2. Μέθοδοι δυσκαμψίας (μετακινήσεων) για επίλυση δικτυωμάτων

Εαρινό εξάμηνο 2024

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

http://www.eng.ucy.ac.cy/petros

- ***Μέθοδος μετακινήσεων ή δυσκαμψίας***
  - Εισαγωγή στις μεθόδους μετακινήσεων ή δυσκαμψίας
  - *Επίλυση συστημάτων ελατηρίων*
    - Γενική διαδικασία μεθόδου μετακινήσεων ή δυσκαμψίας
    - Διαδικασία άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας
  - ***Ανάλυση δικτυωμάτων με τη μέθοδο δυσκαμψίας***
    - Μητρώα δυσκαμψίας ράβδων
    - Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων
    - Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας για δικτυώματα
    - Κεκλιμένες συνοριακές συνθήκες
    - Ανάλυση χωρικών δικτυωμάτων
    - Προγραμματισμός άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας για δικτυώματα
    - Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

- *μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι δυνάμεις και ροπές

- *μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι μετακινήσεις

Μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας

- βασίζεται στα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής βάσει των οποίων σχηματίζεται το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας ***K*** της κατασκευής
- οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι οι μετακινήσεις των ελεύθερων κόμβων της κατασκευής
  - επιλύνοντας το σύστημα των εξισώσεων το οποίο σχηματίζεται, υπολογίζονται οι μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας των κόμβων της κατασκευής
  - ακολούθως, χρησιμοποιώντας τα επιμέρους μητρώα δυσκαμψίας του κάθε μέλους, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του κάθε μέλους
- χρήσιμη για επιλύσεις γενικών προβλημάτων με Η/Υ
- εύκολη αυτοματοποίηση και προγραμματισμός της μεθόδου

Βάσεις μεθόδου δυσκαμψίας

- εξισώσεις ισορροπίας
- καταστατικό νόμο του υλικού
- συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων

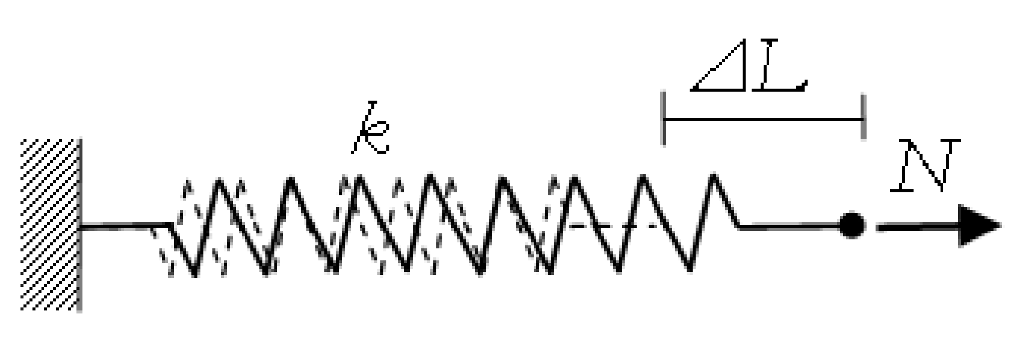
⇨ κοινός τρόπος ανάλυσης ισοστατικών και υπερστατικών φορέων

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

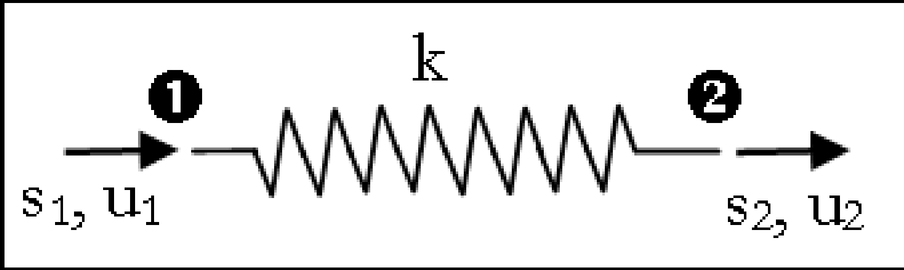
Γενική περιγραφή μεθόδου

- καθορισμός σχέσεων εντατικών μεγεθών και των αντίστοιχων μετακινήσεων των μελών ενός φορέα, βάσει των μητρώων δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής
- κατάλληλοι μετασχηματισμοί από τοπικό σε απόλυτο σύστημα συντεταγμένων
- εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας στους κόμβους
- σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής
- εφαρμογή συνοριακών συνθηκών
- επίλυση σχηματιζόμενου συστήματος εξισώσεων
  - ⇨ υπολογισμός μετακινήσεων ελεύθερων κόμβων κατασκευής
  - ⇨ υπολογισμός αντιδράσεων στις στηρίξεις
  - ⇨ υπολογισμός εντατικών μεγεθών στα άκρα του κάθε μέλους

Επίλυση συστημάτων ελατηρίων με τη μέθοδο δυσκαμψίας



$$N = k \cdot \Delta L$$



$$\underline{s} = \underline{k} \cdot \underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Εύρεση μητρώου δυσκαμψίας ελατηρίου

$u_1 = 1.0\,m$ $\quad \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow S_1 = k \cdot 1.0 \quad \Rightarrow \quad k_{11} = k$

$u_2 = 0 \quad \Rightarrow S_2 = -k \quad k_{21} = -k$

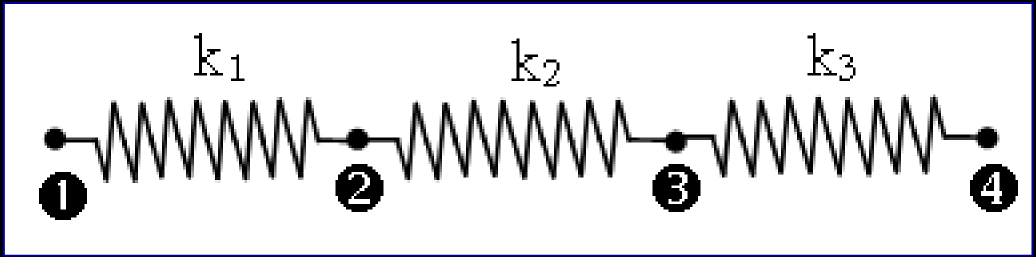
$u_1 = 0$ $\quad \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow S_1 = -k \quad \Rightarrow \quad k_{12} = -k$

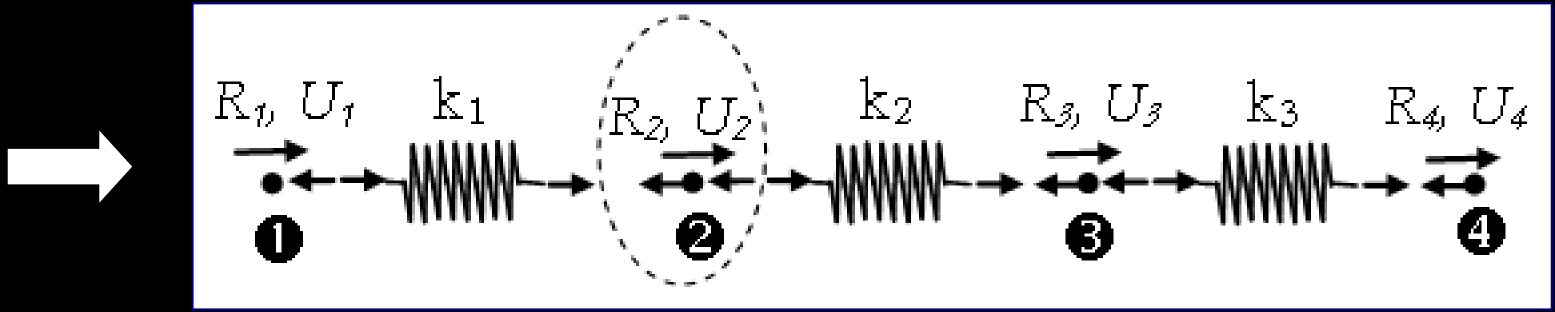
$u_2 = 1.0\,m \quad \Rightarrow S_2 = k \cdot 1.0 \quad k_{22} = k$

μητρώο δυσκαμψίας για ένα ελατήριο με σταθερά k :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Σύστημα τριών ελατηρίων





$$\begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^3 \\ s_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας γύρω από κάθε κόμβο

$$R_1 = s_1^1 = k_1 \cdot u_1^1 - k_1 \cdot u_2^1$$

$$R_2 = s_2^1 + s_1^2 = -k_1 \cdot u_1^1 + k_1 \cdot u_2^1 + k_2 \cdot u_1^2 - k_2 \cdot u_2^2$$

$$R_3 = s_2^2 + s_1^3 = -k_2 \cdot u_1^2 + k_2 \cdot u_2^2 + k_3 \cdot u_1^3 - k_3 \cdot u_2^3$$

$$R_4 = s_2^3 = -k_3 \cdot u_1^3 + k_3 \cdot u_2^3$$

Εξισώσεις ισορροπίας

- αντιστοιχία βαθμών ελευθερίας

$$u_1^1 = U_1 \quad , \quad u_2^1 = u_1^2 = U_2 \quad , \quad u_2^2 = u_1^3 = U_3 \quad , \quad u_2^3 = U_4$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &= k_1 \cdot U_1 - k_1 \cdot U_2 \\ R_2 &= -k_1 \cdot U_1 + \left(k_1 + k_2\right) \cdot U_2 - k_2 \cdot U_3 \\ R_3 &= -k_2 \cdot U_2 + \left(k_2 + k_3\right) \cdot U_3 - k_3 \cdot U_4 \\ R_4 &= -k_3 \cdot U_3 + k_3 \cdot U_4 \end{aligned}$$

Εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωική μορφή

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας **<u>K</u>** είναι ιδιάζων (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες, οι οποίες καταστούν το φορέα σταθερό. Η ορίζουσα του μητρώου δυσκαμψίας είναι μηδενική και η τάξη (*rank*) του μητρώου είναι μικρότερη των διαστάσεων του, τα οποία εκφράζουν μαθηματικά τη χαλαρότητα του φορέα. Το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό, γεγονός το οποίο να αξιοποιηθεί για εξοικονόμηση υπολογισμών και μνήμης αποθήκευσης του, ειδικά λαμβάνοντας υπόψη ότι τα περισσότερα του στοιχεία είναι μηδενικά.

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$\underline{U}_s$: δεδομένες μετακινήσεις λόγω συνοριακών συνθηκών

$\underline{R}_f$: δεδομένα επικόμβια φορτία

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_s = \underline{U}_s^* \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^*$$

$$\underline{U}_f = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \left(\underline{R}_f - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s \right)$$

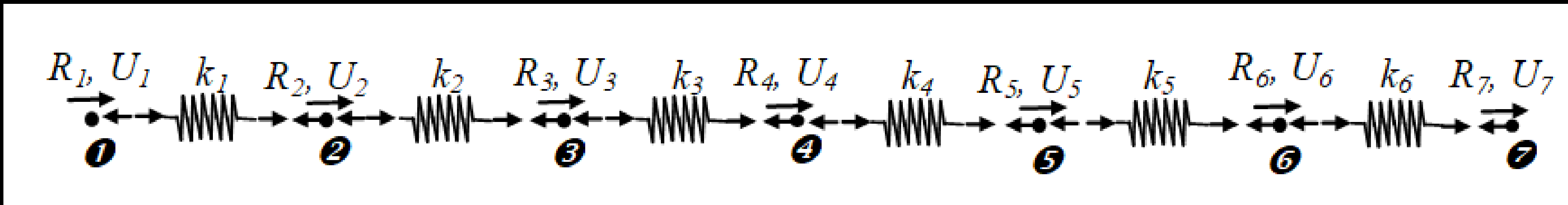
$$\Rightarrow \underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^*$$

$$\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{f}} = \dots \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_m = \dots \quad \Rightarrow \quad \underline{s}_m = \underline{k}_m \cdot \underline{u}_m$$

Διαδικασία μεθόδου άμεσης δυσκαμψίας

Αντί της πιο πάνω αναλυτικής διαδικασίας της μεθόδου δυσκαμψίας, με την εφαρμογή των εντατικών μεγεθών στους κόμβους και την επιβολή των εξισώσεων ισορροπίας στον κάθε κόμβο, το μητρώο δυσκαμψίας μπορεί να σχηματιστεί άμεσα με επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής. Για να σχηματιστεί άμεσα το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής λαμβάνεται υπόψη η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των άκρων του κάθε μέλους με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\underline{U}$, ώστε να προστεθούν στη σωστή θέση τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του μέλους. Αυτή η διαδικασία άμεσου σχηματισμού του μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ και των εξισώσεων ισορροπίας, $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, ονομάζεται *Μέθοδος Άμεσης Δυσκαμψίας* και είναι συστηματοποιημένη διαδικασία η οποία εύκολα μπορεί να προγραμματισθεί. Σε αυτή τη μέθοδο βασίζεται η πλειοψηφία των προγραμμάτων ανάλυσης κατασκευών.

