



# Πανεπιστήμιο Κύπρου

## Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Περιβάλλοντος

### ΠΠΜ 221: Ανάλυση Κατασκευών με Μητρώα

Ακαδημαϊκό Έτος 2022–23, Εαρινό Εξάμηνο

#### Ανάπτυξη Προγράμματος Ανάλυσης Επίπεδων Δικτυωμάτων

Ζητείται όπως προγραμματίσετε, χρησιμοποιώντας το *Matlab*, τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας για επίπεδα δικτύωματα. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να είναι γενικά γραμμένο και να διαβάζει ένα αρχείο δεδομένων βάσει συγκεκριμένου τρόπου παροχής των δεδομένων, όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Εφόσον μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε δίκτυωμα, δίνοντας του τα δεδομένα για το συγκεκριμένο δίκτυωμα θα πρέπει να μπορεί να υπολογίσει τα ζητούμενα, όπως και για κάθε άλλο δίκτυωμα.

Συγκεκριμένα, πρέπει να γράψετε σε ένα M-αρχείο τις κατάλληλες εντολές ώστε να φορτώνετε το αρχείο δεδομένο, όπως αυτό θα καθοριστεί από το χρήστη, και να γίνονται οι κατάλληλοι υπολογισμοί ώστε να υπολογίζονται οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων, οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων και οι αντιδράσεις των στηρίξεων.

Θεωρείστε ότι το αρχείο δεδομένων είναι ένα M-αρχείο (π.χ. *truss1.m*) το οποίο περιέχει τους εξής 4 πίνακες:

Πίνακας	Περιγραφή
<b>KOMBOI</b>	Περιέχει σε 3 στήλες τον αριθμό του κάθε κόμβου, τις X και Y συντεταγμένες του
<b>FORTIA</b>	Περιέχει σε 3 στήλες τον αριθμό του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται, το μέγεθος του φορτίου, και την κατεύθυνση (η οποία μπορεί να είναι 1 ή 2 και αντιστοιχεί στη X και Y διεύθυνση)
<b>STHRIKSEIS</b>	Περιέχει σε 3 στήλες τον αριθμό του αντίστοιχου κόμβου, την κατεύθυνση (η οποία μπορεί να είναι 1 ή 2 και αντιστοιχεί στη X και Y διεύθυνση) και τη δεδομένη μετακίνηση (η οποία συνήθως είναι μηδενική)
<b>MELH</b>	Για κάθε μέλος υπάρχει μία γραμμή η οποία περιέχει σε 5 στήλες τον αριθμό του μέλους, τους αριθμούς των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j), το μέτρο ελαστικότητας και την επιφάνεια της διατομής του μέλους

Ορίστε το αρχείο δεδομένων, παρομοίως με το πιο κάτω παράδειγμα:

```

truss1.m

%=====
%          NODES INFORMATION
%=====

% KOMBOI (node,x(n),Y(n)) : Nodal coordinates table

% FORTIA (node, magnitude, 1/2=X/Y direction) : Nodal loads table

% STHRIKSEIS = [node, 1/2=X/Y direction, prescribed displacements)

% NODAL COORDINATES
KOMBOI = [
% NODE      X-COORD  Y-COORD
%  n        X(n)    Y(n)
  1         0.0     0.0
  2         0.0     3.0
  3         4.0     3.0
  4         4.0     0.0
  5         8.0     3.0
  6         8.0     0.0 ];

FORTIA = [
% NODE      LOAD      DIRECTION
%  n        (magnitude) (1:X/2:Y)
  2        -20000      1
  3        -10000      2
  5         20000      1 ];

STHRIKSEIS = [
% NODE DIRECTION  PRESCRIBED
%  n   (1:X, 2:Y)  DISPLACEMENT
  1    1           0.0
  1    2           0.0
  6    2           0.0
  6    1           0.0 ];
    
```

```

%=====
%      ELEMENTS INFORMATION
% MELH: Connectivity and properties table
% m: member
% [i]/m(-): start node
% [j]/m(+): end node
% E(m) : Modulus of elasticity
% A(m) : Cross section area
%=====

% MEMBER CONNECTIVITY TABLE
MELH = [
% MEMBER  START-NODE  END-NODE  Elasticity Modulus  Cross Area
% m      [i] / m(-)  [j] / m(+)  E(m)              A(m)
  1       2          1          200e9             0.05
  2       1          4          200e9             0.05
  3       1          3          200e9             0.05
  4       2          4          200e9             0.05
  5       2          3          200e9             0.05
  6       4          3          200e9             0.05
  7       4          6          200e9             0.05
  8       4          5          200e9             0.05
  9       3          6          200e9             0.05
 10      3          5              200e9             0.05
 11      6          5              200e9             0.05 ] ;
    
```

