

8. Μέθοδοι δυσκαμψίας (μετακινήσεων) για την ανάλυση πλαισιακών κατασκευών

Εαρινό εξάμηνο 2023

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>

Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

- *μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας*
 - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι δυνάμεις και ροπές
- *μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας*
 - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι μετακινήσεις

- **Ανάλυση δοκών και πλαισίων με τη μέθοδο δυσκαμψίας**
 - Μητρώα δυσκαμψίας δοκών
 - 2x2 στροφικό μητρώο δυσκαμψίας καμπτόμενης δοκού
 - 4x4 μητρώο δυσκαμψίας δοκού στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
 - 6x6 μητρώο δυσκαμψίας δοκού στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
 - Μετασχηματισμοί μητρώων δυσκαμψίας δοκών
 - Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας σε δοκούς και πλαίσια
 - Μη επικόμβια φορτία
 - Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας
 - Επίλυση δράσεων καταναγκασμών με τη μέθοδο δυσκαμψίας
 - Προγραμματισμός άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας για πλαίσια

Μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας

- βασίζεται στα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής βάσει των οποίων σχηματίζεται το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας K της κατασκευής
- οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι οι μετακινήσεις των ελεύθερων κόμβων της κατασκευής
 - επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων το οποίο σχηματίζεται, υπολογίζονται οι μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας των κόμβων της κατασκευής
 - ακολούθως, χρησιμοποιώντας τα επιμέρους μητρώα δυσκαμψίας του κάθε μέλους, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του κάθε μέλους
- χρήσιμη για επιλύσεις γενικών προβλημάτων με Η/Υ
- εύκολη αυτοματοποίηση και προγραμματισμός της μεθόδου

Βάσεις μεθόδου δυσκαμψίας

- εξισώσεις ισορροπίας
- καταστατικό νόμο του υλικού
- συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων



$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

⇒ κοινός τρόπος ανάλυσης ισοστατικών και υπερστατικών φορέων

Η επίλυση δοκών και πλαισιακών κατασκευών με τη Μέθοδο της Δυσκαμψίας ακολουθεί την ίδια διαδικασία με αυτή των δικτυωμάτων. Απλά, πρέπει να σχηματιστεί το μητρώο δυσκαμψίας της δοκού και το μητρώο μετασχηματισμού το οποίο χρησιμοποιείται για το μετασχηματισμό από το τοπικό στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, ώστε τελικά να μπορέσει να σχηματιστεί, με άμεση επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας του κάθε μέλους, το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής. Αφού εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες, το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται για να υπολογιστούν οι άγνωστες μετακινήσεις. Στη συνέχεια, με υπολογισμένες τις μετακινήσεις των κόμβων μπορεί να υπολογιστεί οποιοδήποτε άλλο μέγεθος μας ενδιαφέρει.

Οι ράβδοι δικτυωμάτων μπορούν να φέρουν μόνο αξονικές δυνάμεις, τα φορτία που φέρουν τα δικτυώματα μπορούν να εφαρμοσθούν μόνο επικόμβια και οι εξισώσεις ισορροπίας ενός κόμβου δικτυώματος αναφέρονται μόνο σε δυνάμεις και τις αντίστοιχες μεταθέσεις. Σε αντίθεση, δοκοί και πλαίσια μπορούν γενικά να φέρουν αξονικές και τέμνουσες δυνάμεις, καμπτικές ροπές αλλά και ροπές στρέψης. Στο επίπεδο οι εξισώσεις ισορροπίας είναι τρεις, για τις δύο δυνάμεις και την καμπτική ροπή, ενώ στο χώρο οι εξισώσεις ισορροπίας είναι έξι, για τις τρεις δυνάμεις και τις τρεις ροπές.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν να αγνοηθούν κάποιες παραμορφώσεις και μετακινήσεις, θεωρώντας τις αμελητέες, ώστε να διευκολυνθούν οι απαιτούμενοι υπολογισμοί. Συχνά, η συνεισφορά των αξονικών παραμορφώσεων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για την ανάλυση συνήθων δοκών χωρίς σημαντικά αξονικά φορτία, αφού η συμπεριφορά της δοκού είναι κυρίως καμπτική και παράληψη των αξονικών παραμορφώσεων δεν προκαλεί παρά ασήμαντες διαφορές, όπως θα δούμε, στα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τη Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας μπορεί να σχηματιστεί άμεσα το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής \underline{K} , με επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της, λαμβάνοντας υπόψη τον καταστατικό νόμο του υλικού, εφόσον αυτός χρησιμοποιείται στο σχηματισμό των επιμέρους μητρώων δυσκαμψίας των μελών της κατασκευής και της συμβιβαστότητας των μετακινήσεων, η οποία εξασφαλίζεται με την αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και των κόμβων.