Παράδειγμα 1



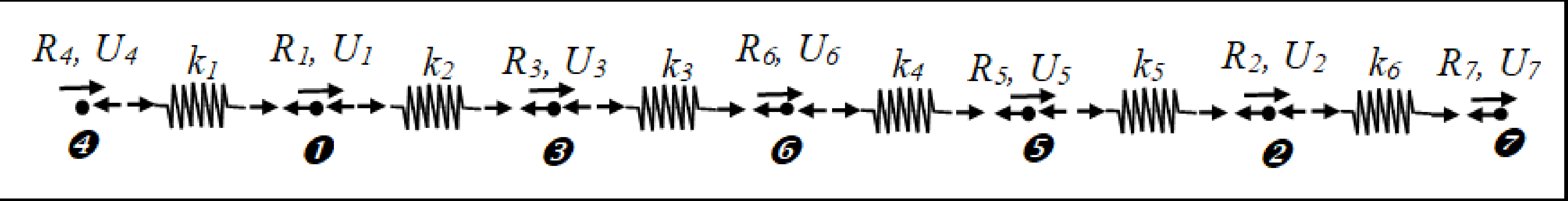
$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
k_1 & -k_1 & & & & & 0 \\
-k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & & \\
 & & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & & \\
 & & & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & \\
 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 \\
0 & & & & & -k_6 & k_6
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}
$$

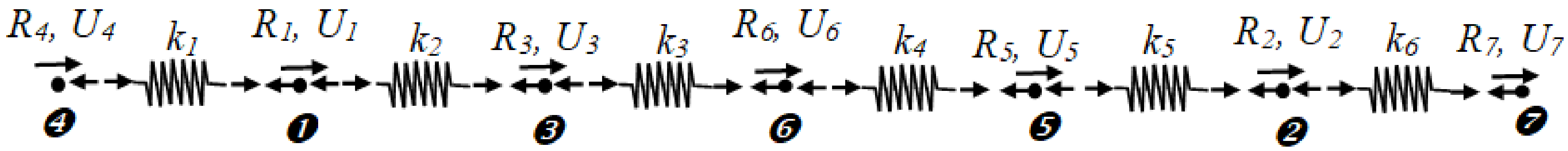
$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι συμμετρικό και έχει αρκετά μηδενικά στοιχεία. Αν η αρίθμηση γίνει με κατάλληλο τρόπο τα μη μηδενικά στοιχεία περιορίζονται σε μια διαγώνιο λωρίδα. Έτσι μπορεί να εξοικονομηθεί μνήμη στον Η/Υ από την κατάλληλη αποθήκευση του μητρώου, αλλά και να ελαχιστοποιηθούν οι απαιτούμενες πράξεις κατά την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

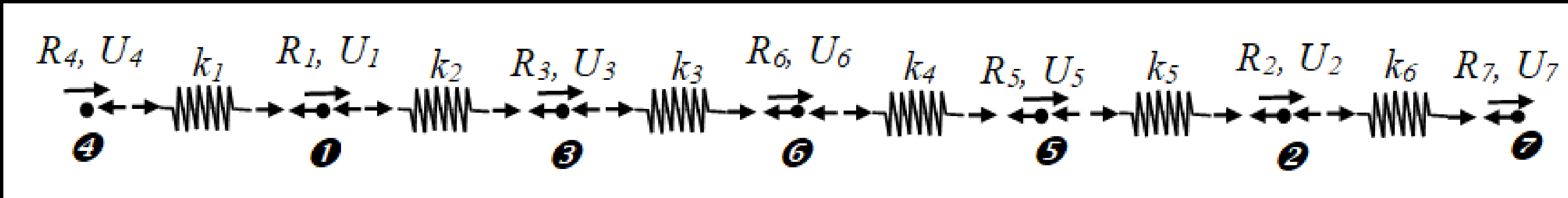
Εάν η αρίθμηση των κόμβων, δηλαδή των βαθμών ελευθερίας (μετακινήσεων), του συστήματος 6 ελατηρίων γίνει διαφορετικά, τότε θα έχει διαφορετική μορφή το μητρώο δυσκαμψίας K. Και σε αυτήν την περίπτωση, ξεκινώντας με ένα μητρώο δυσκαμψίας διαστάσεων 7×7, όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας, με μηδενικά, για το κάθε μέλος, αφού προσδιοριστεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας στα άκρα του μέλους με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων, προσθέτουμε στις αντίστοιχες γραμμές και στήλες τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του κάθε μέλους μέχρι να σχηματιστεί τελικά, μετά από επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας όλων των μελών, το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{K}$.





Ξεκινώντας με το ελατήριο 1, το οποίο συνδέει τους βαθμούς ελευθερίας 4 και 1, προσθέτουμε τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του μέλους 1, στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμές και στήλες των βαθμών ελευθερίας 4 και 1:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$



Συνεχίζοντας διαδοχικά με την προσθήκη των στοιχείων δυσκαμψίας όλων των μελών σχηματίζεται το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, το οποίο αντιπροσωπεύει ουσιαστικά τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής, προτού όμως εφαρμοσθούν οι συνοριακές συνθήκες.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & -k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 + k_5 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & -k_6 \\ -k_2 & 0 & k_2 + k_3 & 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_5 & 0 & 0 & k_5 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & -k_4 & k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

- $\underline{U}_s$: δεδομένες μετακινήσεις λόγω συνοριακών συνθηκών
- $\underline{R}_f$: δεδομένα επικόμβια φορτία

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

Ανάλυση δικτυωμάτων με τη άμεση μέθοδο δυσκαμψίας

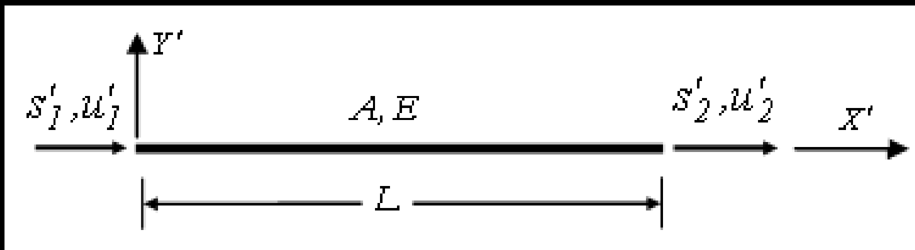
Η μέθοδος δυσκαμψίας για δικτυώματα είναι ανάλογη της διαδικασίας που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την επίλυση ελατηρίων. Η κύρια διαφορά είναι ότι οι εξισώσεις ισορροπίας για τον κάθε κόμβο θα είναι δύο, μία για τη X' και μία για την Y' διεύθυνση σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους. Επιπλέον, επειδή το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $X'Y'$ του κάθε μέλους, γενικά, θα διαφέρει από τα τοπικά συστήματα των άλλων μελών, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μετασχηματισμοί των δυνάμεων και μετακινήσεων από το τοπικό σε κάποιο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων XY, το οποίο θα είναι κοινό για όλα τα μέλη.

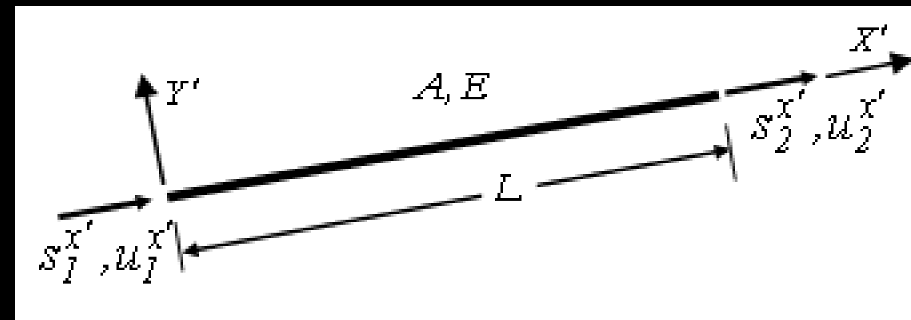
Σχέση δυνάμεων-μετακινήσεων ράβδου δικτυώματος:

$$\Delta L = \frac{L}{AE} \cdot N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{AE}{L} \cdot \Delta L$$

$$\Rightarrow \quad k_m = \left(\frac{AE}{L} \right)_m$$

Εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις ράβδων δικτυώματος

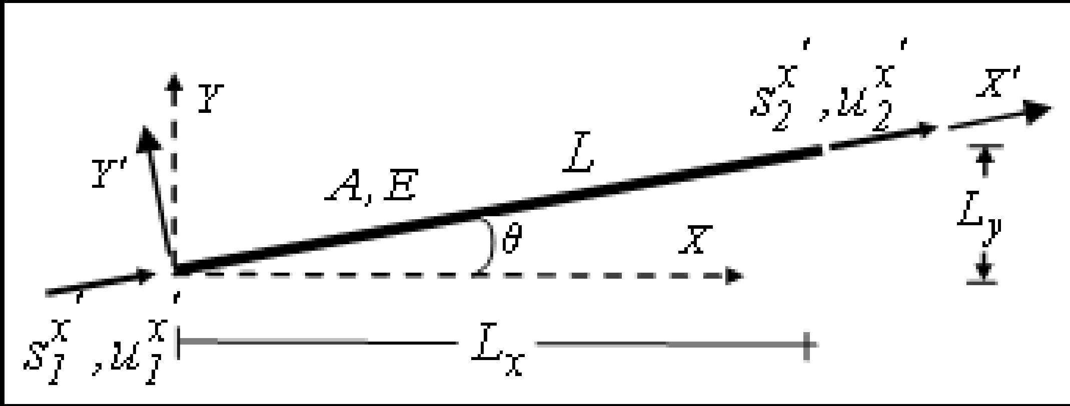




$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A \cdot E}{L} & -\dfrac{A \cdot E}{L} \\ -\dfrac{A \cdot E}{L} & \dfrac{A \cdot E}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix}$$

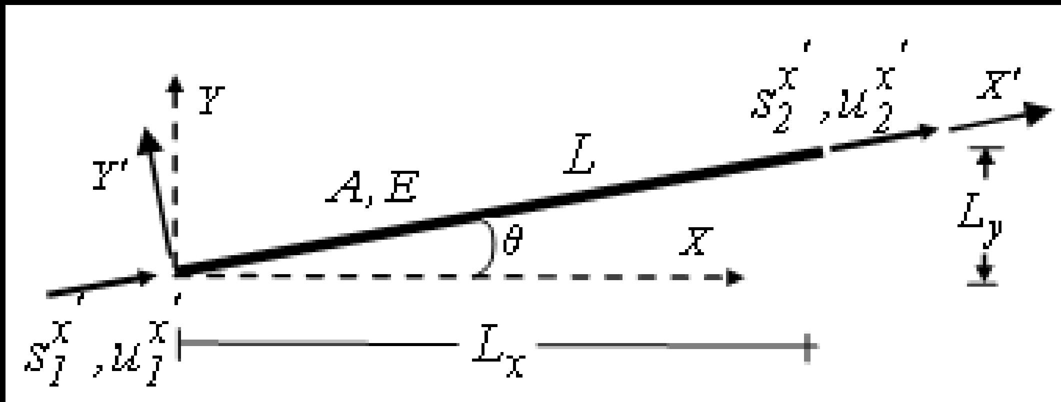
$$\underline{k}_m{}' = \begin{bmatrix} \dfrac{A \cdot E}{L} & -\dfrac{A \cdot E}{L} \\ -\dfrac{A \cdot E}{L} & \dfrac{A \cdot E}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

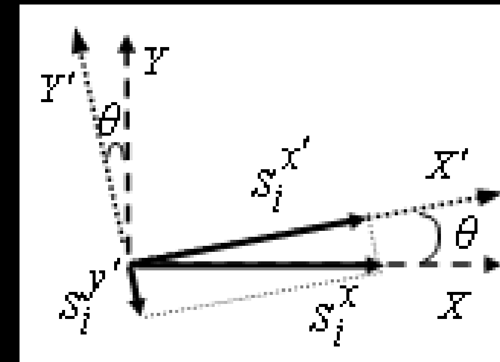
Εντατικά μεγέθη, μετακινήσεις και μητρώο δυσκαμψίας ράβδου δικτυώματος στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων

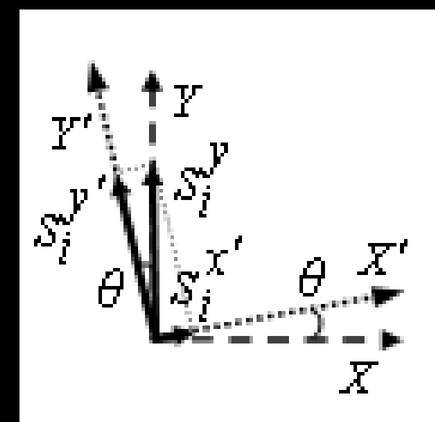


$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A\cdot E}{L} & 0 & -\frac{A\cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A\cdot E}{L} & 0 & \frac{A\cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{A\cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων







$$\cos\theta = \cos\theta_{x'x} = \frac{L_x}{L} \qquad \sin\theta = \cos\theta_{x'y} = \frac{L_y}{L}$$

$$-\sin\theta = \cos\theta_{y'x} = -\frac{L_y}{L} \qquad \cos\theta = \cos\theta_{y'y} = \frac{L_x}{L}$$

$$s_1^{x'} = \cos\theta \cdot s_1^{x} + \sin\theta \cdot s_1^{y}$$

$$s_1^{y'} = -\sin\theta \cdot s_1^{x} + \cos\theta \cdot s_1^{y}$$

Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \\ s_2^{x} \\ s_2^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \\ s_2^{x} \\ s_2^{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xx'} & \cos\theta_{yx'} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{xy'} & \cos\theta_{yy'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_{xx'} & \cos\theta_{yx'} \\ 0 & 0 & \cos\theta_{xy'} & \cos\theta_{yy'} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_m^{-1} = \underline{T}_m^{T}$$

$$\boxed{\underline{s}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m}$$

$$\boxed{\underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m}$$

Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας για δικτυώματα

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \quad \Rightarrow \quad \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m \quad \Rightarrow \quad \underline{s}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s}_m = \underline{T}_m^{T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

Προσδιορίζοντας για το κάθε μέλος αντιστοιχία μεταξύ των δυνάμεων $\underline{s}_m$ και των μετακινήσεων $\underline{u}_m$, τα οποία είναι πλέον εκφρασμένα στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων και των επικόμβιων δυνάμεων $\underline{R}$ και μετακινήσεων $\underline{U}$, αντίστοιχα, μπορούν να προστεθούν για το κάθε μέλος τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{k}_m$, το οποίο είναι πλέον εκφρασμένο στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, στις αντίστοιχες θέσεις του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{k}$.

