ΜΒΣ: (α) πολύ δύσκαμπτο ΜΒΣ (β) πολύ εύκαμπτο ΜΒΣ.

Response $\ddot{u}^t(t)$ and $A(t)$ -- $T_n = 0.02$ sec

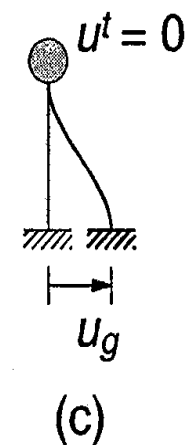
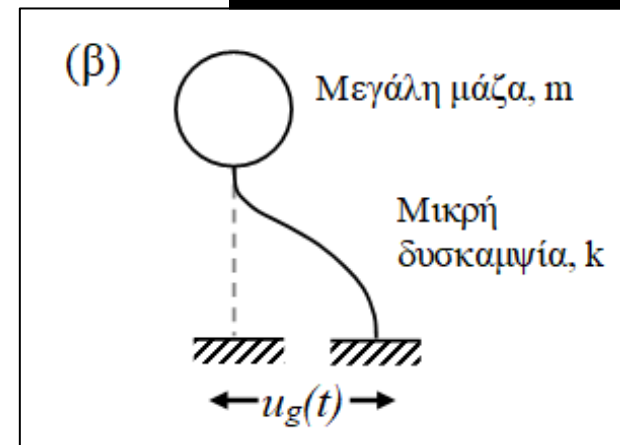
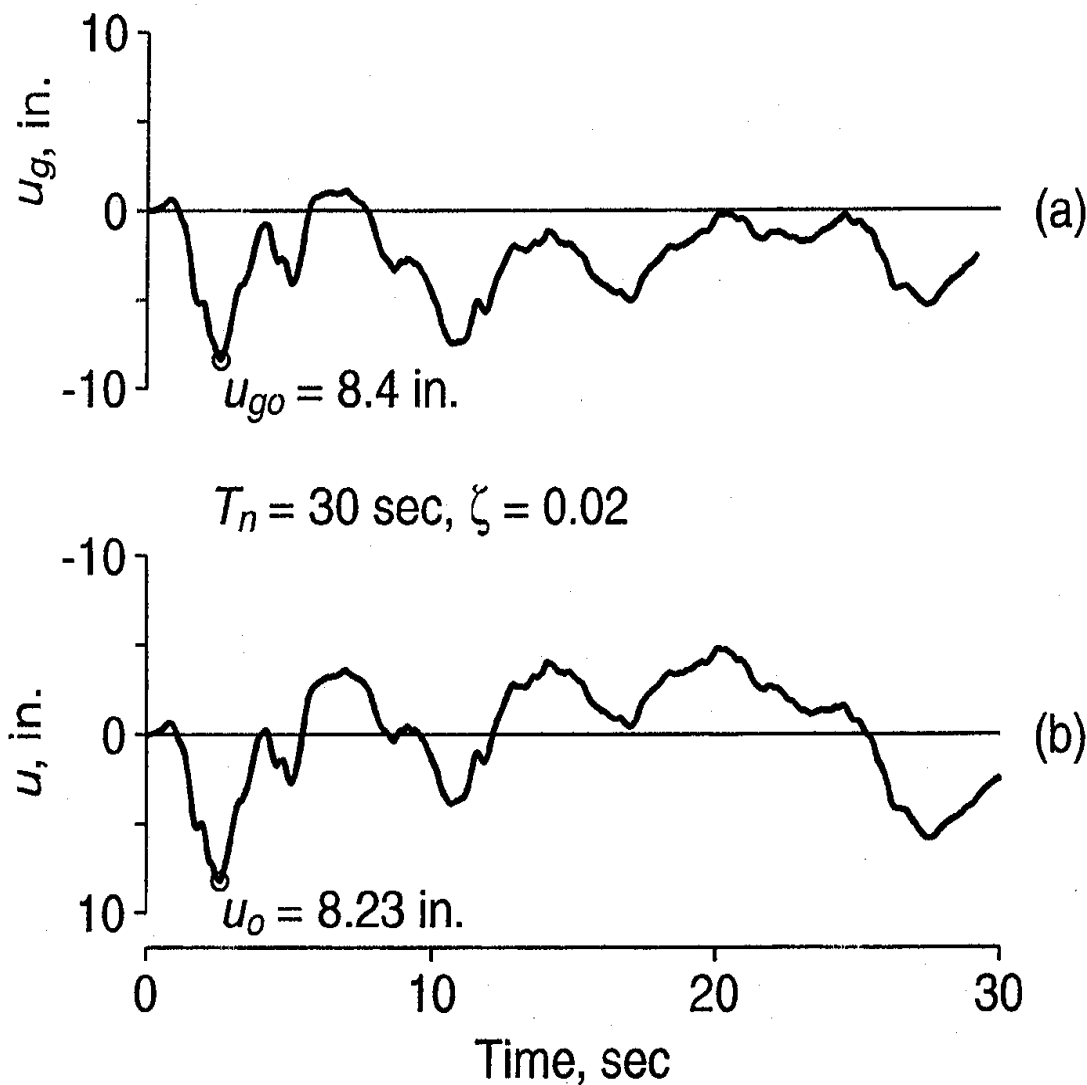


Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

Response $u(t)$ -- $T_n = 30$ sec, $\zeta = 2\%$



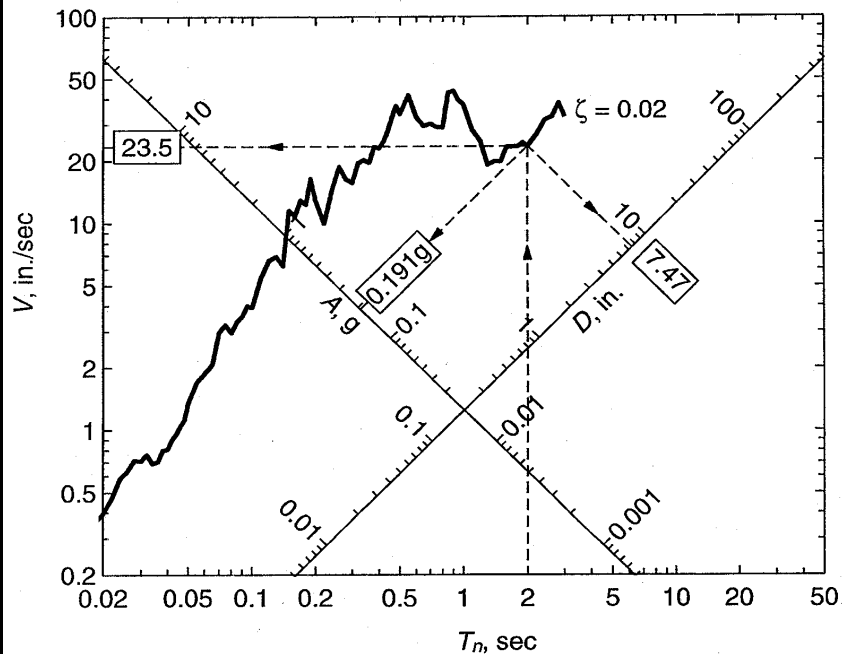
Από το βιβλίο:
 “Dynamics of Structures:
 Theory and Applications to
 Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Τα φάσματα σχετικών μετακινήσεων $S_d(T_n, \zeta)$, ψευδοταχυτήτων $S_v(T_n, \zeta)$ και ψευδοεπιταχύνσεων $S_a(T_n, \zeta)$, μπορούν να σχεδιαστούν μαζί σε ένα ειδικό τετραλογαριθμικό χαρτί, βάσει της μεταξύ τους σχέσης, μέσω της φυσικής ιδιοσυχνότητας, έτσι ώστε να είναι άμεσα διαθέσιμα και τα τρία σε μια γραφική παράσταση, συναρτήσει της φυσικής ιδιοπεριόδου ή ιδιοσυχνότητας του συστήματος:

$$S_a = \omega_n^2 \cdot S_d = \omega_n \cdot S_v$$

Combined D - V - A response spectrum ($\zeta = 2\%$)

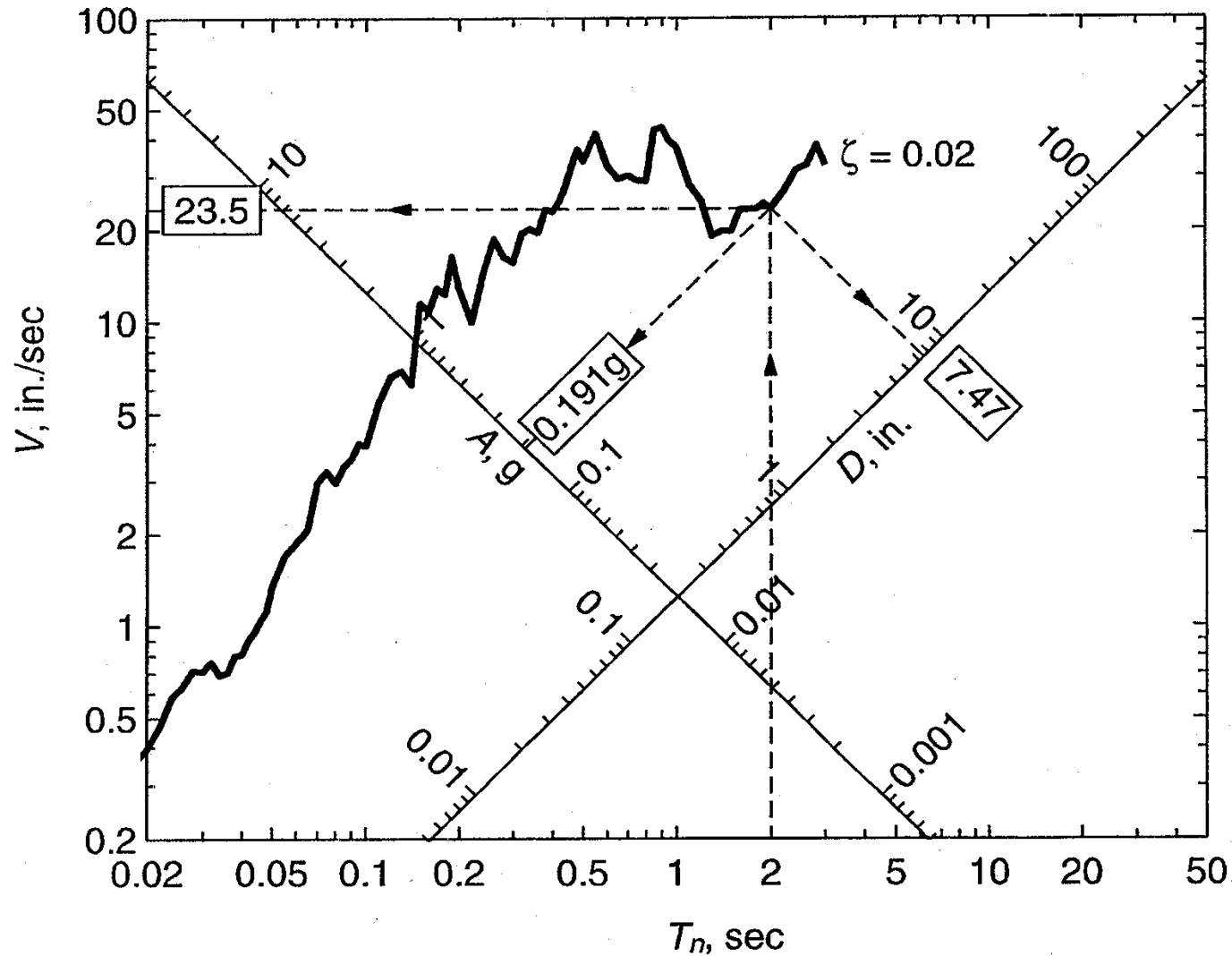


Από το βιβλίο:

*“Dynamics of Structures:
Theory and Applications to
Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

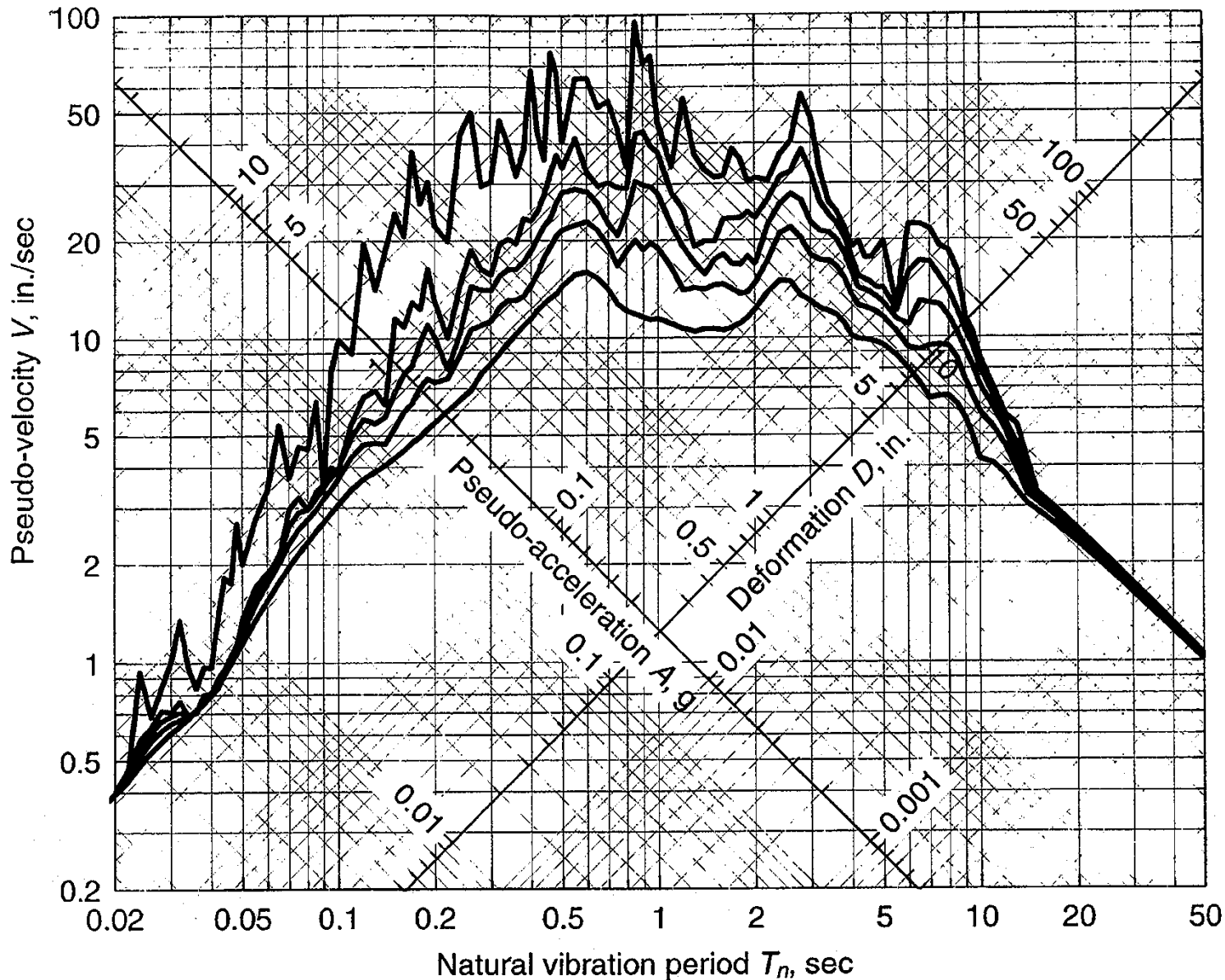
Combined $D-V-A$ response spectrum ($\zeta = 2\%$)



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Response spectrum for El Centro ground motion $\zeta = 0, 2, 5, 10, \text{ and } 20\%$.