Το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, \underline{K} εκφράζει τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής, συνδέοντας τις μετακινήσεις \underline{U} των βαθμών ελευθερίας με τις αντίστοιχες επικόμβιες δυνάμεις ή ροπές \underline{R} .

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Το κάθε στοιχείο K_{ij} , του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής \underline{K} , ισούται με την επικόμβια δύναμη ή ροπή, η οποία ασκείται στο βαθμό ελευθερίας i , ώστε να υπάρχει μοναδιαία μετακίνηση στο βαθμό ελευθερίας j ενώ οι μετακινήσεις όλων των άλλων βαθμών ελευθερίας να είναι μηδενικές.

Γενική περιγραφή μεθόδου

- καθορισμός σχέσεων εντατικών μεγεθών και των αντίστοιχων μετακινήσεων των μελών ενός φορέα, βάσει των μητρώων δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής
- κατάλληλοι μετασχηματισμοί από τοπικό σε απόλυτο σύστημα συντεταγμένων
- εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας στους κόμβους
- σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής
- εφαρμογή συνοριακών συνθηκών
- επίλυση σχηματιζόμενου συστήματος εξισώσεων
 - ⇒ υπολογισμός μετακινήσεων ελεύθερων κόμβων κατασκευής
 - ⇒ υπολογισμός αντιδράσεων στις στηρίξεις
 - ⇒ υπολογισμός εντατικών μεγεθών στα άκρα του κάθε μέλους

Μητρώα δυσκαμψίας δοκών

Το μητρώο δυσκαμψίας μιας δοκού μπορεί, ανάλογα με τις παραδοχές και τις συγκεκριμένες συνθήκες, να εκφρασθεί συναρτήσει διαφορετικών μετακινήσεων όπως θα δούμε πιο κάτω. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου μπορεί να γίνει παραδοχή μηδενικών ή ασήμαντων μεταθέσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα στροφικό μητρώο, το οποίο συμπεριλαμβάνει μόνο τις στροφές των κόμβων. Συχνότερα, χρησιμοποιούνται μητρώα δυσκαμψίας τα οποία συμπεριλαμβάνουν και μεταθέσεις των κόμβων, και σε ορισμένες περιπτώσεις και αξονικές παραμορφώσεις.

• Στροφικό μητρώο ευκαμψίας (2x2) καμπτόμενης δοκού

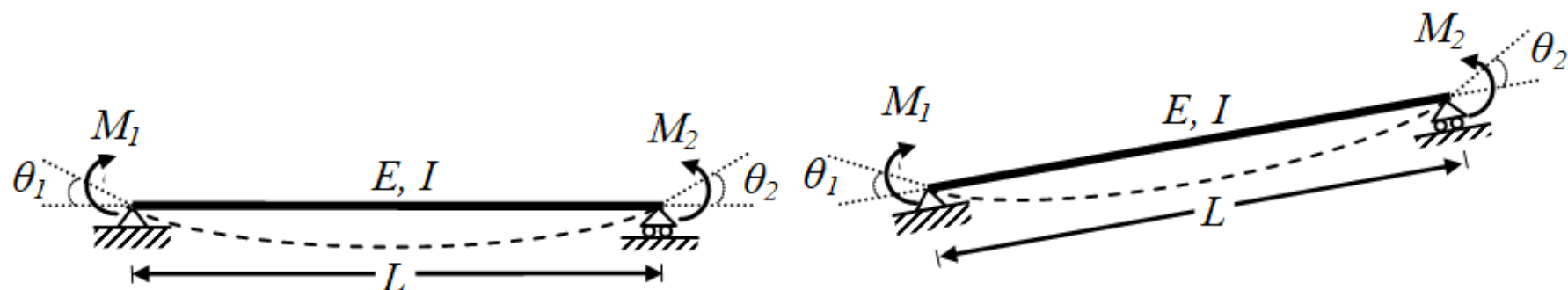
Το στροφικό μητρώο ευκαμψίας μιας καμπτόμενης πρισματικής και ευθύγραμμης δοκού στο επίπεδο έχει ήδη υπολογιστεί στο κεφάλαιο των μεθόδων ευκαμψίας, βάσει των σχετικών στροφών θ_1 και θ_2 των κόμβων στα άκρα της, και έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \\ \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L_i}{6 \cdot E_i \cdot I_i}$$

Το μητρώο ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}_i$ συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 με τις αντίστοιχες ροπές M_1 και M_2 των κόμβων μιας δοκού i , χρησιμοποιώντας ως θετική φορά αυτή στο Σχήμα 10.1.