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^{T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

Μητρώο δυσκαμψίας στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m{}^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_m = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L} = -\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ji}$$

Υπομητρώα μητρώου δυσκαμψίας

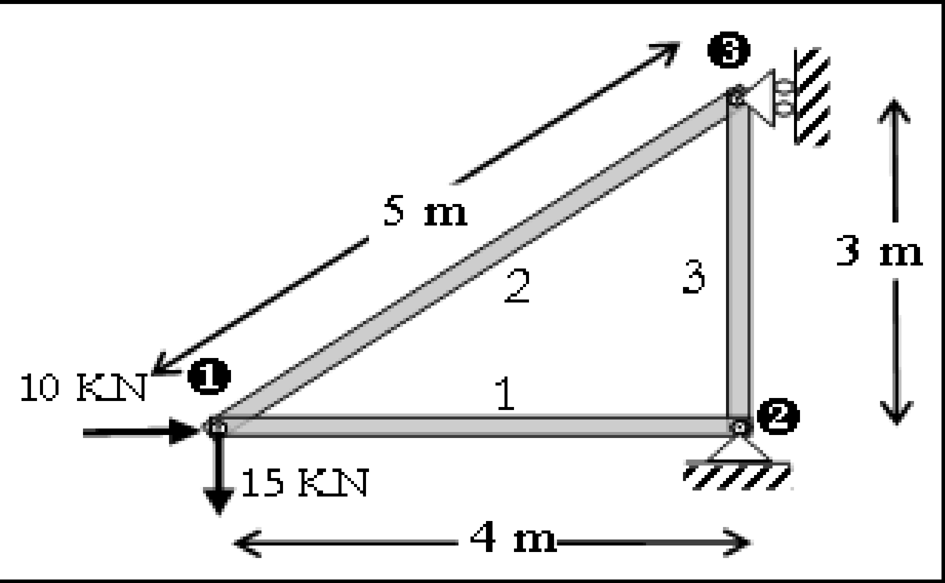
$$\underline{k}_m = \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] \cdot \frac{AE}{L}$$

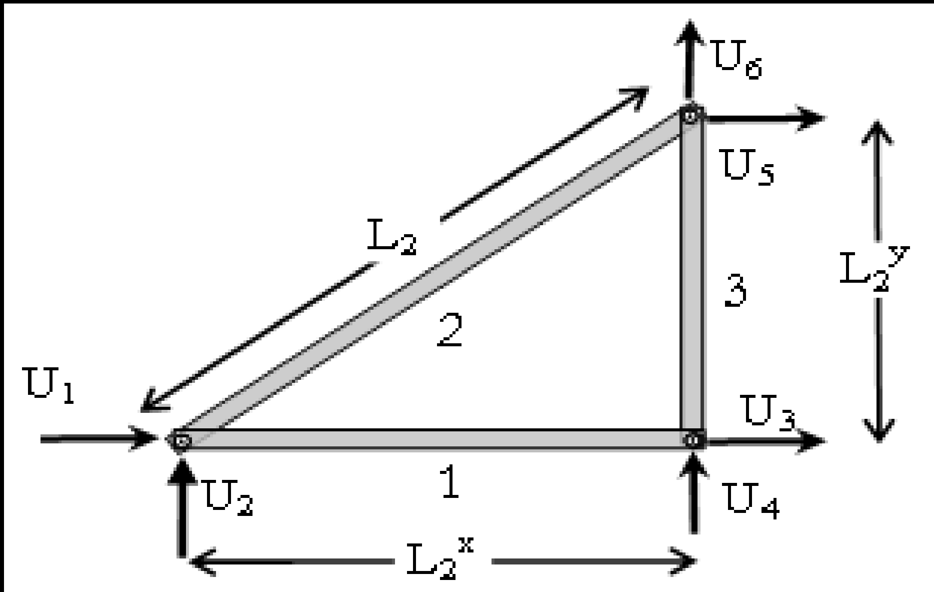
$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L} = -\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ji}$$

$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

$$\underline{k}_m^{ij} = \underline{k}_m^{ji} = -\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

Παράδειγμα-2





$$E = 200\ GPA$$

$$A = 0.001 m^2$$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

$$\underline{k}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7$$

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \underline{k}'_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{k}}_m = \underline{\boldsymbol{T}}_m^{\,T} \cdot \underline{\boldsymbol{k}}'_m \cdot \underline{\boldsymbol{T}}_m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_1 = \underline{T}_1^{\,T} \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_2 = \underline{T}_2^{\,T} \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.92 & -1.44 \\ -2.56 & -1.92 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_3 = \underline{T}_3^{\,T} \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.667 & 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

$$\underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{k}_1' \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

- Προσθήκη μέλους -1:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

$$\underline{k}_2 = \underline{T}_2^T \cdot \underline{k}_2' \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.92 & -1.44 \\ -2.56 & -1.92 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

- Επιπλέον προσθήκη μέλους -2:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & 0 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

$$\underline{k}_3 = \underline{T}_3^T \cdot \underline{k}_3' \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.667 & 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

- Επιπλέον προσθήκη μέλους -3:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Μητρώο δυσκαμψίας κατασκευής

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζων (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζων φαίνεται από το βαθμό (*rank*) του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3 αντί με 6, που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και συνεπώς και οι διαστάσεις του μητρώου.

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\underline{K} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} f & f & s & s & s & f \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ f \\ s \\ s \\ s \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.44 \\ -1.92 & -1.44 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 \\ 0 & 0 & -1.92 \\ 0 & -6.667 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.600 \\ -2.067 \\ -0.225 \end{bmatrix} mm$$

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

$$\Rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 15,000 \\ 20,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} KN$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}'_1 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 \cdot \underline{U}_1$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2' \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{U}_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_2' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_3' \cdot \underline{T}_3 \cdot \underline{U}_3$$

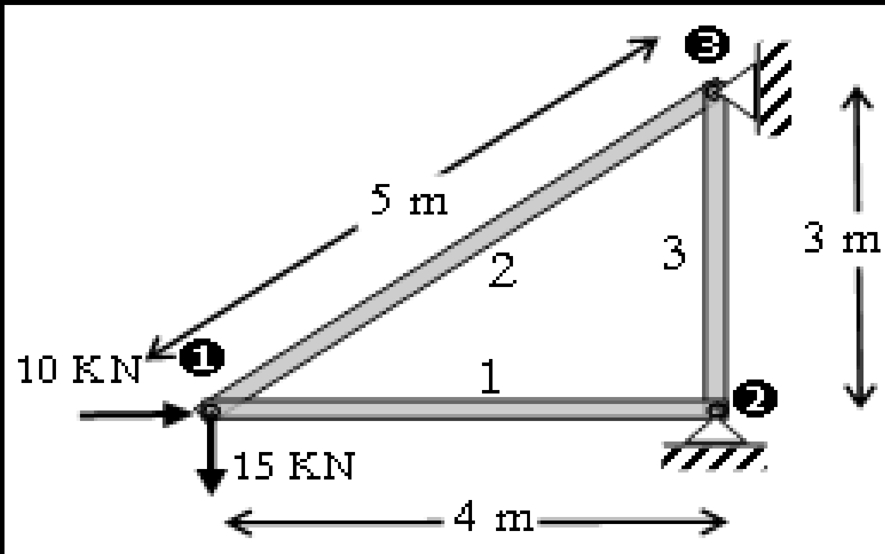
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

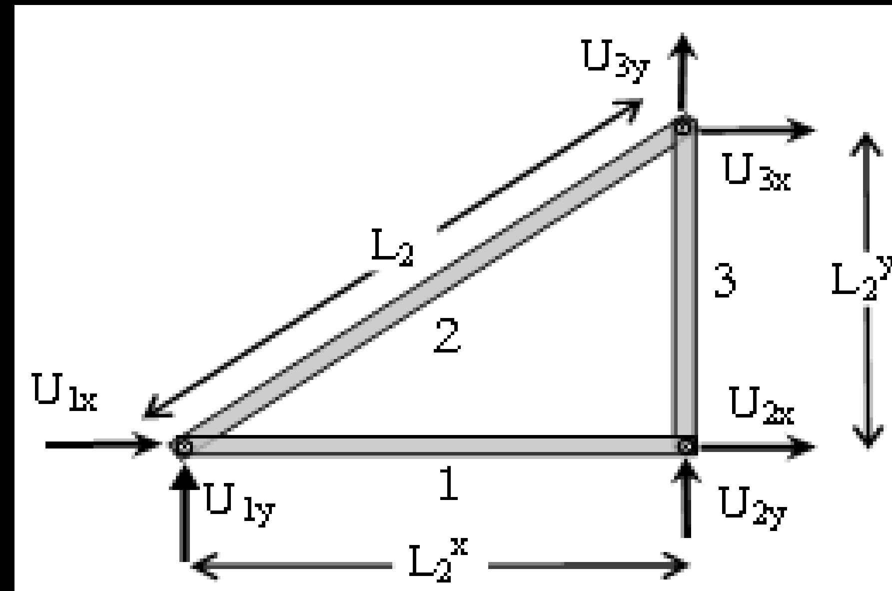
Εντολές *GT-Strudl*

```
STRUDL 'ASKISI_1 PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS                    $typos kataskevis
UNITS M N CENTIGRADE                $kathorismos monadwn
JOINT COORDINATES                   $sintetagmenes kombwn
1 0 0
2 4 0
3 4 3
STATUS SUPPORT JOINTS 2 3           $kathorismos stiriksewn
MEMBER INCIDENCE   $kathorismos sundesmologias melwn
1 1 2
2 1 3
3 2 3
JOINT RELEASES                 $kathorismos eleftheriwn
3 FORCE Y
```

```
CONSTANTS                           $kathorismos E
E 200E9 ALL
MEMBER PROPERTIES         $kathorismos embadou diatomis
1 TO 3 AX 0.001
LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS
JOINT LOADS                         $epikombia fortia
1 FORCE Y -15000
1 FORCE X  10000
QUERY
STIFFNESS ANALYSIS
OUTPUT DEMICAL 5
LIST FORCES
LIST DISPLACEMENTS
LIST REACTIONS
```

Παράδειγμα-3





$E = 200\ GPA$

$A = 0.001 m^2$

Ράβδος	$L\ [m]$	$\frac{A \cdot E}{L}\left[Nm^{-1}\right]$	$cos\theta_m$	$sin\theta_m$
1	4	$5 \cdot 10^7$	1	0
2	5	$4 \cdot 10^7$	0.8	0.6
3	3	$6.667 \cdot 10^7$	0	1

$$\underline{k}_m^{ii} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

$$\underline{k}_1^{ii} = \underline{k}_1^{jj} = -\underline{k}_1^{ij} = -\underline{k}_1^{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2^{ii} = \underline{k}_2^{jj} = -\underline{k}_2^{ij} = -\underline{k}_2^{ji} = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3^{ii} = \underline{k}_3^{jj} = -\underline{k}_3^{ij} = -\underline{k}_3^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Αντιστοιχία βαθμών ελευθερίας μελών και κόμβων

Προσδιορίζοντας τα πιο πάνω υπομητρώα, τα οποία είναι εκφρασμένα στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να σχηματίσουμε άμεσα το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής με προσθήκη των υπομητρώων στις κατάλληλες θέσεις. Όμως, πρέπει πρώτα να προσδιορισθεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους u_m με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\underline{U}$, σύμφωνα με την πιο πάνω αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας:

Ράβδος	Κόμβος αρχής - i		Κόμβος τέλους - j	
	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	1		2	
	U_{1x}	U_{1y}	U_{2x}	U_{2y}
2	1		3	
	U_{1x}	U_{1y}	U_{3x}	U_{3y}
3	2		3	
	U_{2x}	U_{2y}	U_{3x}	U_{3y}

Σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας κατασκευής

Στη συνέχεια, για το κάθε μέλος πρέπει να προστεθούν:

- το μητρώο $\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
- το μητρώο $\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j
- το μητρώο $\underline{k}_m^{ji} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
- το μητρώο $\underline{k}_m^{jj} = \underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής:

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} U_1^x & U_1^y & U_2^x & U_2^y & U_3^x & U_3^y \end{array} \\
\begin{array}{c} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Προσθήκη μέλους – 1 :

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

- Επιπλέον προσθήκη μέλους – 2 :

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & 0 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

- Επιπλέον προσθήκη του μέλους-3 δίνει το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής K και τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής σε μητρωική μορφή:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζων (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζων φαίνεται από το βαθμό του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με *3* αντί με *6* , που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και, συνεπώς, οι διαστάσεις του μητρώου.