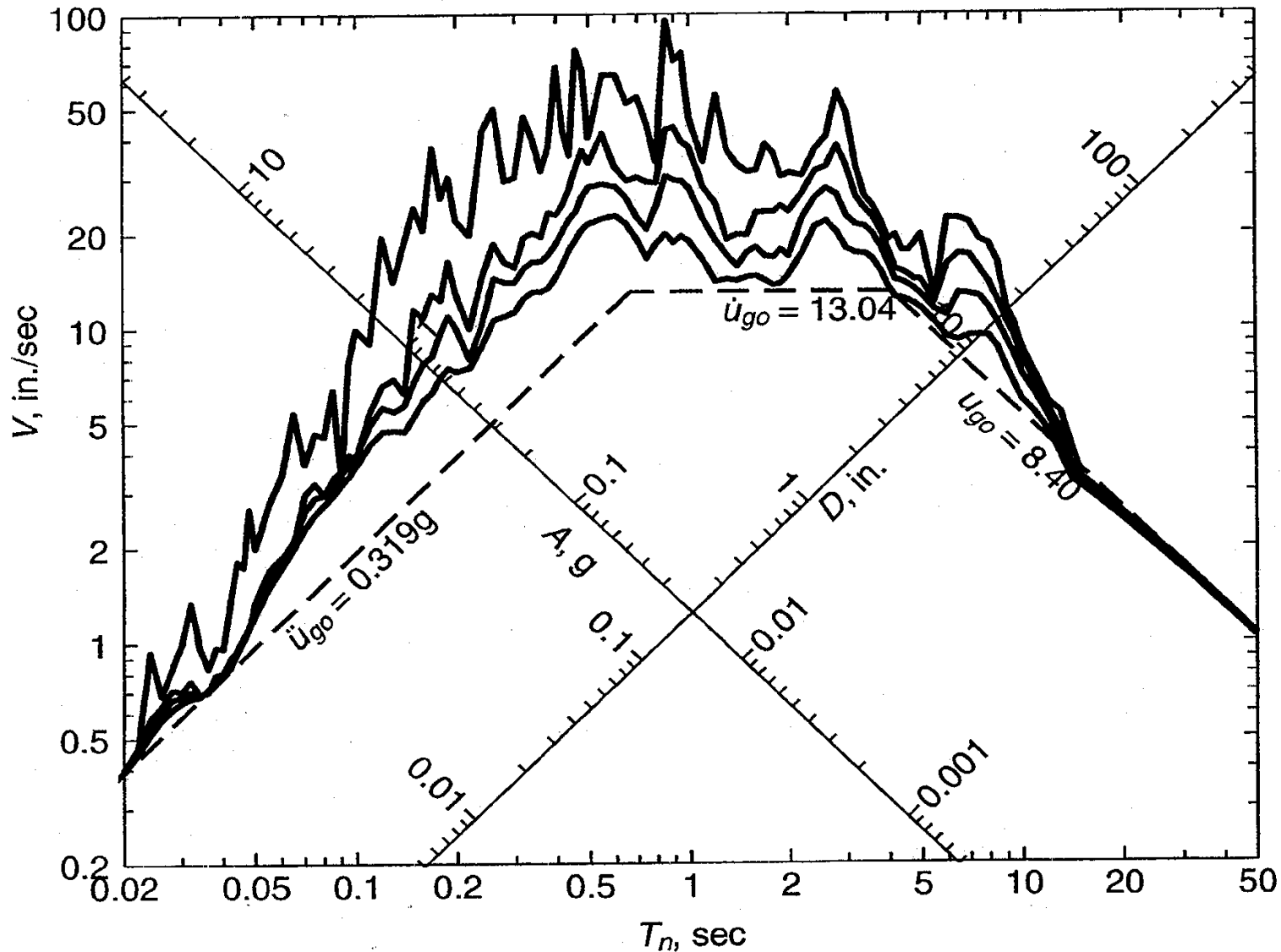


Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Response spectrum

U_{go} , \dot{U}_{go} , and \ddot{U}_{go}

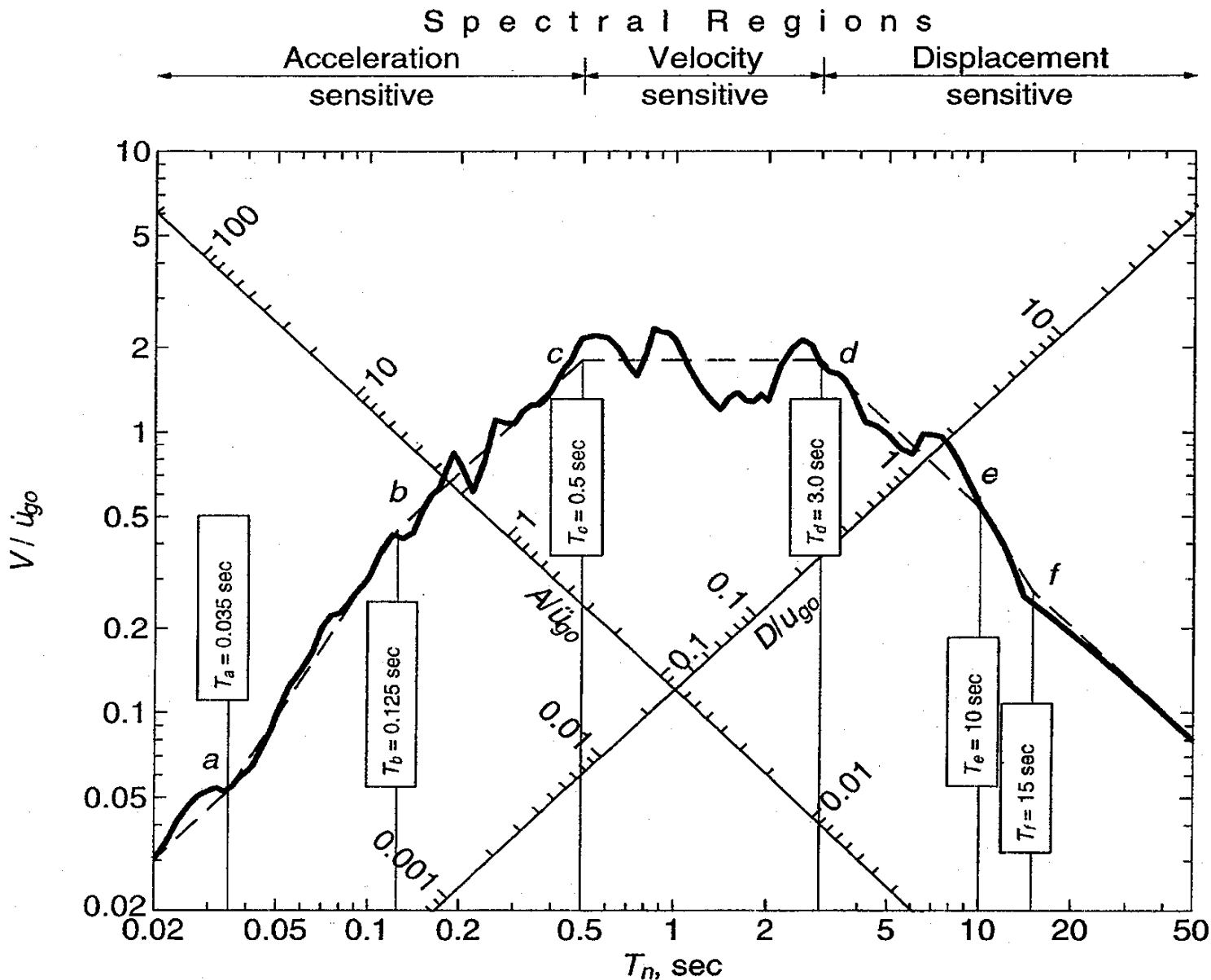


Από το βιβλίο:
 “Dynamics of
 Structures:
 Theory and
 Applications to
 Earthquake
 Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 6.8.1 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Response spectrum and spectral regions



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 6.8.3 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Προγραμματισμός Κατασκευής Φασμάτων Αποκρίσεως

Στην παράγραφο αυτή κατασκευάζονται τα φάσματα απόκρισης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *Newmark.m*, που αναπτύχθηκε προηγουμένως. Το φάσμα απόκρισης για το σεισμό της Αθήνας κατασκευάζεται μεταβάλλοντας την ιδιοπερίοδο T_n , για συγκεκριμένη τιμή του λόγου ζ κάθε φορά (0%, 2%, 5% και 10%), επιλύοντας το ΜΒΣ και προσδιορίζοντας τη μέγιστη τιμή της απόκρισης που μας ενδιαφέρει.

ResponseSpectra.m

```
clear
```

```
% Fortwsh epitaxynsewn edafoys
```

```
load AthensAccel
```

```
t = AthensAccel(:,1);
```

```
ag = AthensAccel(:,2);
```

```
% Arxikes syndhkes
```

```

u0=0;
v0=0;
dt = t(2)-t(1);
numberPoints = length(t);
g=9.81;
pga=abs(ag(1));
tPGA=t(1);

for i=2:numberPoints
    if pga < abs(ag(i))
        pga=abs(ag(i));
        tPGA=t(i);
    end
end
fprintf('\n Exoyn diabastei %d times epitaxynsewn edafoys ana %.3f sec',
                                               numberPoints, dt)
fprintf('\n Megisth epitaxynsh edafoys = %.2f m/sec^2 = %.3f g sta %.3f sec\n', pga,
                                               pga/g, tPGA)

```

```
Tmin=0.01;  
Tmax= 5.0;  
nT=1000;  
dT = (Tmax-Tmin)/(nT-1);  
ksi = [0 0.02 0.05 0.10]';  
nKSI = length(ksi);  
  
m = 1;  
% Eyresh isodynamoy ezwterika epiballomenoy fortioy  
P = -ag*m;
```

```

for j=1:nKSI;
  for i=1:nT
    T(i) = Tmin+dT*(i-1);
    wN = 2*pi/T(i);
    k = wN^2*m;
    wN=sqrt(k/m);

    % Υπολογισμος syntelesth aposbeshs
    c=2*ksi(j)*wN*m;

    % Αριθμητικη ολοκληρωση me th ne8odo Newmark
    [u,v,a] = newmark(numberPoints, dt, t, P, k, m, c, u0, v0);
    D(i,j) = max(abs(u));
    V(i,j) = wN*D(i,j);
    A(i,j) = wN*wN*D(i,j);

    vMax(i,j) = max(abs(v));
    aTotMax(i,j) = max(abs(a'+ag));
  end
end
end

```

```
% Sxediasmos diagrammatwn  
plotResponseSpectra(T, D, V, A, vMax, aTotMax)
```

plotResponseSpectra.m

```
function plotResponseSpectra(T, D, V, A, vMax, aTotMax)  
% Sxediasmos diagrammatwn apokerishs  
  
figure(1)  
clf  
orient tall  
  
subplot(3,1,1)  
plot(T, D(:,1), 'r')  
grid on  
hold on  
plot(T, D(:,2), 'k')  
plot(T, D(:,3), 'b')  
plot(T, D(:,4), 'g')  
xlabel('Period, T [sec]')  
ylabel('D [m]')  
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')
```



```
subplot(3,1,2)
plot(T, V(:,1), 'r')
grid on
hold on
plot(T, V(:,2), 'k')
plot(T, V(:,3), 'b')
plot(T, V(:,4), 'g')
xlabel('Period, T [sec]')
ylabel('V [m/sec]')
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')
```

```
subplot(3,1,3)
plot(T, A(:,1), 'r')
grid on
hold on
plot(T, A(:,2), 'k')
plot(T, A(:,3), 'b')
plot(T, A(:,4), 'g')
xlabel('Period, T [sec]')
ylabel('A [m/sec^2]')
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')
```