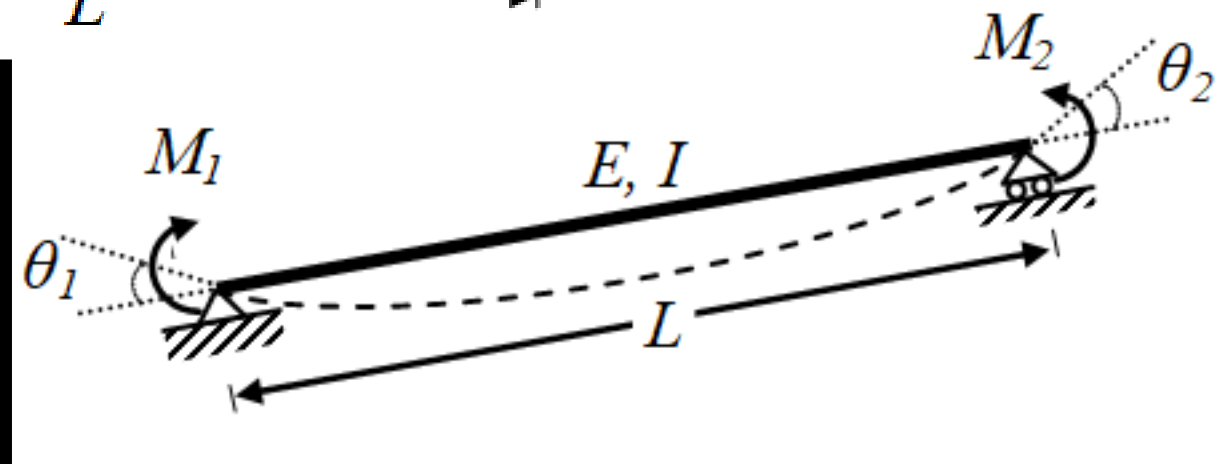
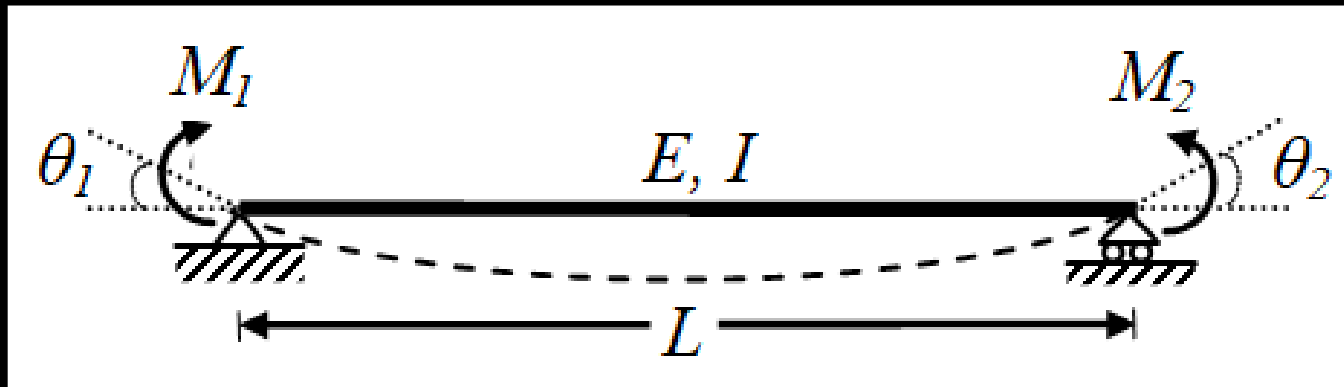
$$\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων του μητρώου ευκαμψίας επιβάλλεται εναλλάξ μοναδιαία η μια ροπή διατηρώντας την άλλη μηδενική, αφού οι αντίστοιχες σχετικές στροφές θ_1 και θ_2 των κόμβων της δοκού, οι οποίες μπορούν να υπολογισθούν εύκολα με την ΑΔΕ, ισούνται με τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης του μητρώου ευκαμψίας (Σχήμα 10.1).