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} KN \Rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \ \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7,$$

$$\Rightarrow \underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \ \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 2.56 & -6.667 \\ 0 & -6.667 & -6.667 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}{}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.00184 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -1.84 \end{bmatrix} mm$$

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.00060 \\ -0.00184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30{,}000 \\ 0 \\ 20{,}000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} KN$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_2^x \\ u_2^y \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} KN$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \end{bmatrix} KN$$

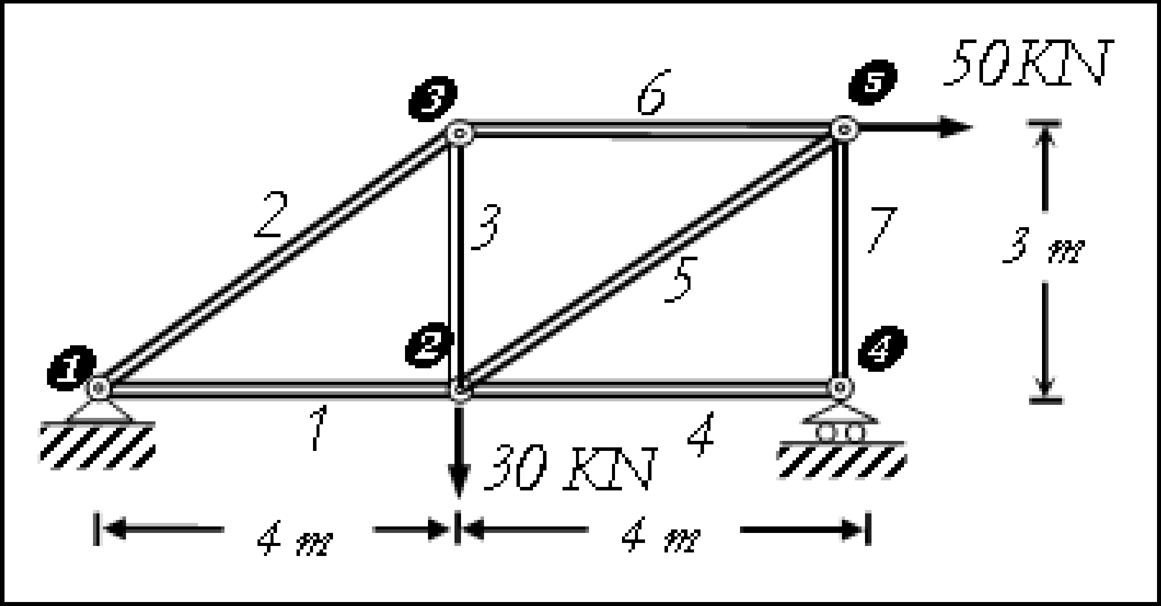
$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

Εντολές *GT-Strudl*

```
STRUDL 'ASKISI_1 PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS                    $typos kataskevis
UNITS M N CENTIGRADE                $kathorismos monadwn
JOINT COORDINATES                   $sintetagmenes kombwn
1 0 0
2 4 0
3 4 3
STATUS SUPPORT JOINTS 2 3           $kathorismos stiriksewn
MEMBER INCIDENCE  $kathorismos sundesmologias melwn
1 1 2
2 1 3
3 2 3
```

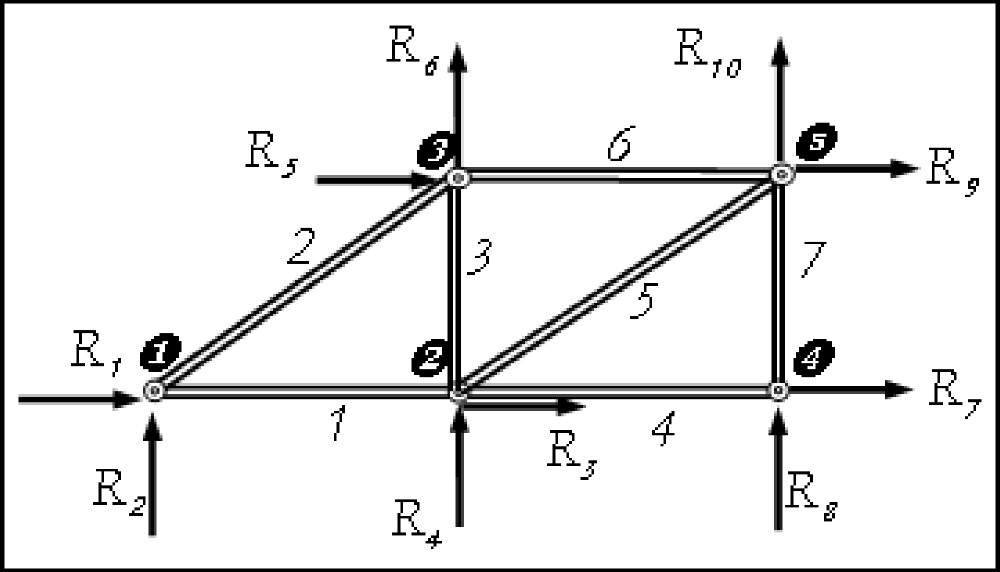
```
CONSTANTS                           $kathorismos E
E 200E9 ALL
MEMBER PROPERTIES                   $kathorismos embadou diatomis
1 TO 3 AX 0.001
LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS
JOINT LOADS                         $epikombia fortia
1 FORCE Y -15000
1 FORCE X  10000
QUERY
STIFFNESS ANALYSIS
OUTPUT DEMICAL 5
LIST FORCES
LIST DISPLACEMENTS
LIST REACTIONS
```

Παράδειγμα-4

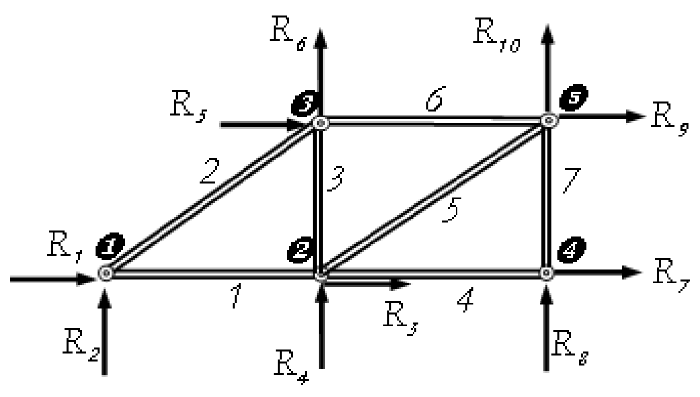


$E = 200\ GPA$

$A = 0.002\ m^2$



Ράβδος	$L\,[m]$	$\dfrac{A \cdot E}{L}\left[Nm^{-1}\right]$
1	4	$1 \cdot 10^8$
2	5	$8 \cdot 10^7$
3	3	$1.33 \cdot 10^8$
4	4	$1 \cdot 10^8$
5	5	$8 \cdot 10^7$
6	4	$1 \cdot 10^8$
7	3	$1.33 \cdot 10^8$



$$\underline{k}'_1 = \underline{k}'_4 = \underline{k}'_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

$$\underline{k}'_2 = \underline{k}'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 8 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}'_3 = \underline{k}'_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 1.33 \cdot 10^8$$

Τα μητρώα δυσκαμψίας των ράβδων συνδέουν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

$$\underline{s}_m' = \underline{k}_m' \cdot \underline{u}_m' \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \underline{k}_m' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1
4	2	4	0°	1	0
5	2	5	36.87°	0.8	0.6
6	3	5	0°	1	0
7	4	5	90°	0	1

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_1 = \underline{T}_4 = \underline{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_2 = \underline{T}_5 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_3 = \underline{T}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^{\,T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\underline{k}_1 = \underline{T}_1^{\,T} \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8 = \underline{k}_4 = \underline{k}_6$$

$$\underline{k}_2 = \underline{T}_2^{\,T} \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 5.12 & 3.84 & -5.12 & -3.84 \\ 3.84 & 2.88 & -3.84 & -2.88 \\ -5.12 & -3.84 & 5.12 & 3.84 \\ -3.84 & -2.88 & 3.84 & 2.88 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \underline{k}_5$$

$$\underline{k}_3 = \underline{T}_3^{\,T} \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1.33 \cdot 10^8 = \underline{k}_7$$

Για να μπορέσουν να προστεθούν τα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών στο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, πρέπει να προσδιορισθεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους $\underline{u}_m$ με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής, $\underline{U}$.

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6
4	U_3	U_4	U_7	U_8
5	U_3	U_4	U_9	U_{10}
6	U_5	U_6	U_9	U_{10}
7	U_7	U_8	U_9	U_{10}

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής, όπως ακριβώς έγινε και στα προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής είναι:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1.512 & 0.384 & -1.000 & 0 & -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.384 & 0.288 & 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.000 & 0 & 2.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.512 & 0.384 \\ 0 & 0 & 0.384 & 1.621 & 0 & -1.333 & 0 & 0 & -0.384 & 0.28 \\ -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.000 & 0 \\ 0.384 & -0.288 & 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & -1.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.512 & -0.384 & -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 \\ 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 \end{bmatrix} \cdot 10^{8}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_9 \\ R_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$\Rightarrow$

$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{ff}=\begin{bmatrix} 2.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.000 & -0.512 & -0.384 \\ 0.384 & 1.621 & 0 & -1.333 & 0 & -0.384 & -0.288 \\ 0 & 0 & 1.512 & -0.384 & 0 & -1.000 & 0 \\ 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 & 0 & 0 & 0 \\ -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ -0.512 & -0.384 & -1.000 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 \\ -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & 0.384 & 1.621 \end{bmatrix}\cdot 10^8$$

$$\underline{K}_{sf}=\begin{bmatrix} -1.000 & 0 & -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.333 \end{bmatrix}\cdot 10^8$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.45 \\ -0.9 \\ 0.794 \\ -0.928 \\ 0.45 \\ 0.844 \\ -0.253 \end{bmatrix} mm$$

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -3.75 \\ 33.75 \end{bmatrix} KN$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_m = \underline{k}'_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot u_m$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	0	0	0.45	-0.9
2	0	0	0.794	-0.928
3	0.45	-0.9	0.794	-0.928
4	0.45	-0.9	0.45	0
5	0.45	-0.9	0.844	-0.253
6	0.794	-0.928	0.844	-0.253
7	0.45	0	0.844	-0.253

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.00 \\ 6.25 \\ -3.75 \\ 0.00 \\ 56.25 \\ 5.00 \\ -33.75 \end{bmatrix} KN$$

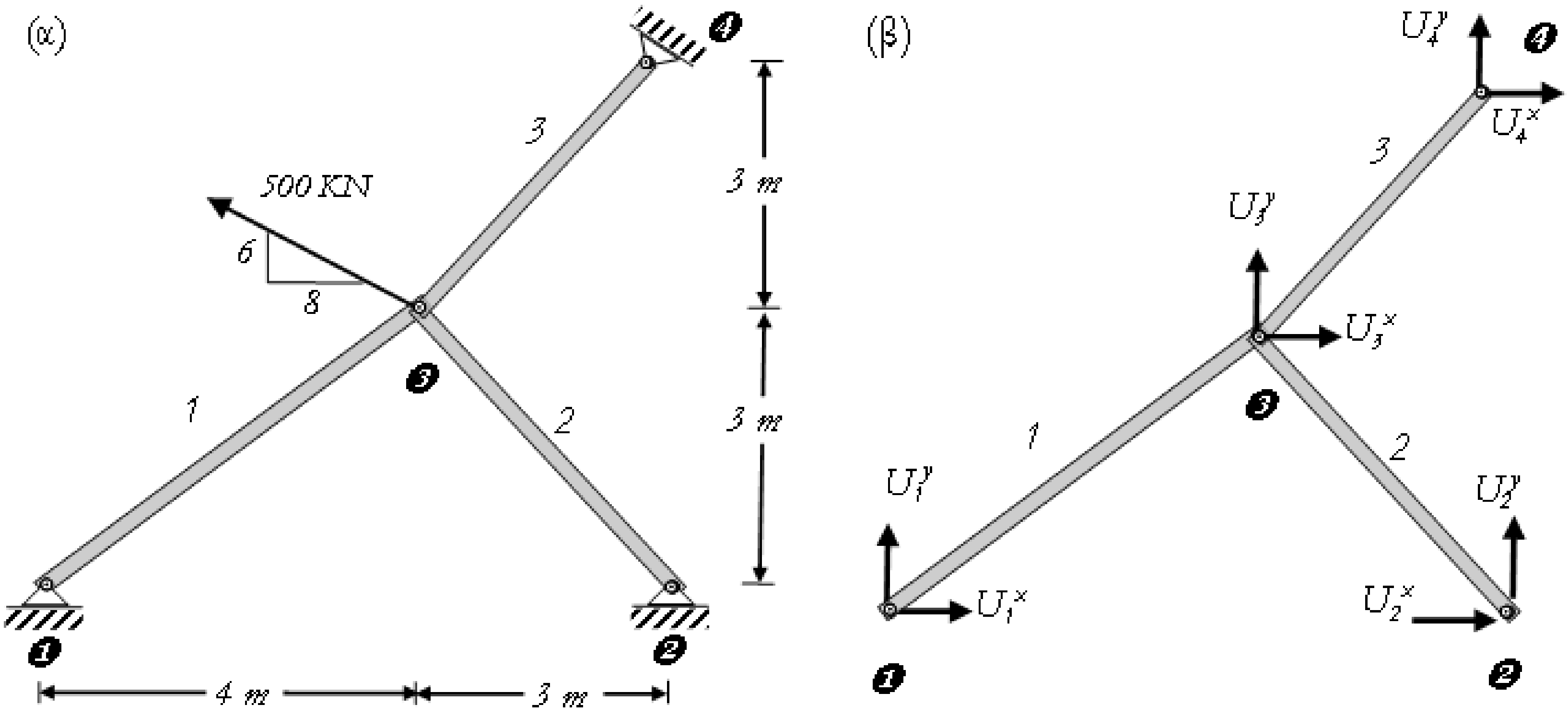
Εντολές *GT-Strudl*

```
STRUDL 'ASKISI_1''PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS                 $typos kataskevis
UNITS M N CENTIGRADE             $kathorismos monadwn
JOINT COORDINATES                $sintetagmenes kombwn
1 0 0
2 4 0
3 4 3
4 8 0
5 8 3
STATUS SUPPORT JOINTS 1 4        $kathorismos stiriksewn
JOINT RELEASES                   $kathorismos eleftheriwn
4 FORCE X
MEMBER INCIDENCES $kathorismos sundesmologias melwn
1 1 2
2 1 3
3 2 3
4 2 4
5 2 5
6 3 5
7 4 5
```