Αφού φορτώσει τους 4 πίνακες το πρόγραμμα σας πρέπει να παρουσιάσει βάσει των δεδομένων τα πιο κάτω στοιχεία:

- τον αριθμό των κόμβων του φορέα
- τον αριθμό των μελών του φορέα
- τον αριθμό των φορτίων
- τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας με συνοριακές συνθήκες στήριξης

π.χ.:

```

3 nodes have been read
3 elements have been read
2 loads have been read
3 supported DOF have been read
--> 3 free DOFs
    
```

Ακολουθως, για το κάθε κόμβο πρέπει να παρουσιάσει τις συντεταγμένες του:

π.χ.:

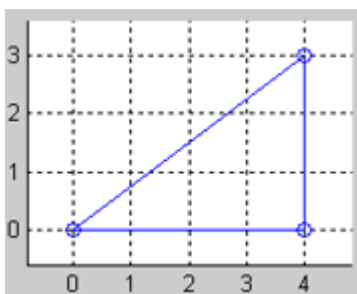
Data for the 3 nodes that have been read:		
Coordinates		
Node	X	Y
1	0.000000	0.000000
2	4.000000	0.000000
3	4.000000	3.000000

Στη συνέχεια, για το κάθε μέλος να παρουσιαστούν οι αριθμοί των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j), το μήκος, την επιφάνεια της διατομής, το μέτρο ελαστικότητας και τα συνημίτονα κατευθύνσεως του μέλους:

π.χ.:

Data for the 3 elements that have been read:								
M	i	j	Length	Area	Elast.Mod.	cos(Q)	sin(Q)	
1	1	2	4.00	0.0010	2.000e+011	1.000	0.000	
2	1	3	5.00	0.0010	2.000e+011	0.800	0.600	
3	2	3	3.00	0.0010	2.000e+011	0.000	1.000	

Επίσης, πρέπει να σχεδιάσετε τους κόμβους και τα μέλη της κατασκευής:



Έχοντας παρουσιάσει τα πιο πάνω στοιχεία, ώστε να βεβαιωθείτε ότι έχετε αποθηκεύσει τα σωστά στοιχεία θα πρέπει να σχηματίσετε το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, από τα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών.

Το υπομητρώο δυσκαμψίας ενός μέλους  $\underline{k}_m^{ii}$ , στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, ισούται με:

$$\underline{k}_m^{ii} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L}$$

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής,  $\underline{K}$ , με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, για το κάθε μέλος πρέπει να προστεθούν τα εξής, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής::

- το μητρώο  $\underline{k}_m^{ii}$  στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής  $i$
- το μητρώο  $\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ii}$  στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής  $i$  και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους  $j$
- το μητρώο  $\underline{k}_m^{ji} = -\underline{k}_m^{ii}$  στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους  $j$  και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής  $i$
- το μητρώο  $\underline{k}_m^{jj} = \underline{k}_m^{ii}$  στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους  $j$

Το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  είναι ιδιάζων (singular), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Με την εφαρμογή κάποιων συνοριακών συνθηκών,  $\mathbf{U}_s$ , ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία,  $\mathbf{R}_f$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, το διάνυσμα των επικόμβιων φορτίων διαχωρίζεται σε 2 υποδιανύσματα, το  $\mathbf{R}_f$ , το οποίο αντιστοιχεί σε όλους τους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας, και το  $\mathbf{R}_s$ , το οποίο αντιστοιχεί σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν σε συνοριακές συνθήκες.

Έτσι, με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες  $\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_s^*$  μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων  $\mathbf{U}_f$ :

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_s^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}_f = \mathbf{K}_{ff} \cdot \mathbf{U}_f + \mathbf{K}_{fs} \cdot \mathbf{U}_s^*$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις στους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις συνοριακές συνθήκες:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{K}_{sf} \cdot \mathbf{U}_f + \mathbf{K}_{ss} \cdot \mathbf{U}_s^*$$

Αφού υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις θα πρέπει να υπολογίσετε και τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών (αξονικές δυνάμεις)

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$

Το πρόγραμμα σας πρέπει να παρουσιάζει το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής,  $\underline{K}$ , τα 4 υπομητρώα στα οποία χωρίζεται, τις άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων, τις αντιδράσεις στις στηρίξεις, και τις αξονικές δυνάμεις του κάθε μέλους.