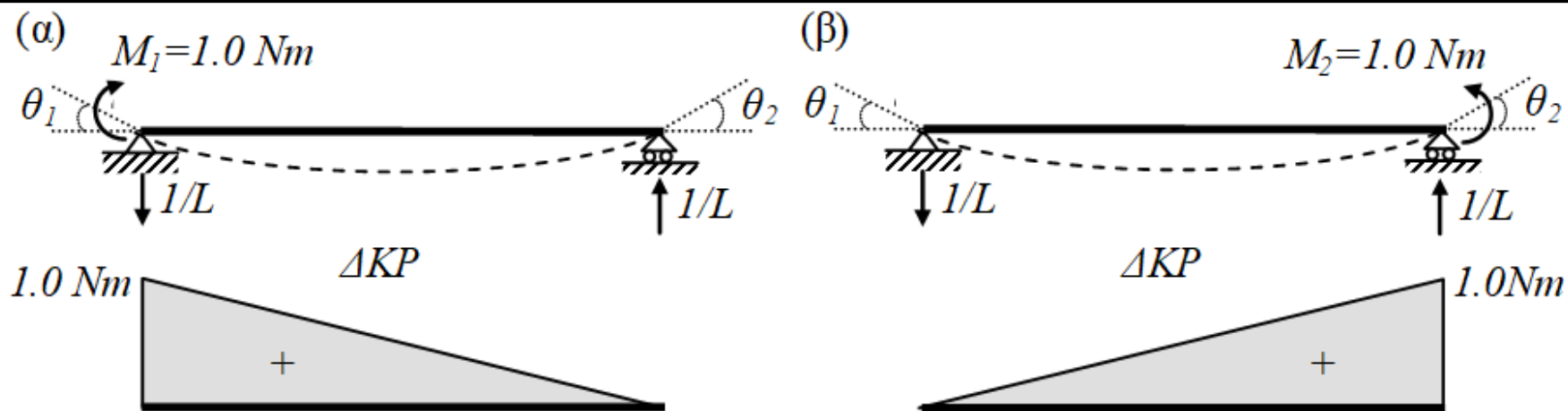


Σχήμα 10.1: Σχετικές στροφές κόμβων επίπεδης δοκού λόγω επιβολής επικόμβιων ροπών.

- Στροφικό μητρώο ευκαμψίας (2x2) καμπτόμενης δοκού



$$\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$



Σχήμα 8.14: Σχετικές στροφές κόμβων επίπεδης δοκού λόγω επιβολής επικόμβιων ροπών: (α) $M_1 = 1.0 \text{ Nm}$, $M_2 = 0$ (β) $M_1 = 0$, $M_2 = 1.0 \text{ Nm}$.

$$M_1 = 1.0 \text{ Nm}, M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} \quad \text{και} \quad \theta_2 = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$M_1 = 0, M_2 = 1.0 \text{ Nm} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \quad \text{και} \quad \theta_2 = \frac{L}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\underline{f}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \\ \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L_i}{6 \cdot E_i \cdot I_i}$$

Αντιστρόφως, το στροφικό μητρώο δυσκαμψίας $\underline{\mathcal{K}}_i$, το οποίο συνδέει τα εντατικά μεγέθη \underline{s}_i , δηλαδή τις ροπές M_1 και M_2 , στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις \underline{u}_i , δηλαδή τις σχετικές στροφές θ_1 και θ_2 , θεωρώντας ότι οι μεταθέσεις των κόμβων είναι αμελητέες, έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{s}_i = \underline{\mathcal{K}}_i \cdot \underline{u}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathcal{K}}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i$$

Έτσι, το στροφικό 2×2 μητρώο δυσκαμψίας μιας δοκού i μπορεί να προκύψει από την αντιστροφή του αντίστοιχου μητρώου ευκαμψίας:

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{K}}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_i = \underline{\mathcal{F}}_i^{-1} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{K}}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \frac{6 \cdot E_i \cdot I_i}{L_i} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{6 \cdot E_i \cdot I_i}{(4-1) \cdot L_i} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{K}}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i}$$