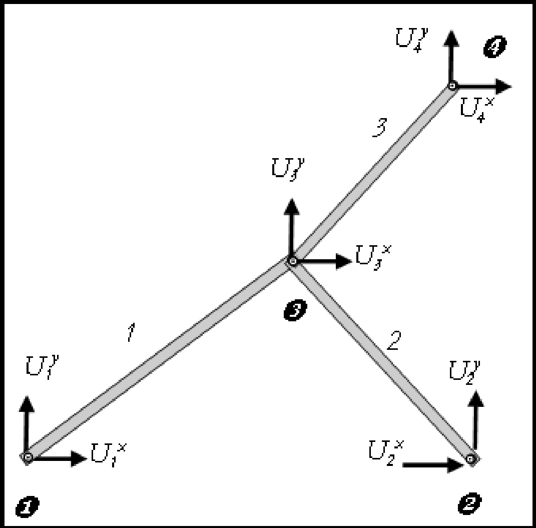
```
CONSTANTS                        $kathorismos E
E 200E9 ALL
MEMBER PROPERTIES                $kathorismos embadou diatomis
1 TO 7 AX 0.002
LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS'
JOINT LOADS                      $epikombia fortia
2 FORCE Y -30000
5 FORCE X  50000
QUERY
STIFFNESS ANALYSIS
OUTPUT DEMICAL 5
LIST FORCES
LIST DISPLACEMENTS
CINPUT
```

Παράδειγμα-5

Να προσδιοριστούν οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 9.9.α), με την Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται και για τις τρεις ράβδους με: $E = 200\ GPA$ και το εμβαδόν διατομής των τριών ράβδων ισούται αντίστοιχα με: $A_1 = 0.002\, m^2$, $A_2 = 0.001\, m^2$ και $A_3 = 0.0015\, m^2$.



Ράβδος	$L\,[m]$	$\frac{A \cdot E}{L}\left[Nm^{-1}\right]$	θ_m	$cos\theta_m$	$sin\theta_m$
1	5	$8 \cdot 10^7$	36.87^o	0.8	0.6
2	$\sqrt{18}$	$4.71 \cdot 10^7$	135^o	-0.707	0.707
3	$\sqrt{18}$	$7.07 \cdot 10^7$	45^o	0.707	0.707



Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1^x	U_1^y	U_3^x	U_3^y
2	U_2^x	U_2^y	U_3^x	U_3^y
3	U_3^x	U_3^y	U_4^x	U_4^y

$$\underline{k}_m = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$\underline{k}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & U_3^x & U_3^y \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array} & \begin{bmatrix} 5.12 & 3.84 & -5.12 & -3.84 \\ 3.84 & 5.12 & -3.84 & -5.12 \\ -5.12 & -3.84 & \mathbf{5.12} & \mathbf{3.84} \\ -3.84 & -5.12 & \mathbf{3.84} & \mathbf{5.12} \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

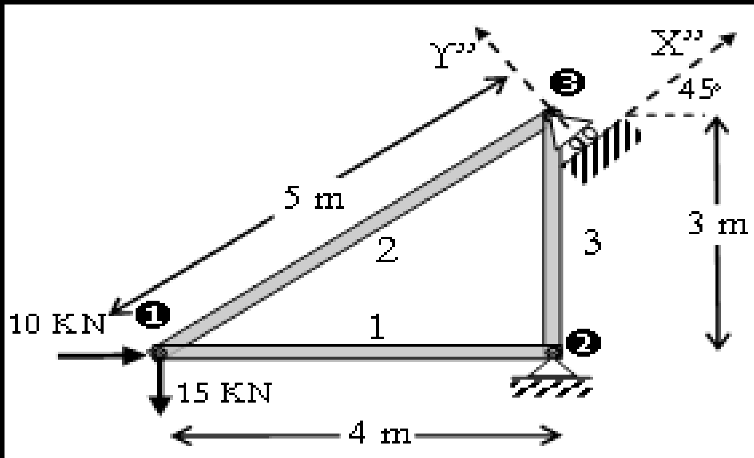
$$\underline{k_2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & U_3^x & U_3^y \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array} & \begin{bmatrix} 2.355 & -2.355 & -2.355 & 2.355 \\ -2.355 & 2.355 & 2.355 & -2.355 \\ -2.355 & 2.355 & \mathbf{2.355} & \mathbf{-2.355} \\ 2.355 & -2.355 & \mathbf{-2.355} & \mathbf{2.355} \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

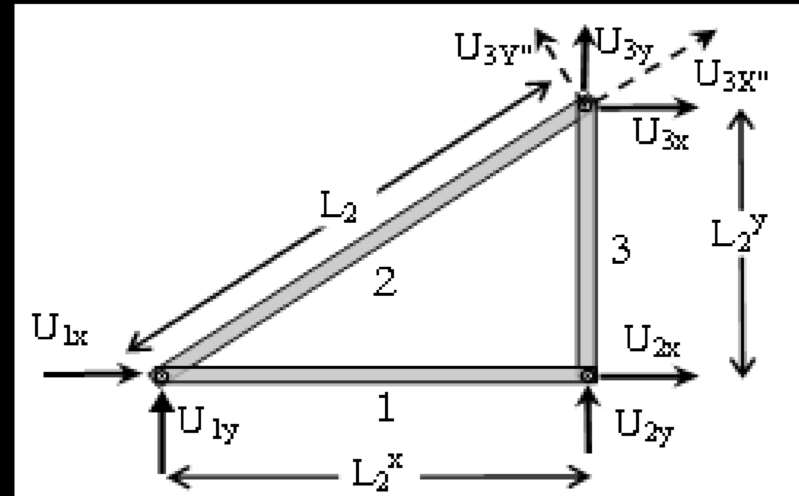
$$\underline{k_3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} U_3^x & U_3^y & & \end{array} \\ \begin{array}{c} U_3^x \\ U_3^y \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{3.535} & \mathbf{3.535} & -3.535 & -3.535 \\ \mathbf{3.535} & \mathbf{3.535} & -3.535 & -3.535 \\ -3.535 & -3.535 & 3.535 & 3.535 \\ -3.535 & -3.535 & 3.535 & 3.535 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 11.01 & 5.02 \\ 5.02 & 8.77 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 12.29 & -7.03 \\ -7.03 & 15.43 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -400,000 \\ 300,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.0\,mm \\ 7.4\,mm \end{bmatrix}$$

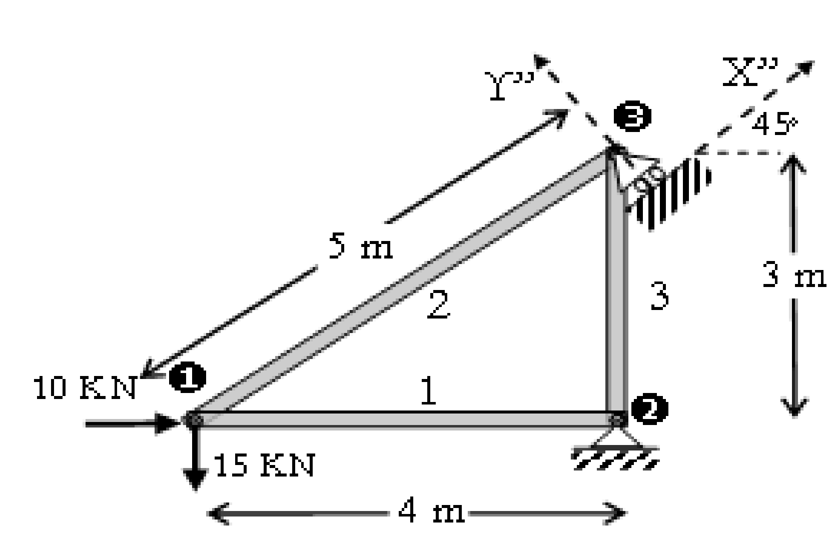
Κεκλιμένες συνοριακές συνθήκες





Σε περιπτώσεις όπου μια συνοριακή συνθήκη, π.χ. μια κύλιση σε ένα επίπεδο φορέα (Σχήμα 9.10.α), είναι υπό γωνία σε σχέση με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, δεν είναι δυνατή η απλή αφαίρεση των αντίστοιχων γραμμών και στηλών από το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας για να προκύψει το υπομητρώο $\underline{K}_{ff}$, καθώς και τα άλλα υπομητρώα. Ο διαχωρισμός των βαθμών ελευθερίας ενός φορέα σε αυτούς που έχουν άγνωστες μετακινήσεις και γνωστά επικόμβια φορτία, από αυτούς που έχουν γνωστές μετακινήσεις, οι οποίες είναι συνήθως μηδενικές και άγνωστες τις αντίστοιχες αντιδράσεις, δεν είναι δυνατός γιατί οι συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να εκφρασθούν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

Η δεδομένη συνοριακή συνθήκη για μια κεκλιμένη κύλιση (Σχήμα 9.10.α) μπορεί να εκφρασθεί σε κάποιο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$, το οποίο ορίζεται να είναι παράλληλο με τη δεδομένη μετακίνηση στη στήριξη. Έτσι, οι αντιδράσεις καθώς και οι μετακινήσεις κατά τη συγκεκριμένη ελευθερία θα μπορούν να εκφρασθούν βάσει του βοηθητικού συστήματος συντεταγμένων.

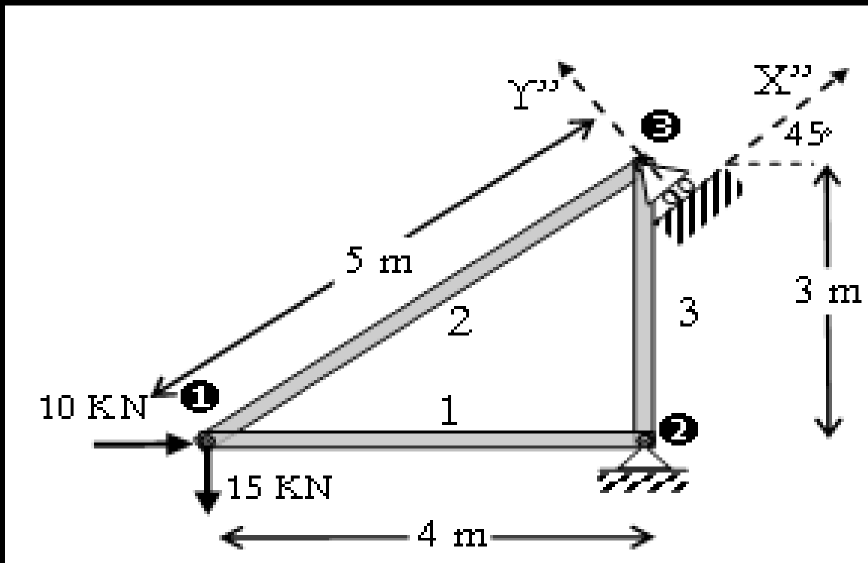


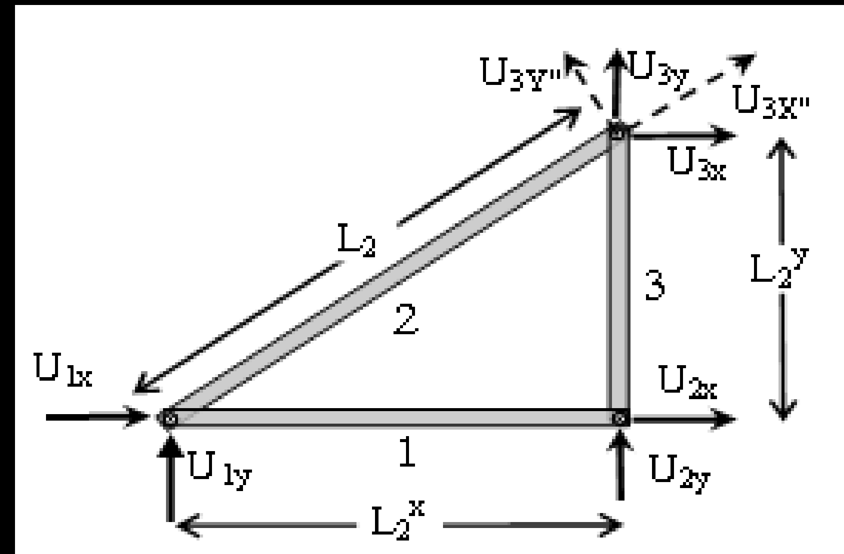
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_n^{x''} \\ R_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x''x} & \cos\theta_{x''y} \\ \cos\theta_{y''x} & \cos\theta_{y''y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x''x} & \cos\theta_{x''y} \\ \cos\theta_{y''x} & \cos\theta_{y''y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & -\sin\theta'' \\ \sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα-6