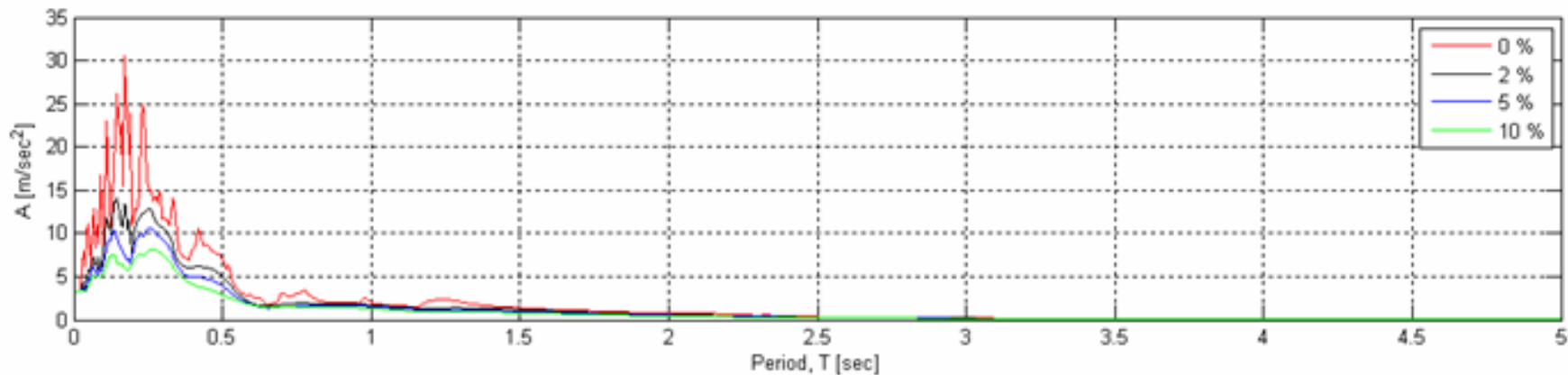
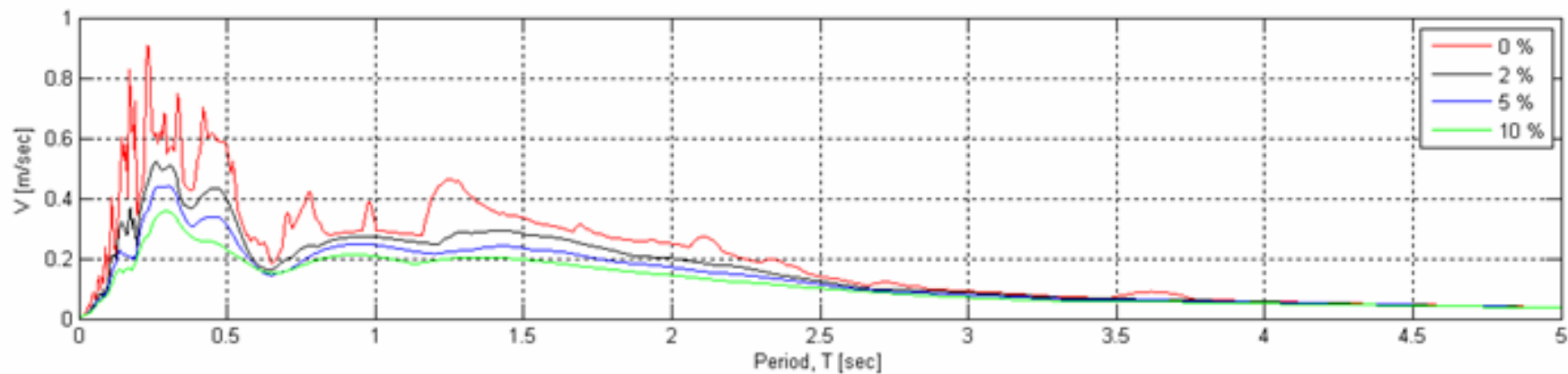
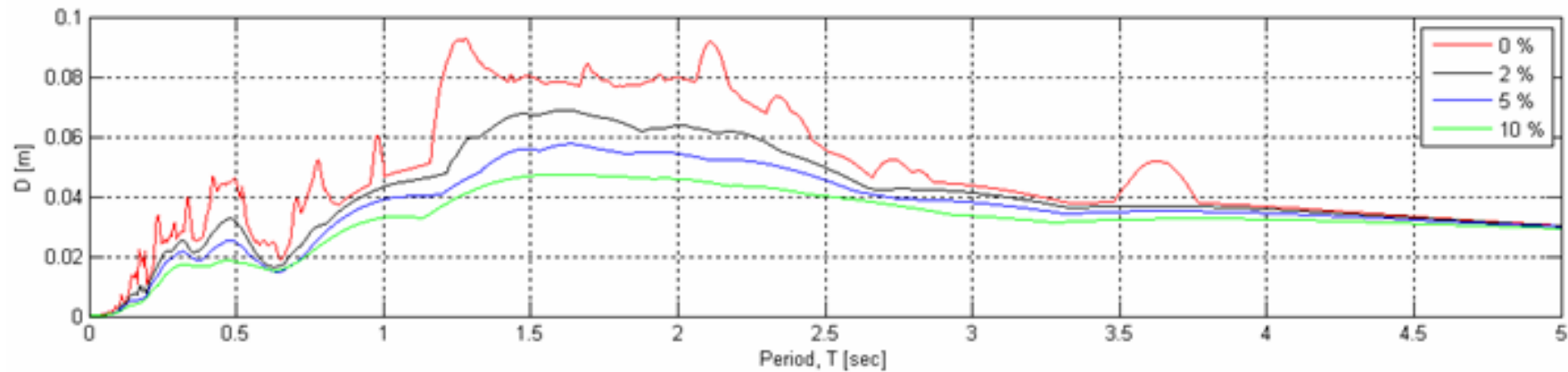
```
figure(2)
clf
orient tall

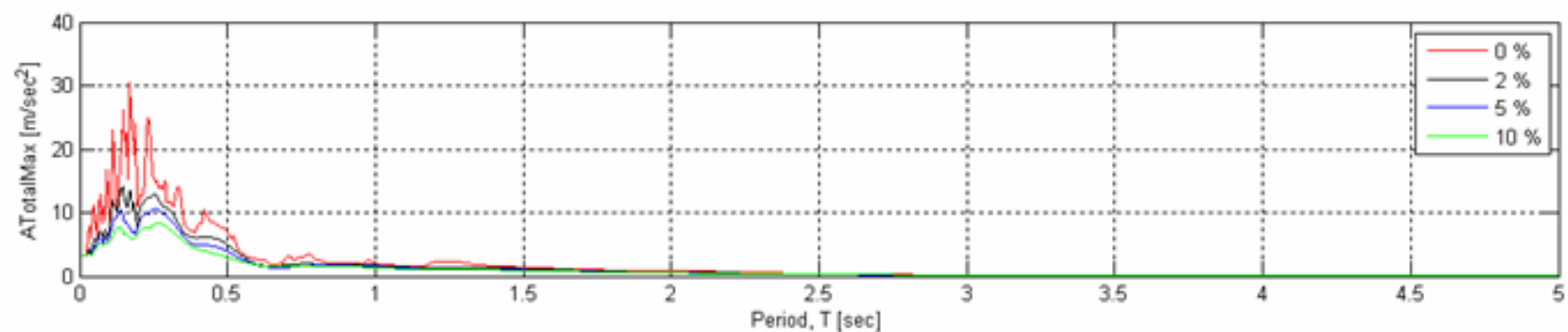
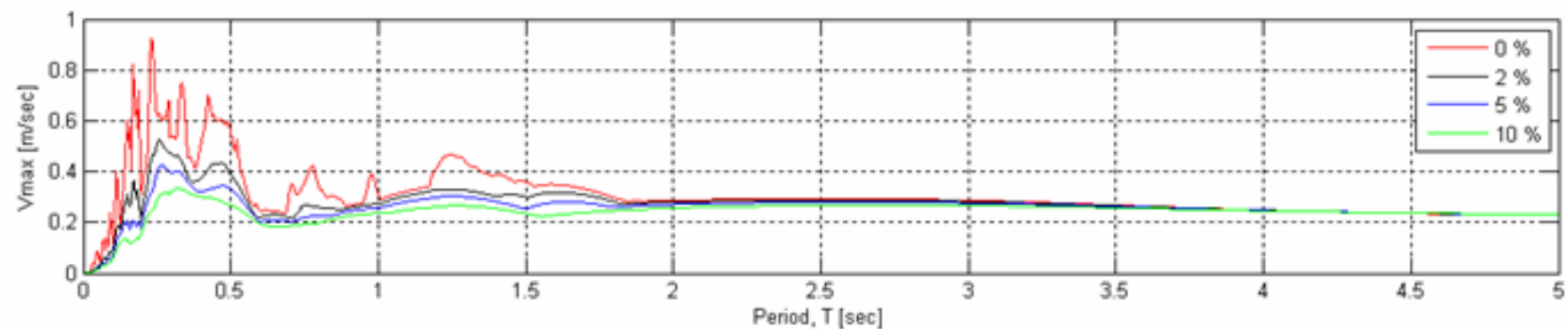
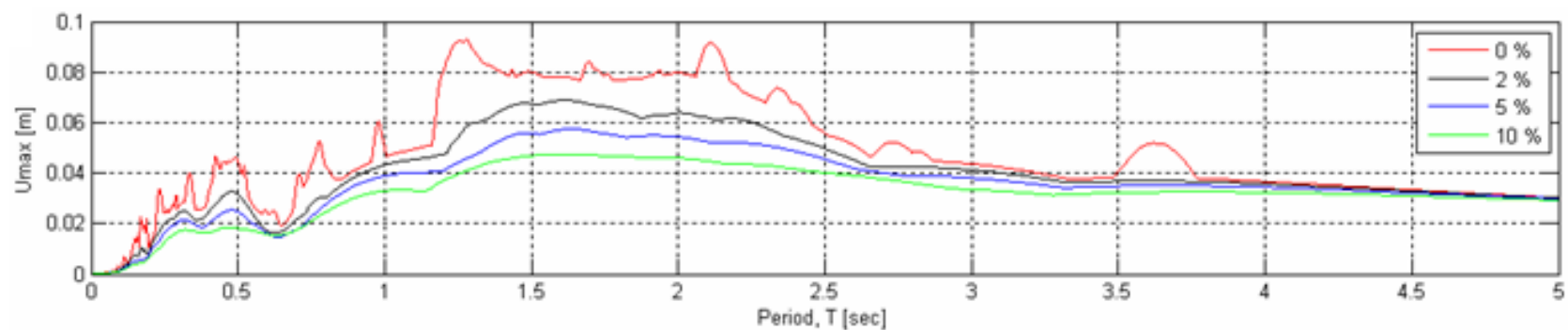
subplot(3,1,1)
plot(T, D(:,1), 'r')
grid on
hold on
plot(T, D(:,2), 'k')
plot(T, D(:,3), 'b')
plot(T, D(:,4), 'g')
xlabel('Period, T [sec]')
ylabel('Umax [m]')
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')
```

```
subplot(3,1,2)
plot(T, vMax(:,1), 'r')
grid on
hold on
plot(T, vMax(:,2), 'k')
plot(T, vMax(:,3), 'b')
plot(T, vMax(:,4), 'g')
xlabel('Period, T [sec]')
ylabel('Vmax [m/sec]')
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')
```

```
subplot(3,1,3)
plot(T, aTotMax(:,1), 'r')
grid on
hold on
plot(T, aTotMax(:,2), 'k')
plot(T, aTotMax(:,3), 'b')
plot(T, aTotMax(:,4), 'g')
xlabel('Period, T [sec]')
ylabel('ATotalMax [m/sec^2]')
legend('0 % ', '2 % ', '5 % ', '10 % ')

end
```





Φάσματα μετακινήσεων, σχετικών ταχυτήτων και απόλυτων επιταχύνσεων.

Φάσματα σχεδιασμού

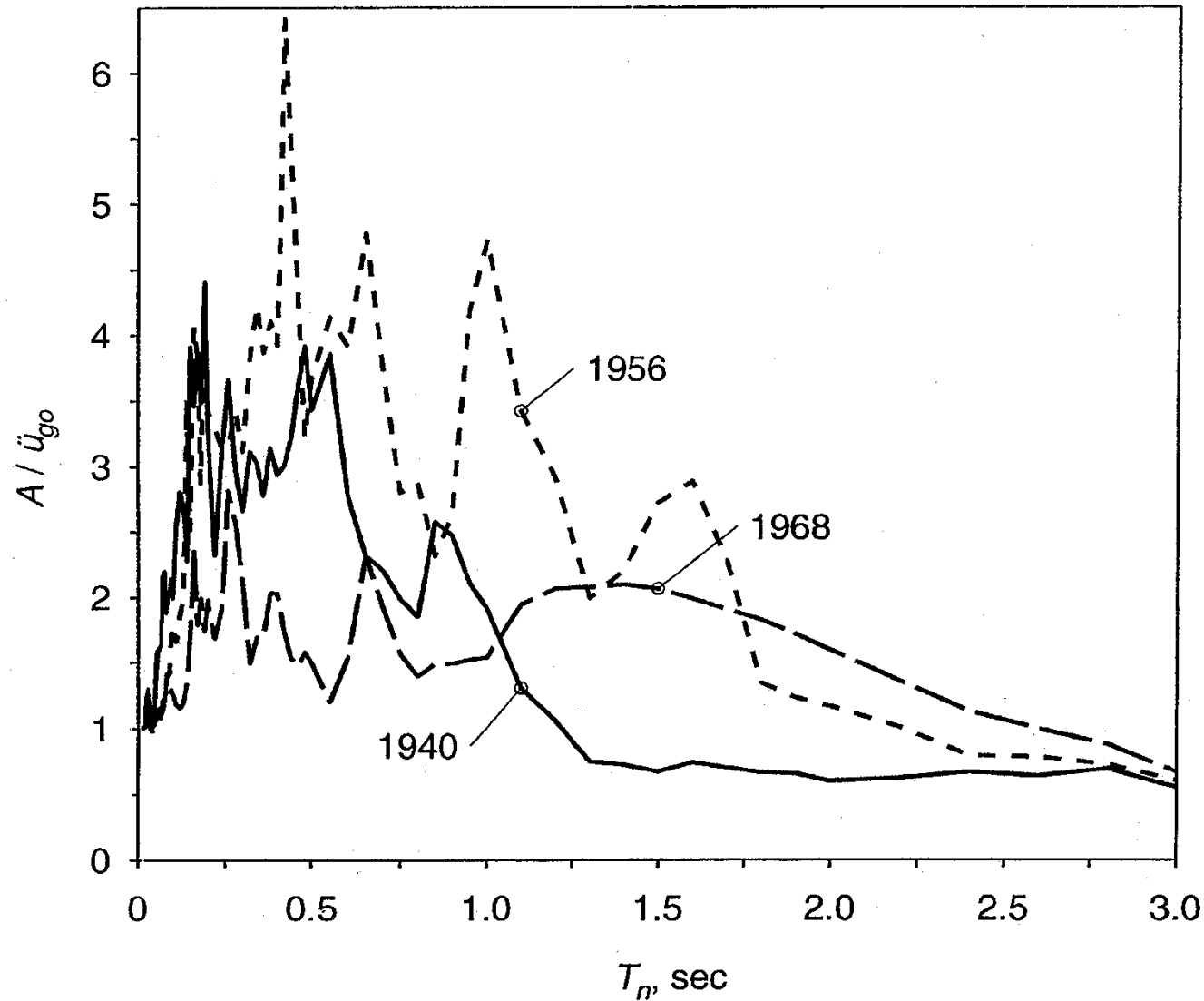
Ένα φάσμα απόκρισης παρέχει τις μέγιστες αποκρίσεις οποιουδήποτε ΜΒΣ για τη συγκεκριμένη σεισμική διέγερση.