Παραδείγματος χάριν για το προηγούμενο αρχείο δεδομένων τα αποτελέσματα του προγράμματος σας πρέπει να έχουν την εξής μορφή, σύμφωνα με αυτά που ζητούνται:

**Output:**

```
>> trussAnalysis
Input file:truss1

inputFile = truss1

Reading data from the file: truss1
INPUT STATISTICS
-----
3 nodes have been read
3 elements have been read
2 loads have been read
3 supported DOF have been read
--> 3 free DOFs

Data for the 3 nodes that have been read:
  Coordinates
Node   X     Y
1     0.000000 0.000000
2     4.000000 0.000000
3     4.000000 3.000000

Data for the 3 elements that have been read:
M i j Length Area  Elast.Mod.  cos(Q)  sin(Q)
1 1 2 4.00 0.0010  2.000e+011  1.000  0.000
2 1 3 5.00 0.0010  2.000e+011  0.800  0.600
3 2 3 3.00 0.0010  2.000e+011  0.000  1.000

GLOBAL STIFFNESS MATRIX:  K =  1.0e+007 *

Columns 1 through 4

7.560000000000000  1.920000000000000 -5.000000000000000  0
1.920000000000000  1.440000000000000  0  0
-5.000000000000000  0  5.000000000000000  0
0  0  0  6.666666666666667
-2.560000000000000 -1.920000000000000  0  0
-1.920000000000000 -1.440000000000000  0 -6.666666666666667

Columns 5 through 6

-2.560000000000000 -1.920000000000000
-1.920000000000000 -1.440000000000000
0  0
0 -6.666666666666667
2.560000000000000  1.920000000000000
1.920000000000000  8.106666666666667
```

Supported degrees of freedom:

DOF	Prescribed displacements
3	0.000000
4	0.000000
5	0.000000

Free degrees of freedom:

1  
2  
6

Sumbatrix Kff =

1.0e+007 \*

7.560000000000000	1.920000000000000	-1.920000000000000
1.920000000000000	1.440000000000000	-1.440000000000000
-1.920000000000000	-1.440000000000000	8.106666666666667

Sumbatrix Kfs =

1.0e+007 \*

-5.000000000000000	0	-2.560000000000000
0	0	-1.920000000000000
0	-6.666666666666667	1.920000000000000

Sumbatrix Ksf =

1.0e+007 \*

-5.000000000000000	0	0
0	0	-6.666666666666667
-2.560000000000000	-1.920000000000000	1.920000000000000

Sumbatrix Kss =

1.0e+007 \*

5.000000000000000	0	0
0	6.666666666666667	0
0	0	2.560000000000000

Nodal loads:

DOF	Load
1	10000.000000
2	-15000.000000
6	0.000000

Computed nodal displacements:

DOF	displacement
1	0.000600
2	-0.002067
6	-0.000225

```
Computed reaction forces:  
DOF Force  
3 -30000.000000  
4 15000.000000  
5 20000.000000  
  
Computed axial member forces:  
Member Forces  
Start-node End-node  
1 30000.000000 -30000.000000  
2 -25000.000000 25000.000000  
3 15000.000000 -15000.000000  
  
Program terminates normally....
```

### **Σημειώσεις:**

Η πιο πάνω εκτέλεση αφορά το συγκεκριμένο παράδειγμα. Το πρόγραμμα σας πρέπει να μπορεί να επιλύσει οποιοδήποτε επίπεδο δικτύωμα με αντίστοιχο αρχείο δεδομένων.

Πρέπει να εξηγείται με λεπτομέρεια οτιδήποτε κάνετε στο M-file του Matlab με **σαφή και λεπτομερή σχόλια**, με τα οποία θα μπορεί κάποιος τρίτος να καταλαβαίνει τι μεταβλητές χρησιμοποιείται, γιατί τις χρησιμοποιείται, τι κάνετε στο κάθε τμήμα του προγράμματός πως το κάνετε, και ποιος είναι ο στόχος σας.

Αφού ολοκληρώσετε το πρόγραμμα σας **επιλέξτε τουλάχιστο 3 απλά επίπεδα δικτύωμα και επιλύστε τα τόσο με το πρόγραμμα που έχετε αναπτύξει όσο και με το GTStrudl και συγκρίνετε τα αποτελέσματα τους.**