$A = 0.001 m^2$

$E = 200\ GPA$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$R=\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix}\cdot 10^7\cdot\begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}=K\cdot U$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις ισορροπίας εκφρασμένες στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, ενώ οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε κύλιση η οποία είναι κεκλιμένη κατά $\theta = 45°$, σε σχέση με τον απόλυτο άξονα των X. Συνεπώς, για να είναι δυνατό να επιβληθούν οι συνοριακές συνθήκες στον κόμβο ❸ πρέπει οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας να μετασχηματιστούν στο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$.

$$\begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_3^{x''} \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \underline{T}'' \cdot \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_3^{x''} \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

Έτσι, οι δύο τελευταίες γραμμές του μητρώου δυσκαμψίας **K** , οι οποίες αντιστοιχούν στην κεκλιμένη στήριξη μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} cos\,45 & sin\,45 \\ -sin\,45 & cos\,45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$= \begin{bmatrix} -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 7.2533 & 2.7733 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & 2.7733 & 3.4133 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 7.2533 & 2.7733 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & 2.7733 & 3.4133 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Παρομοίως, οι αντίστοιχες μετακινήσεις του κόμβου ❸, οι οποίες ενδεχομένως να είναι δεδομένες αλλά μη μηδενικές, μπορούν να μετασχηματιστούν από το κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τον πιο κάτω μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix} = \underline{T}'' \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.667 \\ 7.2533 & 2.7733 \\ 2.7733 & 3.4133 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1678 & 0.4525 \\ -2.3759 & 0.3394 \\ 0 & 0 \\ -4.7140 & -4.7140 \\ 7.2533 & 2.7733 \\ 2.7733 & 3.4133 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -3.1678 & 0.4525 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -2.3759 & 0.3394 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & -4.7140 & -4.7140 \\ -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 7.2533 & 2.7733 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & 2.7733 & 3.4133 \end{bmatrix} \cdot 10^{7}$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^{x''} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_3^{x''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ -15{,}000 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^{y''} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -3.1678 \\ 1.92 & 1.44 & -2.3759 \\ -3.1678 & -2.3759 & 7.2533 \end{bmatrix} \cdot 10^7 , \quad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0.4525 \\ 0 & 0 & 0.3394 \\ 0 & -4.7140 & 2.7733 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.7140 \\ 0.4525 & 0.3394 & 2.7733 \end{bmatrix} \cdot 10^7 , \quad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & -4.7140 \\ 0 & -4.7140 & 3.4133 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^{x''} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.00060 \\ 0.00307 \\ -0.00074 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 3.07 \\ -0.742 \end{bmatrix} mm$$

$$\boxed{\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f}$$

$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30{,}000 \\ 35{,}000 \\ -28{,}284 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30 \\ 35 \\ -28.3 \end{bmatrix} KN$$

Ανάλυση χωρικών δικτυωμάτων

Η διαδικασία ανάλυσης χωρικών δικτυωμάτων είναι ίδια με τη διαδικασία επίλυσης επίπεδων δικτυωμάτων, όπως έχει παρουσιαστεί στις προηγούμενες παραγράφους. Οι μόνες διαφορές είναι ότι σε κάθε κόμβο υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας και τα μητρώα δυσκαμψίας και μετασχηματισμού έχουν αντίστοιχες διαστάσεις.

Τα μητρώα μετασχηματισμού έχουν τη πιο κάτω μορφή, χρησιμοποιώντας συνημίτονα κατευθύνσεως, όπου η γωνία $\theta_{zx'}$ ορίζεται σαν η γωνία από τον απόλυτο άξονα Z στον τοπικό άξονα X':

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix}$$

Ανάλυση χωρικών δικτυωμάτων

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_1^{z} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \\ u_2^{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{z'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{z'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{z'} \end{bmatrix}_m$$

Προγραμματισμός άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας

Καθορισμός δεδομένων για ανάλυση επίπεδων δικτυωμάτων:

Τα πιο κάτω βήματα μπορούν να ακολουθηθούν για να καθορισθούν τα απαραίτητα δεδομένα για την ανάλυση ενός επίπεδου δικτυώματος:

- Καθορισμός και αρίθμηση όλων των κόμβων της κατασκευής.
- Καθορισμός και αρίθμηση όλων των μελών της κατασκευής.
- Καθορισμός των τοπικών συστημάτων συντεταγμένων του κάθε μέλους της κατασκευής, δηλαδή προσδιορισμός των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j).
- Καθορισμός ενός απόλυτου συστήματος συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των συντεταγμένων του κάθε κόμβου της κατασκευής χρησιμοποιώντας το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών στηρίξεων, δηλαδή των βαθμών ελευθερίας με δεδομένες μετακινήσεις, οι οποίες συνήθως είναι μηδενικές.
- Προσδιορισμός της συνδεσμολογίας των μελών της κατασκευής, δηλαδή των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j) στα άκρα του κάθε μέλους.
- Καθορισμός των ιδιοτήτων του κάθε μέλους, δηλαδή για δικτυώματα της επιφάνειας διατομής A, και μέτρου ελαστικότητας E .

Αυτόματη διαδικασία ανάλυσης επίπεδων δικτυωμάτων:

- Υπολογισμός των συνημίτονων κατευθύνσεως του κάθε μέλους από τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των μητρώων δυσκαμψίας του κάθε μέλους, είτε κατευθείαν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, είτε χρησιμοποιώντας τα μητρώα δυσκαμψίας στα τοπικά συστήματα συντεταγμένων και τα αντίστοιχα μητρώα μετασχηματισμού.
- Έτσι, υπολογίζουμε το υπομητρώο δυσκαμψίας κάθε μέλους $\underline{k}_m^{ii}$, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων:

$$\underline{k}_m^{ii} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

- Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{\boldsymbol{K}}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, για το κάθε μέλος πρέπει να προστεθούν τα εξής, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής::
  - το μητρώο $\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
  - το μητρώο $\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j
  - το μητρώο $\underline{k}_m^{ji} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
  - το μητρώο $\underline{k}_m^{jj} = \underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j

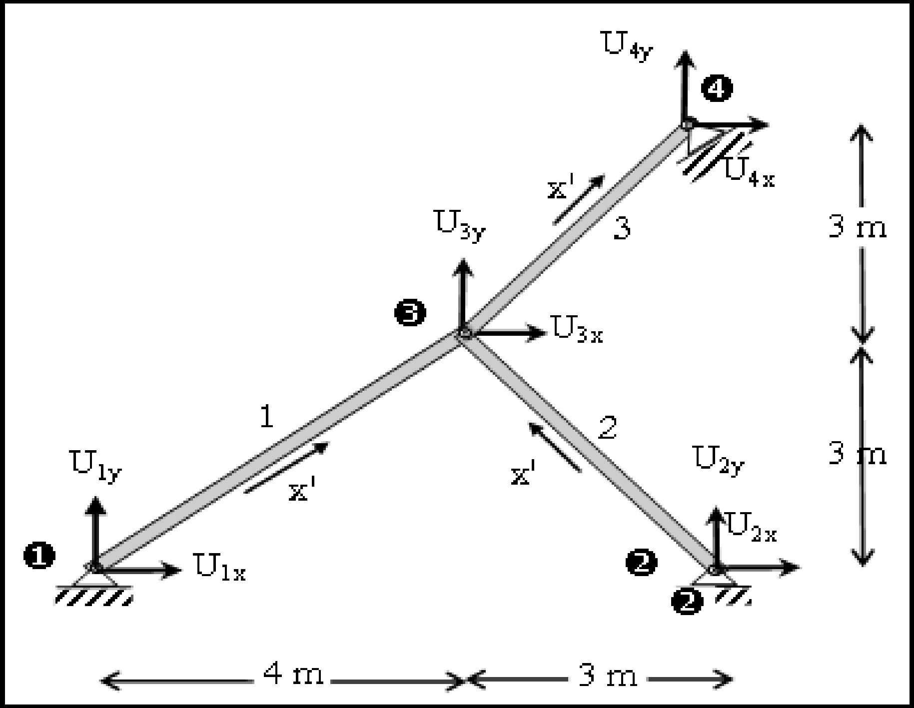
Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Με τη γραφική μέθοδο μπορεί να επιλυθεί πρακτικά ένα δικτύωμα, η γενικότερα ένας φορέας, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι δεν είναι δεσμευμένοι. Για αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας σχηματίζεται κατευθείαν το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας $\boldsymbol{K_{ff}}$, το οποίο χρησιμοποιείται μαζί με τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία $\boldsymbol{R_f}$ για να υπολογιστούν οι άγνωστες μετακινήσεις $\boldsymbol{U_f}$.

Για να σχηματιστεί το μητρώο δυσκαμψίας $\boldsymbol{K_{ff}}$, αφού καθοριστούν και αριθμηθούν όλοι οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας, παραλείποντας δηλαδή όλους τους βαθμούς ελευθερίας των οποίων οι μετακινήσεις είναι δεδομένες, επιβάλλεται διαδοχικά μοναδιαία μετακίνηση στον κάθε ένα από αυτούς τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, διατηρώντας τους υπόλοιπους με μηδενικές μετακινήσεις. Έτσι, υπολογίζεται η αντίστοιχη στήλη του μητρώου δυσκαμψίας, τα στοιχεία της οποία ισούνται εξ' ορισμού με τις επικόμβιες δυνάμεις οι οποίες πρέπει να επιβληθούν για να προκύψει η συγκεκριμένη μοναδιαία μετακίνηση.

➡ Αφού προσδιορισθεί το μητρώο δυσκαμψίας, $\boldsymbol{K_{ff}}$, επιβάλλοντας τα επικόμβια φορτία $\boldsymbol{R_f}$ και υπολογιστούν οι μετακινήσεις $\boldsymbol{U_f}$, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη των μελών αξιοποιώντας τα εντατικά μεγέθη τα οποία προέκυψαν για μοναδιαίες μετακινήσεις κατά τη διαδικασία εύρεσης του μητρώου δυσκαμψίας.

Παράδειγμα-7: γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας



$E = 200\ GPA$

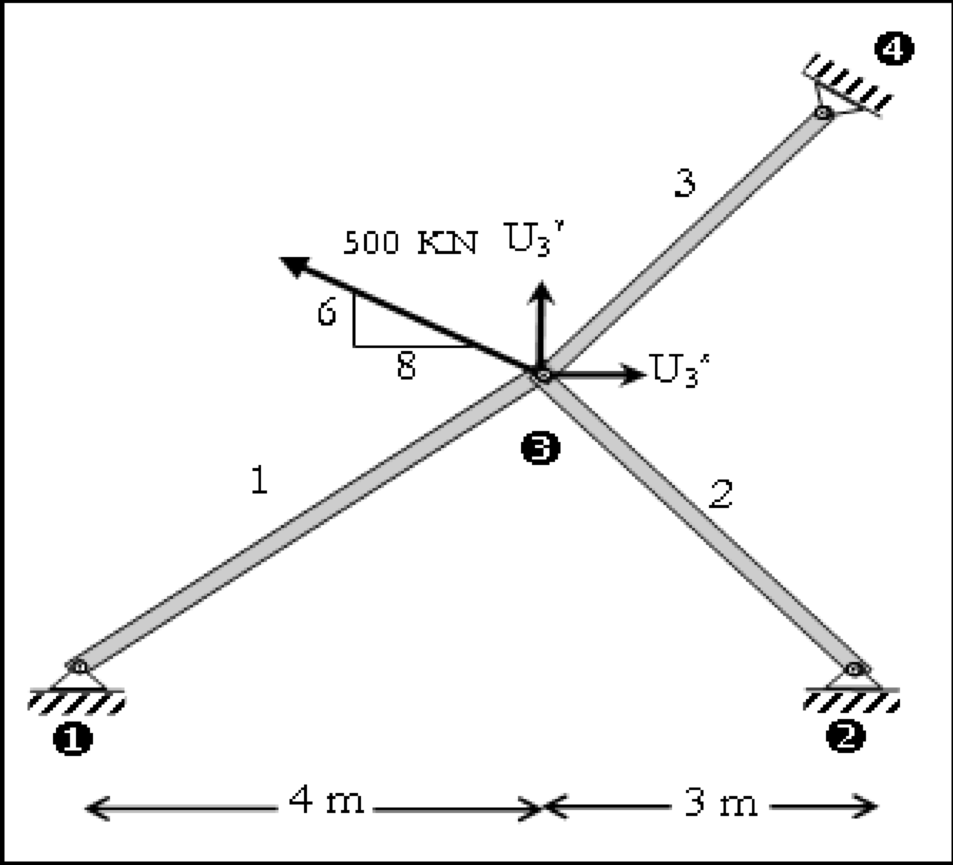
$A_1 = 0.002m^2$

$A_2 = 0.001m^2$

$A_3 = 0.0015m^2$

$$R_f = K_{ff} \cdot U_f$$

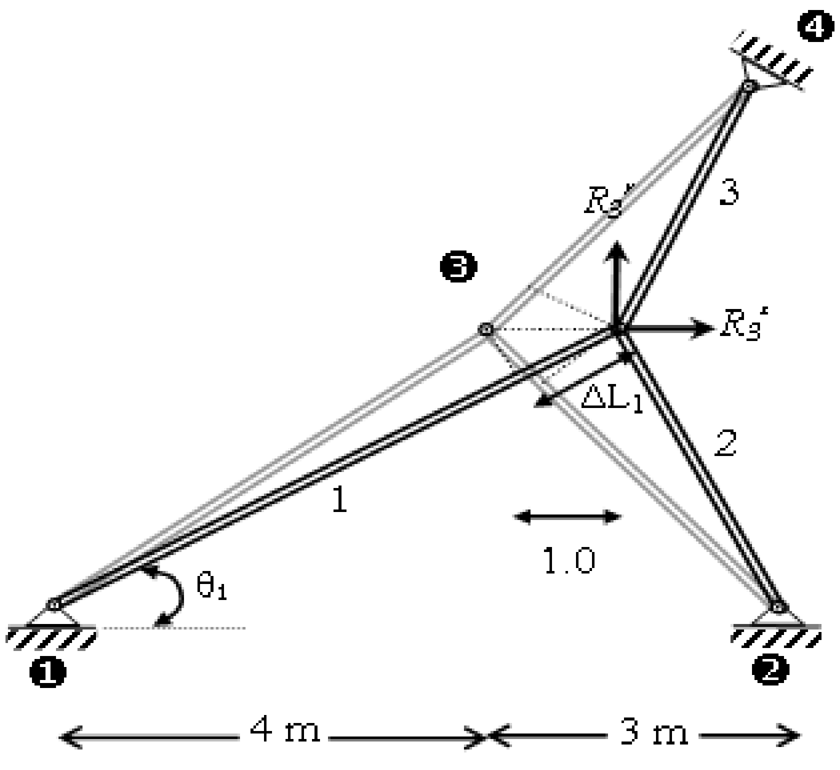
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ff} & K_{12}^{ff} \\ K_{21}^{ff} & K_{22}^{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$