Για την ίδια σεισμική διέγερση υπάρχουν έντονες εξάρσεις της μέγιστης απόκρισης για διαφορετικές ιδιοπεριόδους, γεγονός το οποίο οφείλεται στην έντονη επίδραση της ιδιοπεριόδου του ΜΒΣ στην απόκριση του.

Σε καμία περίπτωση μια σεισμική διέγερση δεν θα επαναληφθεί και είναι άγνωστα τα ακριβή χαρακτηριστικά μιας μελλοντικής σεισμικής διέγερσης.

Επιπλέον, τα χαρακτηριστικά των φασμάτων απόκρισης για διαφορετικούς σεισμούς έχουν έντονες διαφορές, αφού οι σεισμικές διεγέρσεις έχουν πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά, τα οποία προφανώς προκαλούν διαφορετικές αποκρίσεις.

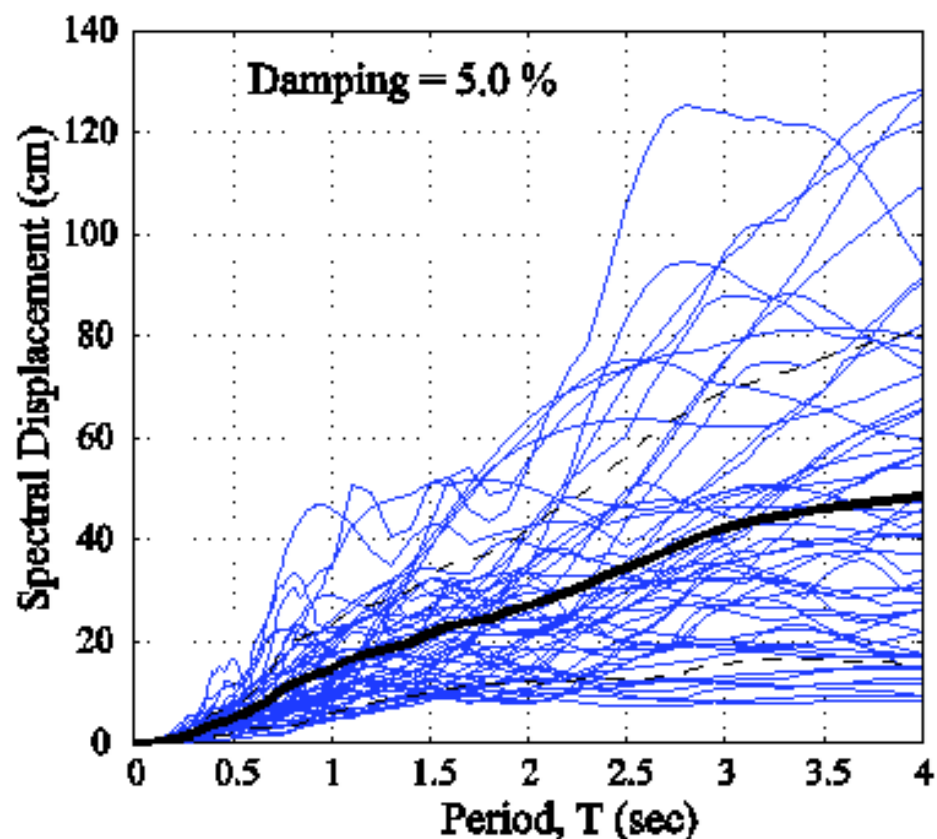
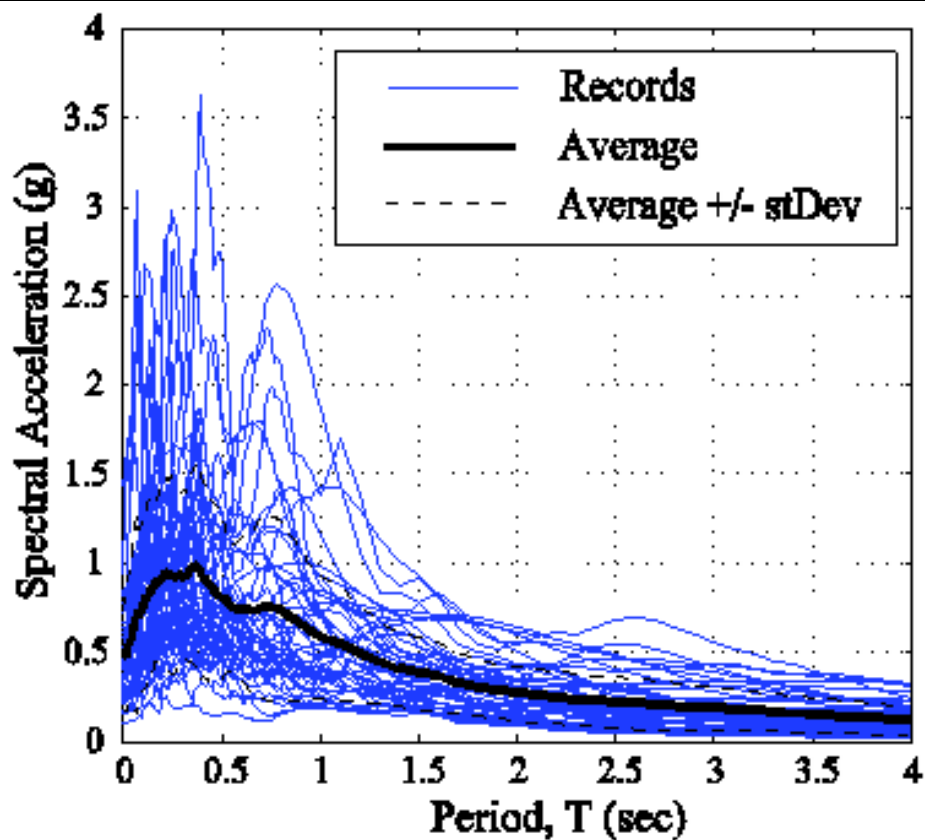
Response spectra for three ground motions at El Centro site



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα φάσματα απόκρισης μιας συλλογής από 50 σεισμικές διεγέρσεις, οι οποίες παρά το ότι έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά (μέγεθος σεισμών τουλάχιστον 6 βαθμών και απόσταση καταγραφής μικρότερη των 15 χιλιομέτρων από το σεισμικό ρήγμα, παρουσιάζουν πολύ έντονες διαφορές.



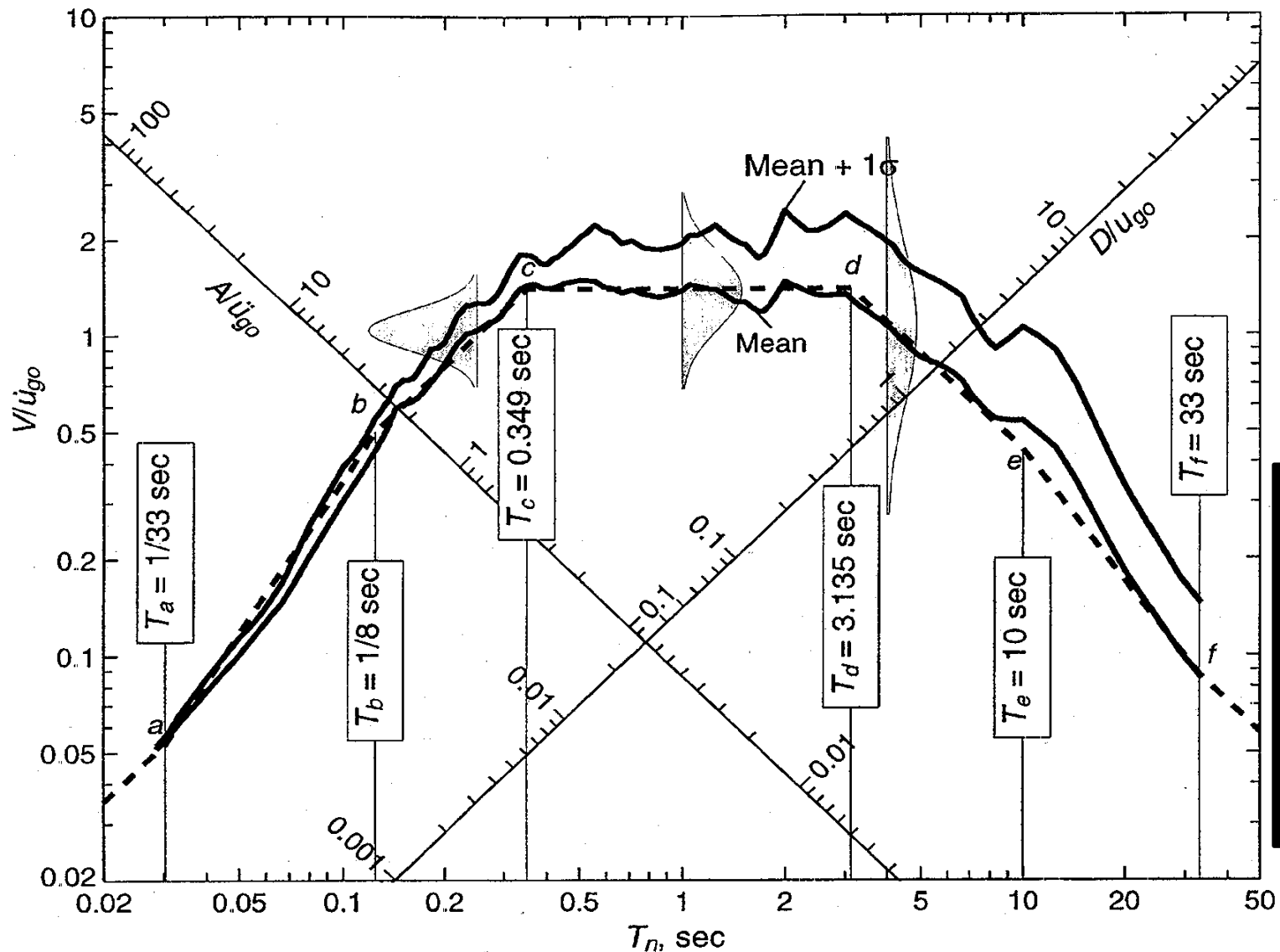
Λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες που υπάρχουν όσο αφορά την αναμενόμενη σεισμική διέγερση, αλλά και την ακριβή τιμή της ιδιοπεριόδου μιας κατασκευής, είναι πιο ρεαλιστική η χρήση φασμάτων σχεδιασμού, τα οποία εκφράζουν μια ομαλοποιημένη περιβάλλουσα μιας συλλογής από φάσματα απόκρισης.