Προσδιορισμός στοιχείων 1ης στήλης

$$U_3^x = 1$$

$$U_3^y = 0$$



Η ράβδος 1 επιμηκύνεται κατά $cos(\theta_1)\cdot 1 = 0.8$, ενώ η ράβδοι 2 και 3 βραχύνονται κατά $cos(\theta_2)\cdot 1 = \sqrt{2}/2$. Με δεδομένες τις επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων μπορούν να υπολογισθούν οι αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις:

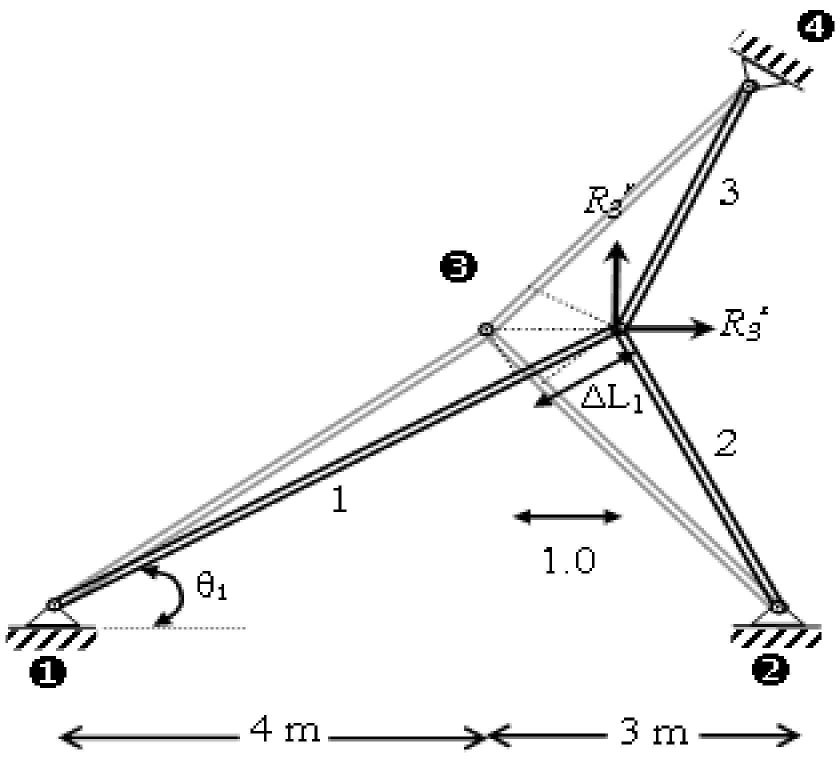
$$N_m = \Delta L_m \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m}$$

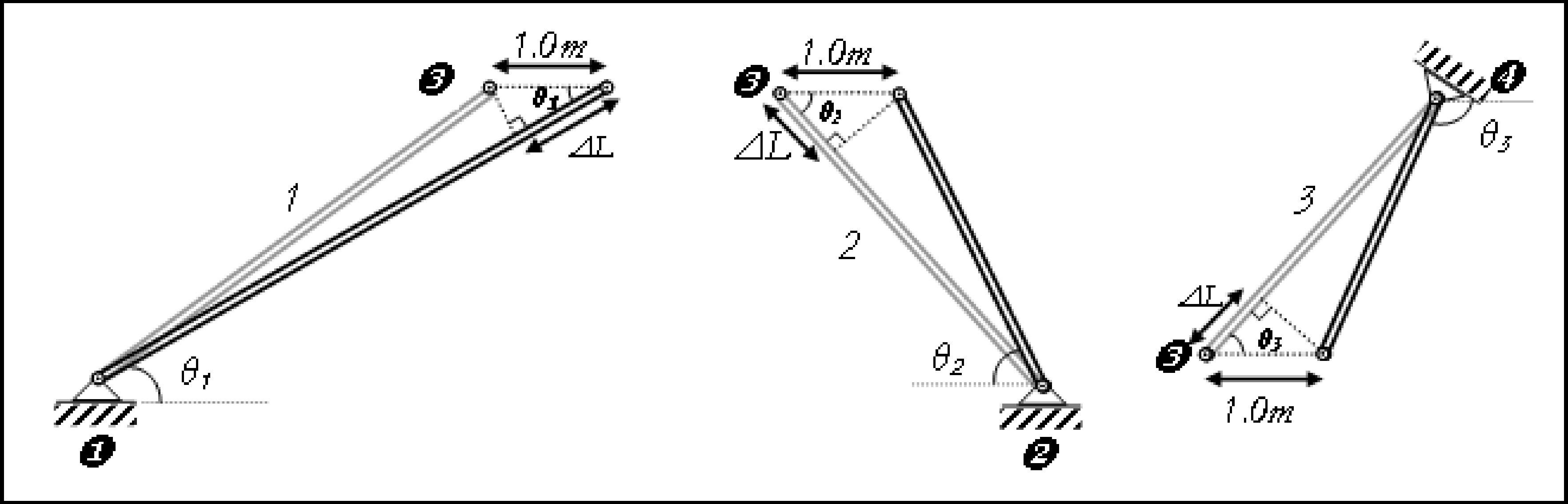
Ακολούθως, επιβάλλοντας τις αξονικές δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα των ράβδων για να τις παραμορφώσουν, με αντίθετη φορά (δράση-αντίδραση) πάνω στον ελεύθερο κόμβο 3, και παίρνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να υπολογισθούν οι απαραίτητες για την ισορροπία επικόμβιες δυνάμεις R_3^x και R_3^y.

Προσδιορισμός στοιχείων 1ης στήλης

$$U_3^x = 1$$

$$U_3^y = 0$$

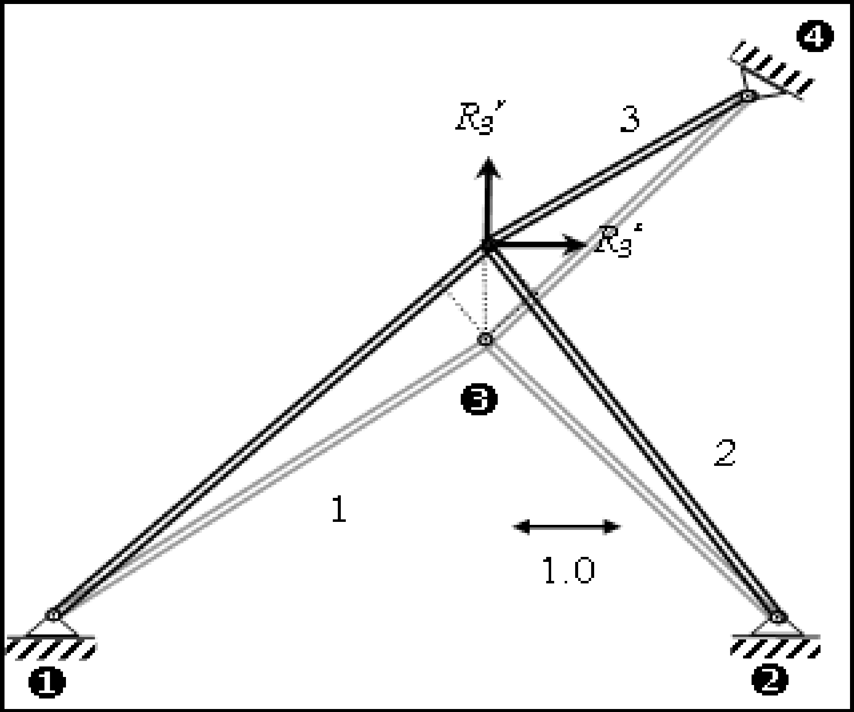




Προσδιορισμός στοιχείων 2ης στήλης

$$U_3^x = 0$$

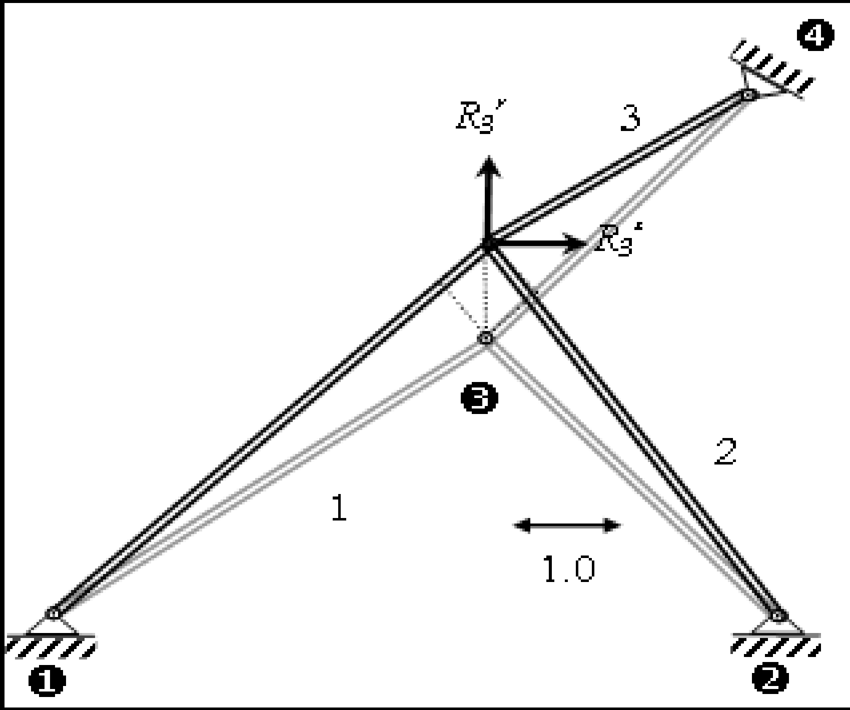
$$U_3^y = 1$$

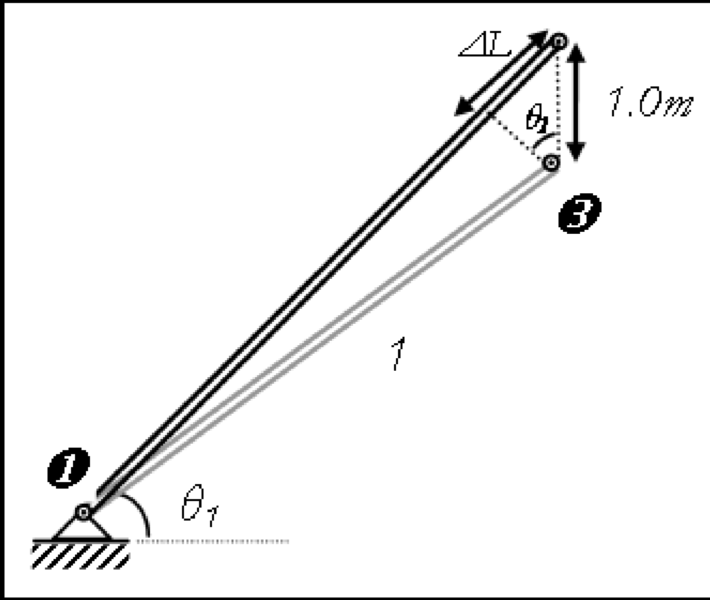


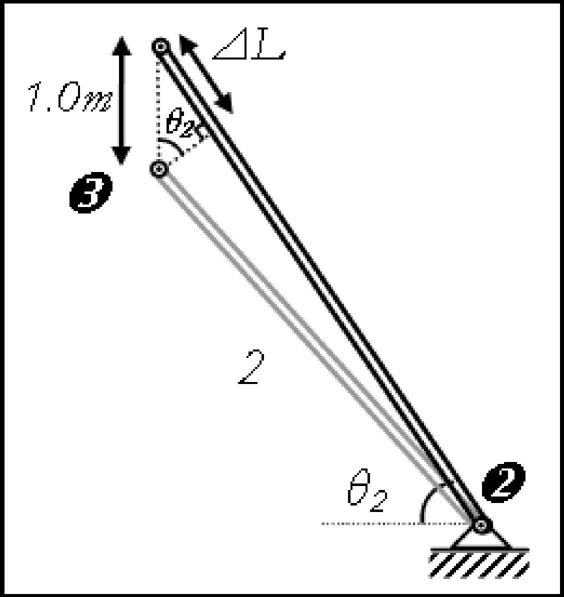
Προσδιορισμός στοιχείων 2ης στήλης

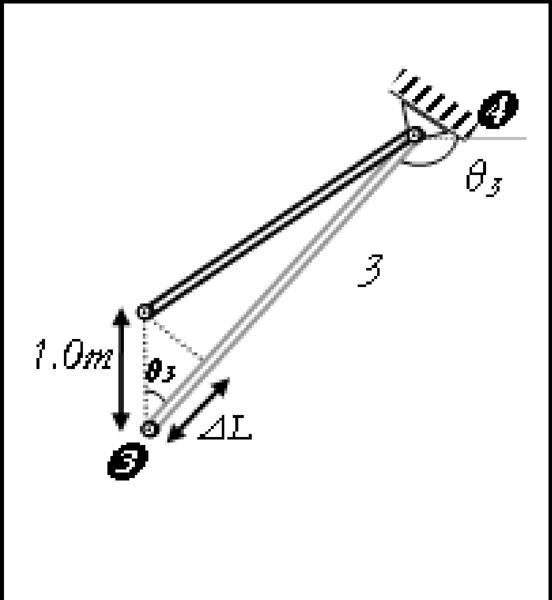
$$U_3^x = 0$$

$$U_3^y = 1$$









Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της κάθε ράβδου, και για την κάθε μία περίπτωση παραμόρφωσης τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων και τις αντίστοιχες αξονικές τους δυνάμεις.