Τα φάσματα σχεδιασμού προκύπτουν μέσα από μια στατιστική επεξεργασία μιας μεγάλης ομάδας φασμάτων αποκρίσεως, τα οποία συνήθως ομαδοποιούνται βάσει κάποιων γενικών χαρακτηριστικών.

Κατά την κατασκευή των φασμάτων σχεδιασμού, οι περιβάλλουσες σχηματίζονται χρησιμοποιώντας το μέσο όρο των διαθέσιμων φασμάτων απόκρισης συν μια τυπική απόκλιση, συνήθως, για να μειωθεί σε συγκεκριμένα αποδεκτά επίπεδα η πιθανότητα υπέρβασης τους.

Τα φάσματα σχεδιασμού χρησιμοποιούνται τόσο στον αντισεισμικό σχεδιασμό των κατασκευών, όσο και στην εκτίμηση της σεισμικής τρωτότητας υφιστάμενων κατασκευών με σκοπό τη σεισμική αναβάθμιση και ενίσχυση τους με κατάλληλες μεθόδους επισκευών και ενισχύσεων.

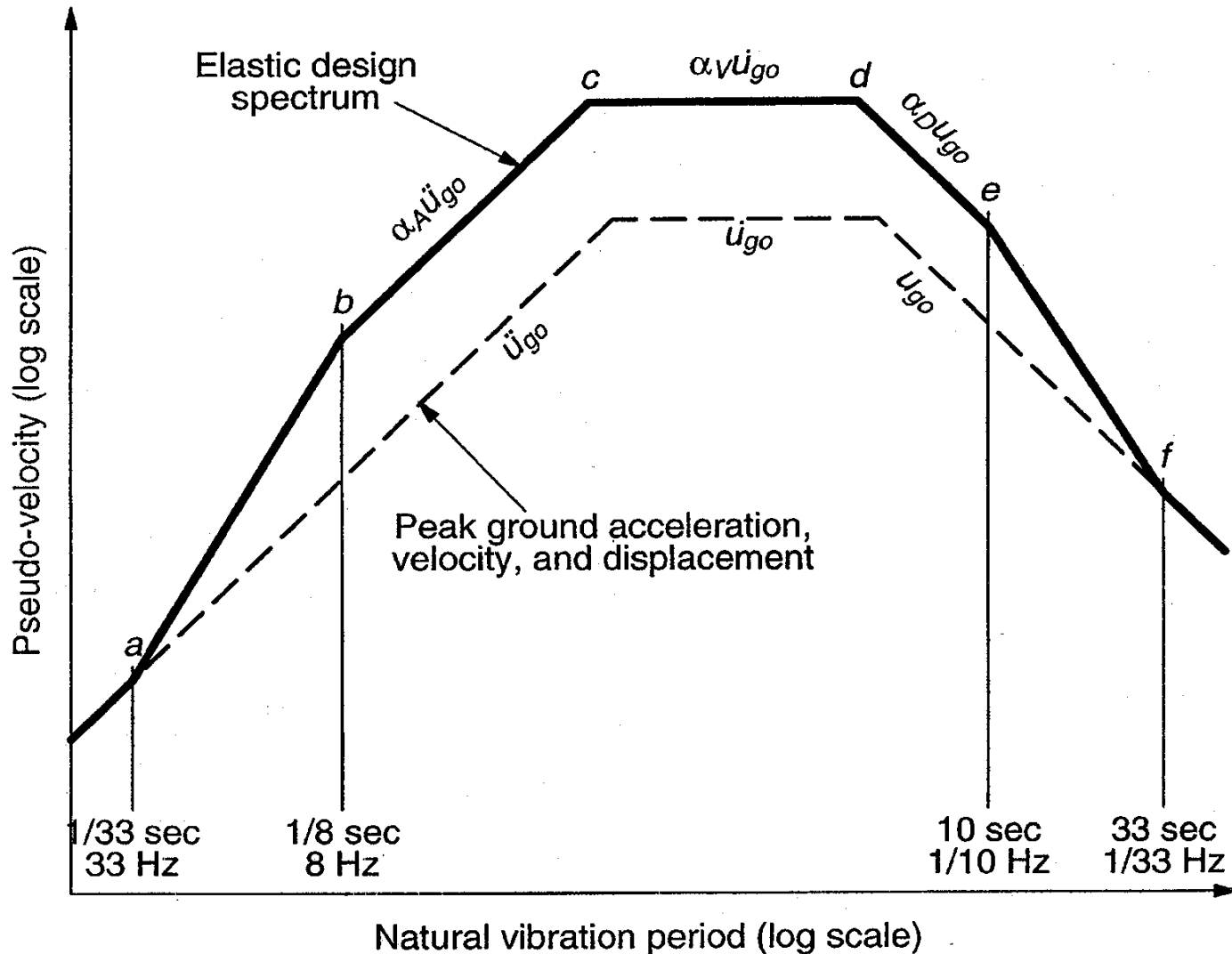
- Mean and mean + 1σ spectra
- Design spectrum
- Probability distributions for V



Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

Figure 6.9.2 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

Construction of elastic design spectrum



Από το βιβλίο:
 “Dynamics of
 Structures:
 Theory and
 Applications to
 Earthquake
 Engineering”

- Anil K. Chopra

Figure 6.9.3 from *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001.

TABLE 6.9.1 AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA

Damping, ζ (%)	Median (50th percentile)			One Sigma (84.1th percentile)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

Source: N. M. Newmark and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982, pp. 35 and 36.

TABLE 6.9.2 AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA^a

	Median (50th percentile)	One Sigma (84.1th percentile)
α_A	$3.21 - 0.68 \ln \zeta$	$4.38 - 1.04 \ln \zeta$
α_V	$2.31 - 0.41 \ln \zeta$	$3.38 - 0.67 \ln \zeta$
α_D	$1.82 - 0.27 \ln \zeta$	$2.73 - 0.45 \ln \zeta$

Source: N. M. Newmark and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982, pp. 35 and 36.

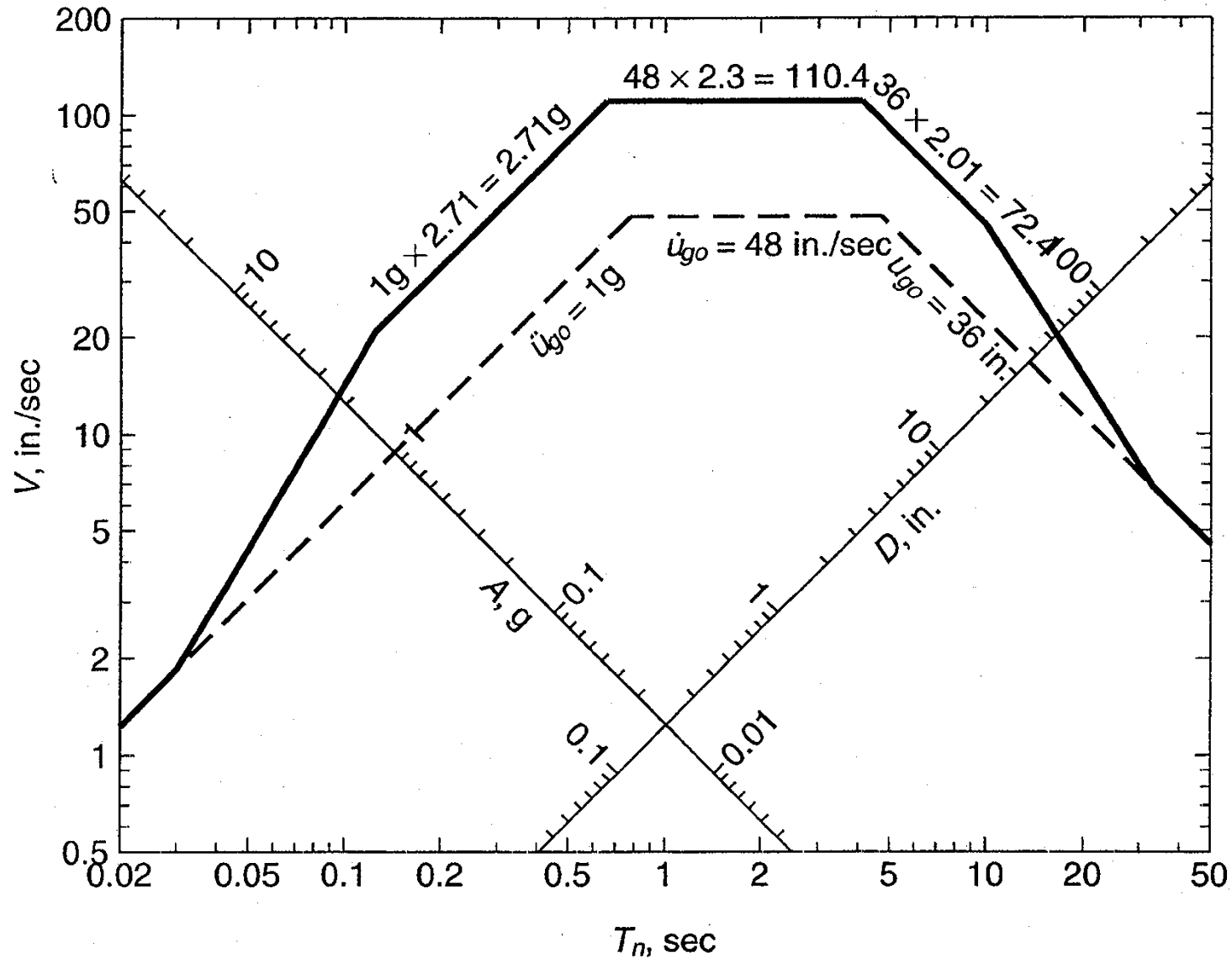
^aDamping ratio in percent.

Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Construction of elastic design spectrum

- $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48$ in./sec, and $u_{go} = 36$ in. • $\zeta = 5\%$

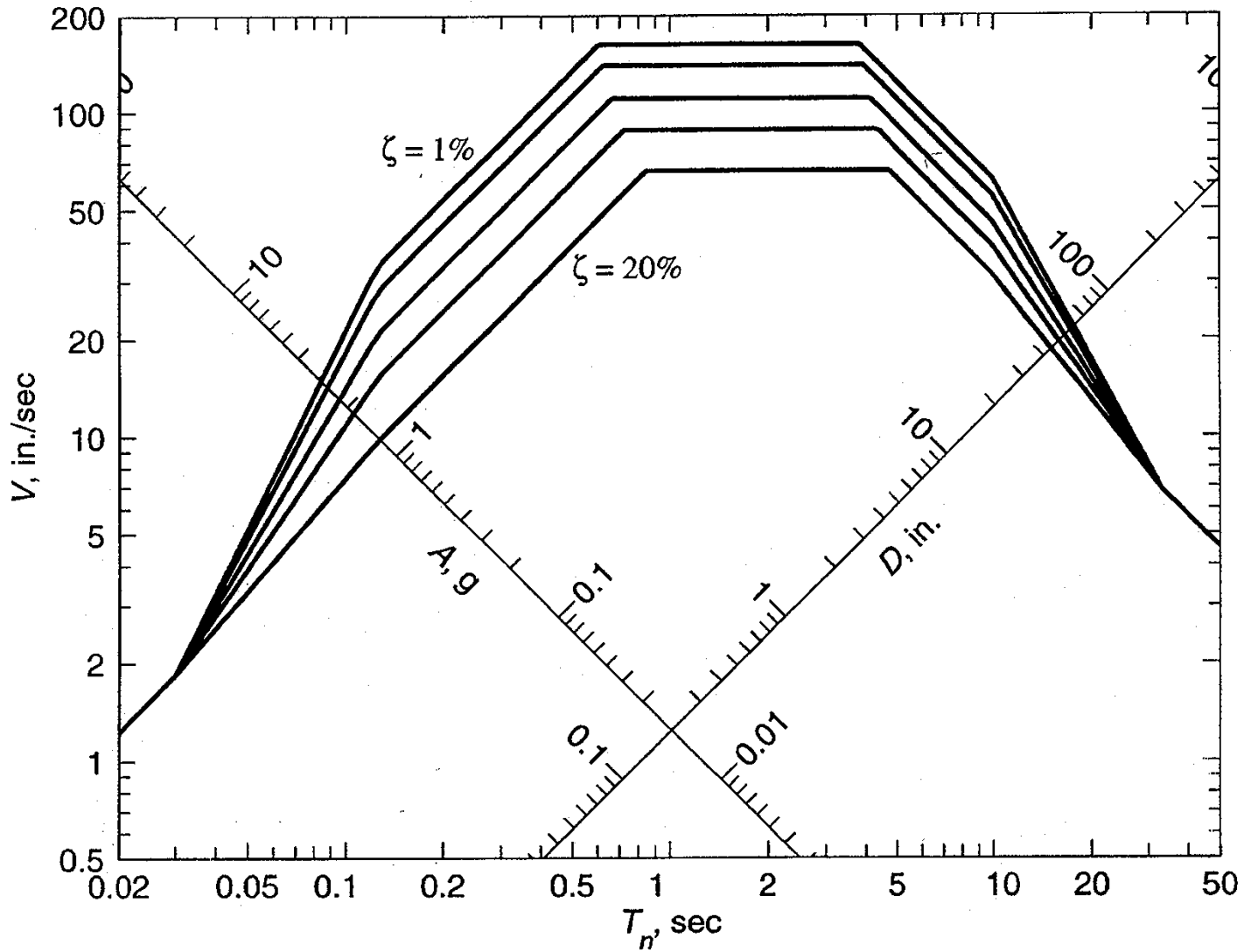


Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”

- Anil K. Chopra

Pseudo-velocity design spectrum

- $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48$ in./sec, and $u_{go} = 36$ in. • $\zeta = 1, 2, 5, 10, 20\%$.

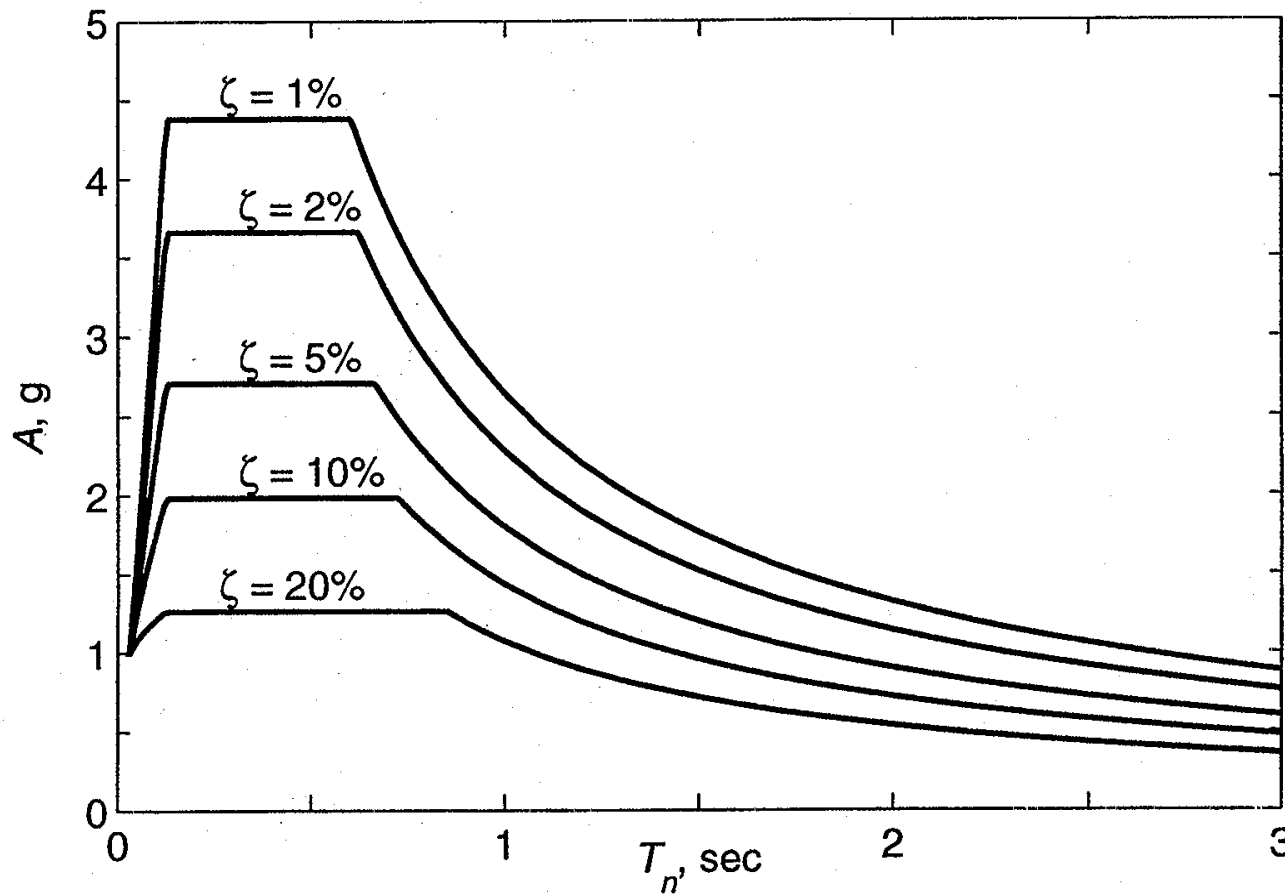


Από το βιβλίο:
“Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”
 - Anil K. Chopra

Figure 6.9.7 from *Dynamics of Structures: theory and Applications to Earthquake Engineering*, by Anil K. Chopra, Prentice-Hall, 2001

Pseudo-acceleration design spectrum

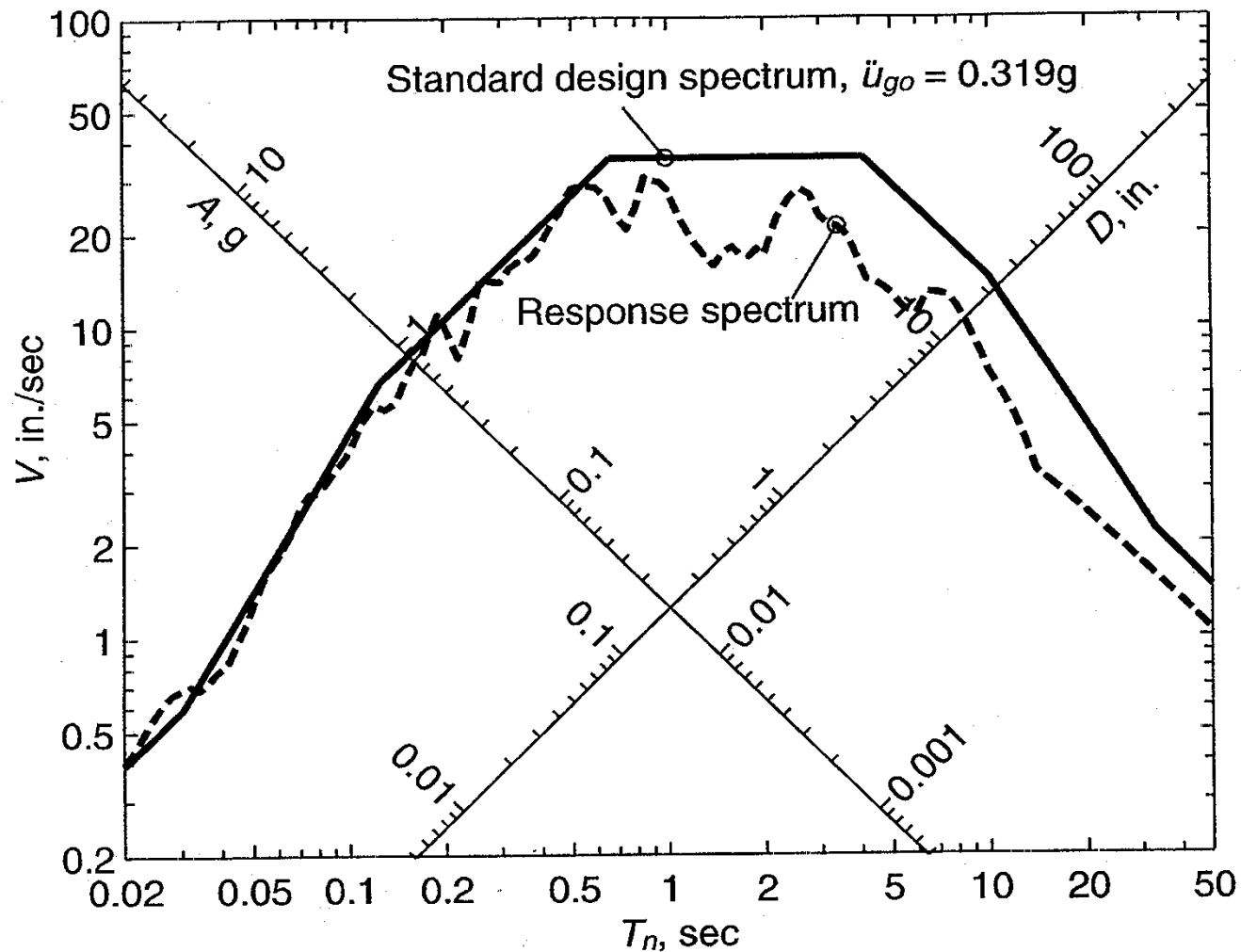
- $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48 \text{ in./sec}$, and $u_{go} = 36 \text{ in.}$
- $\zeta = 1, 2, 5, 10, 20\%$.