Ράβδος (m)	$\dfrac{A_m \cdot E_m}{L_m}$	$U_3^x = 1,\ U_3^y = 0$		$U_3^y = 1,\ U_3^x = 0$	
		ΔL_m	N_m	ΔL_m	N_m
1	$8 \cdot 10^7$	0.8	$6.4 \cdot 10^7$	0.6	$4.8 \cdot 10^7$
2	$4.714 \cdot 10^7$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-3.333 \cdot 10^7$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$3.333 \cdot 10^7$
3	$7.071 \cdot 10^7$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-5 \cdot 10^7$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-5 \cdot 10^7$

Έτσι, οι απαραίτητες, για να ισορροπεί ο κόμβος με τη δράση των δυνάμεων από τις ράβδους, επικόμβιες δυνάμεις μπορούν να υπολογισθούν:

$U_3^x = 1$ $U_3^y = 0$	$\Rightarrow R_x = 6.4 \cdot 10^7 \cdot 0.8 + 3.33 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11.01 \cdot 10^7$ $\Rightarrow R_y = 6.4 \cdot 10^7 \cdot 0.6 - 3.33 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.02 \cdot 10^7$
$U_3^x = 0$ $U_3^y = 1$	$\Rightarrow R_x = 4.8 \cdot 10^7 \cdot 0.8 - 3.333 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.02 \cdot 10^7$ $\Rightarrow R_y = 4.8 \cdot 10^7 \cdot 0.6 + 3.33 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8.77 \cdot 10^7$

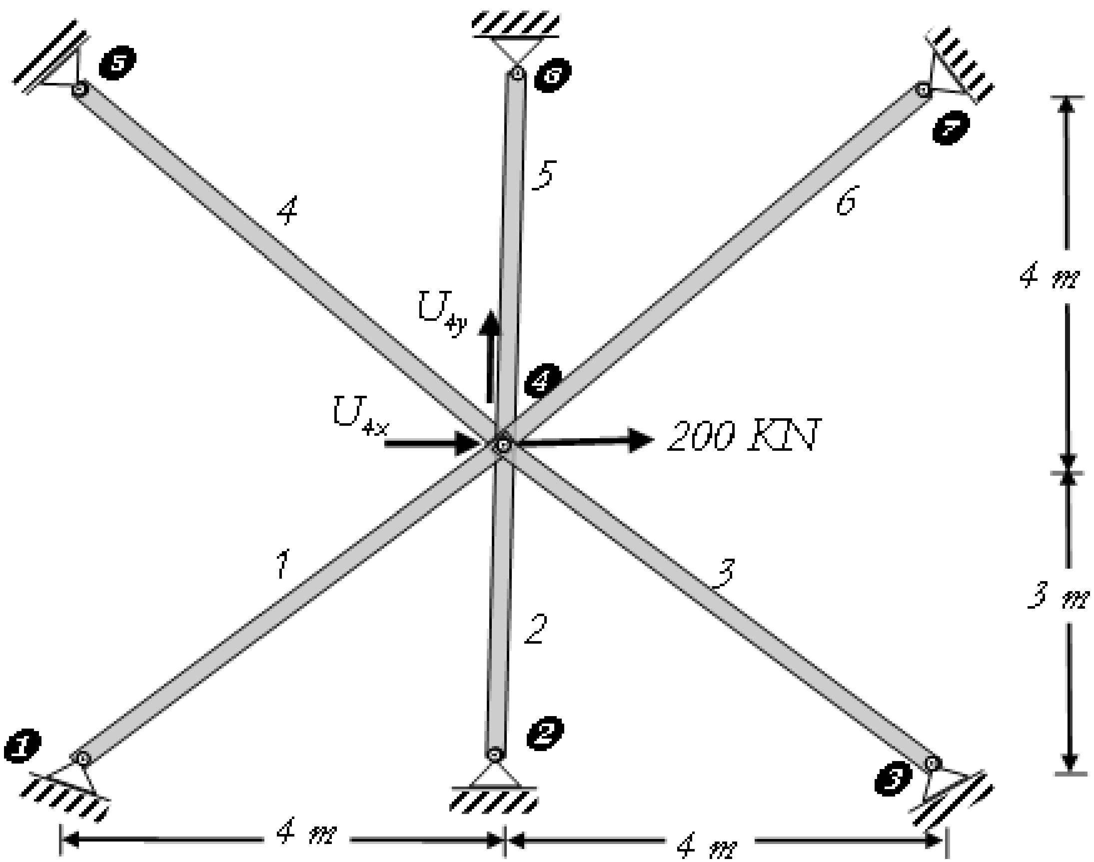
$$\Rightarrow \quad K_{ff} = \begin{bmatrix} 11.01 & 5.02 \\ 5.02 & 8.77 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 11.01 & 5.02 \\ 5.02 & 8.77 \end{bmatrix} \cdot 10^{7}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_f = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 12.29 & -7.03 \\ -7.03 & 15.43 \end{bmatrix} \cdot 10^{5} \cdot \begin{bmatrix} -400,000 \\ 300,000 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -7.0\ mm \\ 7.4\ mm \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα-8: γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 9.15) για το φορτίο των $200\ KN$ καθώς και τα εντατικά μεγέθη, μπορούν να προσδιορισθούν με τη Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται και για τις τρεις ράβδους με $E = 200\ GPA$ και το εμβαδόν διατομής των τριών ράβδων ισούται με $A = 0.001\, m^2$.



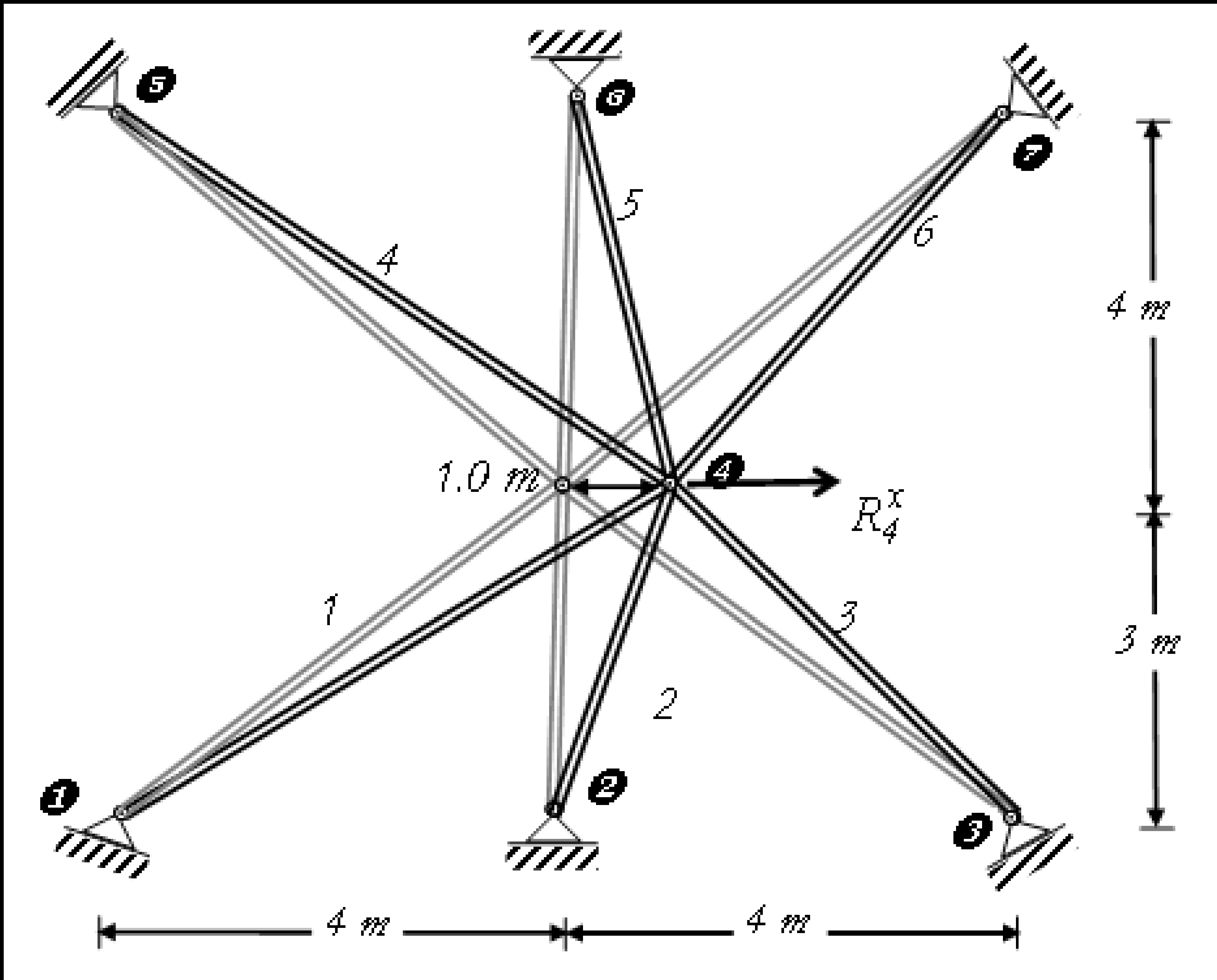
Με τη Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας μπορεί να σχηματιστεί το υπομητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, το οποίο αντιστοιχεί στους αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή στους βαθμούς ελευθερίας $\underline{U}_f$ για τους οποίους δεν είναι δεδομένες οι μετακινήσεις.

$$\underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} R_4^x \\ R_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ff} & K_{12}^{ff} \\ K_{21}^{ff} & K_{22}^{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix}$$

Αφού η φόρτιση είναι συμμετρική, σε συμμετρική κατασκευή:

$$K_{21}^{ff} = K_{12}^{ff} = 0$$

$$\begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{K_{11}^{ff}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{K_{22}^{ff}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$



5
6
7
5
4
6
4 m
1.0 m
4
R_4^x
1
3
3 m
2
1
2
3
4 m
4 m

Ράβδος	$\dfrac{A_m \cdot E_m}{L_m}\left[Nm^{-1}\right]$	$U4_3^x = 1.0\,m, U_4^y = 0$	
		$\Delta L_m\left[m\right]$	$N_m\left[N\right]$
1	$4 \cdot 10^7$	0.8	$3.2 \cdot 10^7$
2	$6.667 \cdot 10^7$	0	0
3	$4 \cdot 10^7$	-0.8	$-3.2 \cdot 10^7$
4	$3.536 \cdot 10^7$	$\sqrt{2}/2$	$2.5 \cdot 10^7$
5	$5 \cdot 10^7$	0	0
6	$3.536 \cdot 10^7$	$\sqrt{2}/2$	$-2.5 \cdot 10^7$

$$U_4^x = 1.0\ m\ ,\ U_4^y = 0:$$

$$\Rightarrow \quad R_4^x = 3.2 \cdot 10^7\ \mathrm{N} \cdot 0.8 + 3.2 \cdot 10^7\ \mathrm{N} \cdot 0.8 + 2.5 \cdot 10^7\ \mathrm{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2.5 \cdot 10^7\ \mathrm{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad R_4^x = 8.656 \cdot 10^7\ \mathrm{N}$$

$$\begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{8.656 \cdot 10^7} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{K_{22}^{ff}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} KN = \begin{bmatrix} 2.31 \\ 0 \end{bmatrix} mm$$

Ράβδος	1	2	3	4	5	6
$\Delta_x = 1.0\ m, S_i\ [\mathrm{N}]$	$3.2 \cdot 10^7$	0	$-3.2 \cdot 10^7$	$2.5 \cdot 10^7$	0	$-2.5 \cdot 10^7$
$\Delta_x = 2.31\ mm,\ S_i\ [KN]$	-73.92	0	-73.92	57.75	0	-57.75