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra

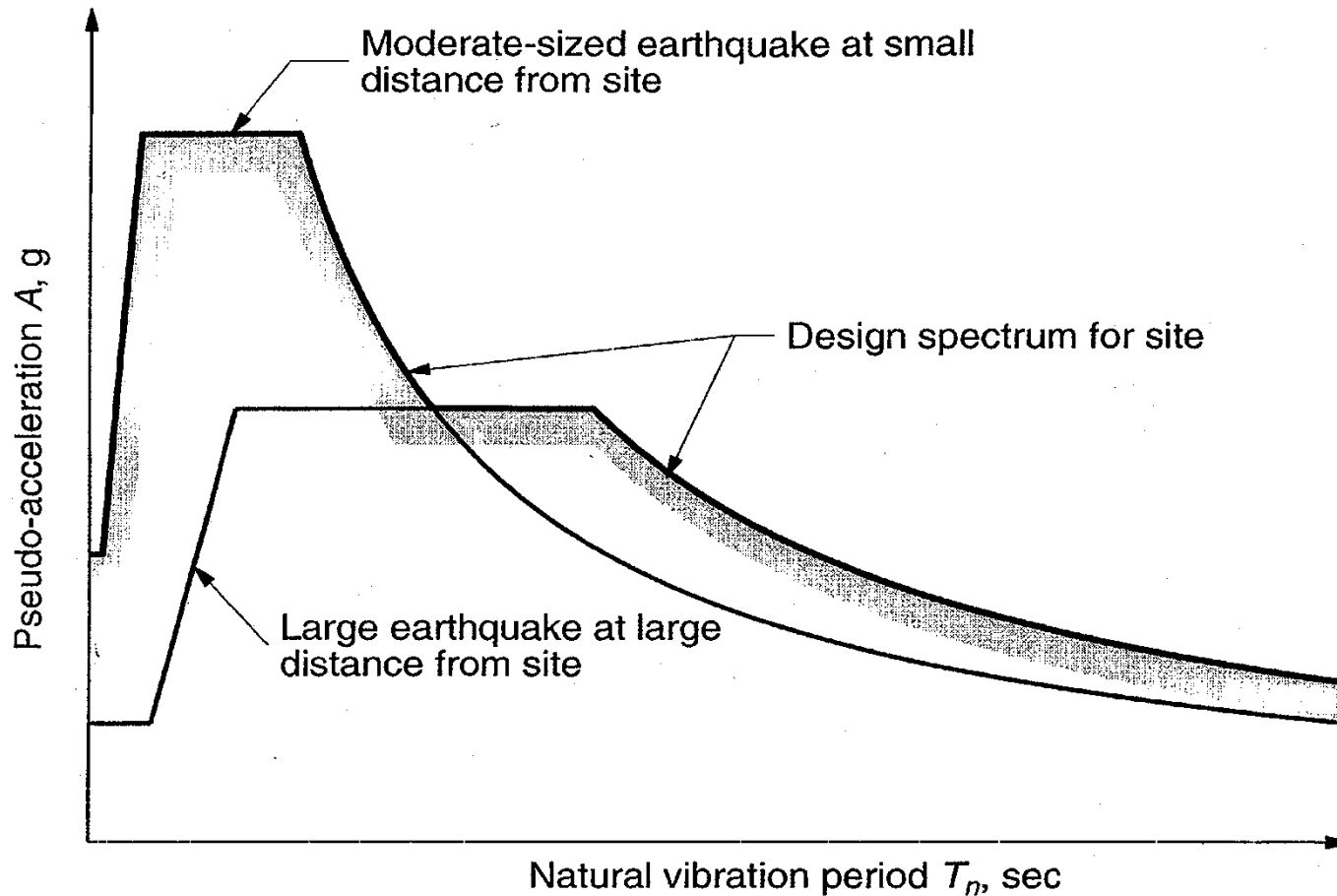
Standard design spectrum and El Centro response spectrum



Από το βιβλίο:
*“Dynamics of Structures:
 Theory and Applications to Earthquake Engineering”*

- Anil K. Chopra

Site design spectrum: Envelope of two design spectra



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

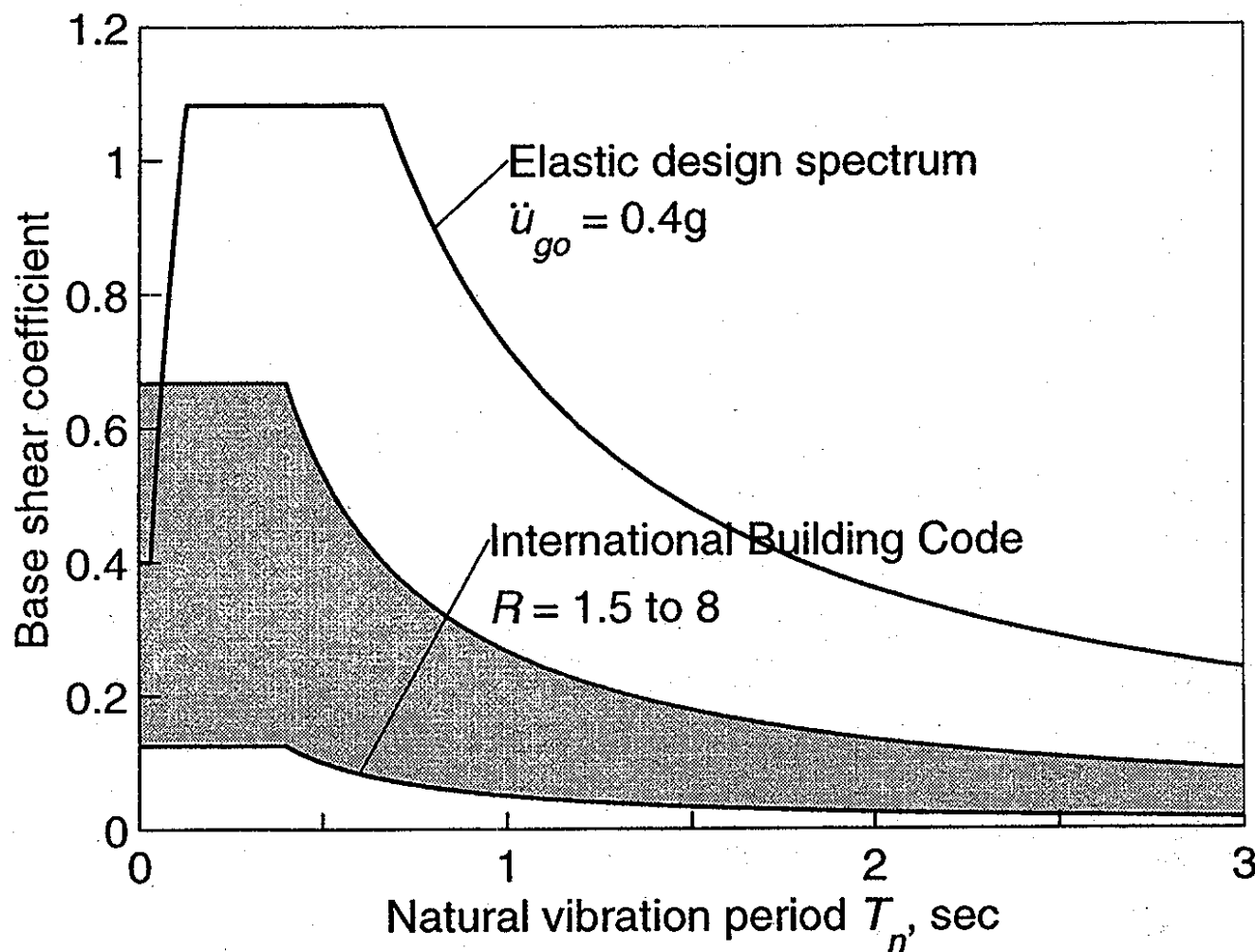
- Anil K. Chopra

Έχοντας το φάσμα απόκρισης για μια συγκεκριμένη σεισμική διέγερση, ή το φάσμα σχεδιασμού, μπορεί να καθοριστεί για ένα ΜΒΣ με οριζόντια δυσκαμψία, k , μάζα, m , και λόγο απόσβεσης, ζ , το ισοδύναμο στατικό φορτίο που αντιστοιχεί στη μέγιστη σχετική μετακίνηση, σύμφωνα με το συγκεκριμένο φάσμα:

$$F_{eq} = k \cdot S_d(T_n, \zeta) = \omega_n^2 \cdot m \cdot S_d(T_n, \zeta) = m \cdot S_a(T_n, \zeta)$$
$$F_{eq} = \frac{W}{g} \cdot S_a(T_n, \zeta) = W \cdot \frac{S_a(T_n, \zeta)}{g}$$

Έτσι, το ισοδύναμο οριζόντιο σεισμικό φορτίο μπορεί να εκφραστεί ως ποσοστό του βάρους μέσω του σεισμικού συντελεστή, ο οποίος είναι ο λόγος της φασματικής επιτάχυνσης προς την επιτάχυνση της βαρύτητας. Αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης του σεισμικού φορτίου, παρά το ότι δεν αποτελεί δυναμική ανάλυση και υπολογισμό της χρονοϊστορίας απόκρισης της κατασκευής, κάτι που θα είχε σημαντικό υπολογιστικό κόστος, είναι πολύ πιο ακριβής από μια στατική μεθοδολογία συνυπολογισμού των σεισμικών φορτίων, αφού λαμβάνονται υπόψη τα δυναμικά χαρακτηριστικά του ΜΒΣ αλλά και η μέγιστη απόκριση, όπως προκύπτει από την κατασκευή του σχετικού φάσματος.

Elastic design spectrum and vs Building Code



Από το βιβλίο:
“*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”

- Anil K. Chopra