Στροφικό μητρώο δυσκαμψίας 2×2 καμπτόμενης δοκού

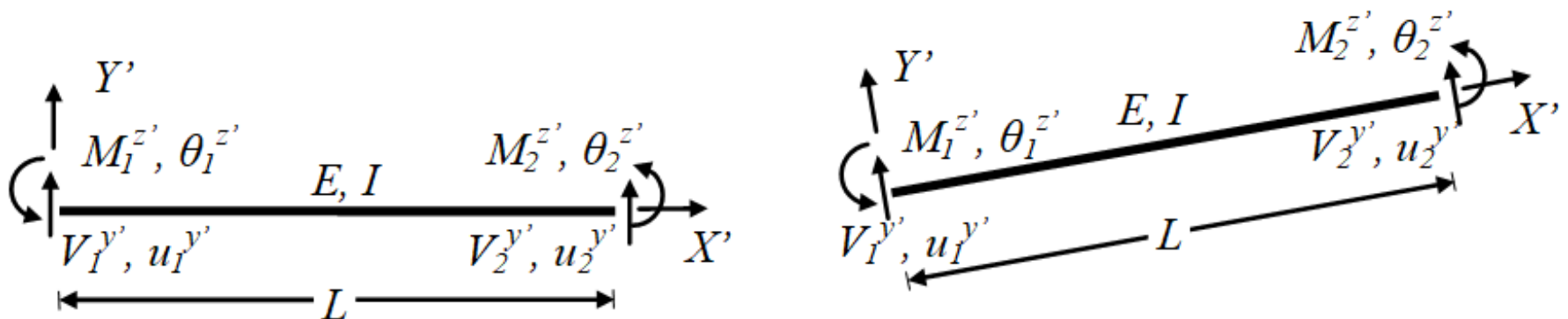
$$\Rightarrow \underline{\mathcal{K}}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i}$$

Αυτό το μητρώο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε περιπτώσεις δοκών και πλαισίων για τα οποία μπορεί να γίνει παραδοχή ότι παρουσιάζουν μόνο στροφές των κόμβων ως βαθμούς ελευθερίας, και ότι οι μεταθέσεις μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές. Όμως μπορεί να αξιοποιηθεί για τον υπολογισμό του 4×4 μητρώου δυσκαμψίας μιας δοκού, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη και οι τέμνουσες δυνάμεις και οι αντίστοιχες εγκάρσιες στον άξονα της δοκού μεταθέσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Μητρώο δυσκαμψίας δοκού στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων

Το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας μιας δοκού συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα της δοκού, οι οποίες πέρα από στροφές συμπεριλαμβάνουν εγκάρσιες στη δοκό μεταθέσεις, με τις αντίστοιχες τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές στα άκρα της δοκού. Οι στροφές μετρούνται βάσει του τοπικού άξονα X' , ενώ στο στροφικό ελατήριο μετρούνται βάσει της χορδής του μέλους.

Τόσο το 2×2 στροφικό μητρώο δυσκαμψίας όσο και το 4×4 , βάσει του τοπικού συστήματος συντεταγμένων, μητρώο δυσκαμψίας περιγράφουν πλήρως την καμπτική συμπεριφορά μιας δοκού και τη μεταβολή της καμπυλότητας. Όμως, το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας περιγράφει και μετακίνηση στερεού σώματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ανάλυση πλαισιακών κατασκευών οι οποίες πέρα από στροφές παρουσιάζουν και μεταθέσεις των κόμβων τους.

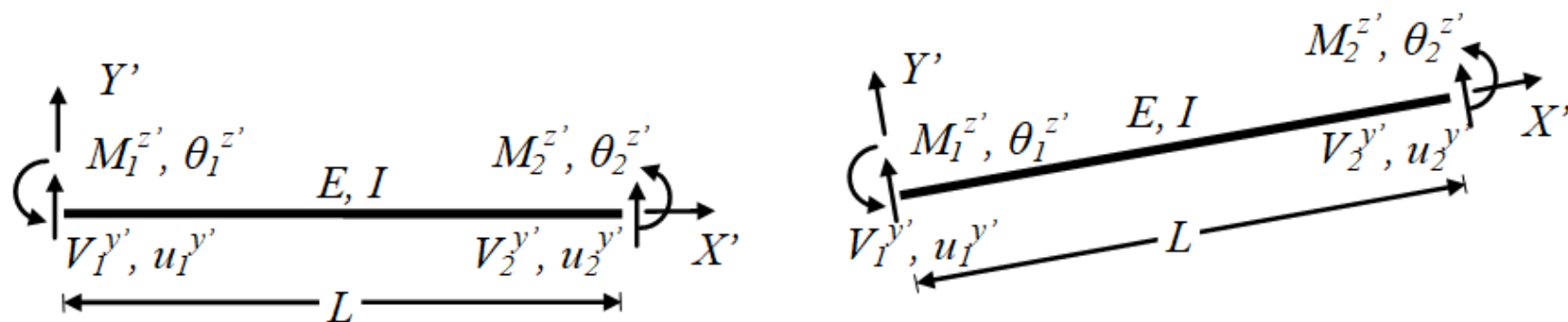


$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$

Το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας μιας δοκού συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα της δοκού, οι οποίες πέρα από στροφές συμπεριλαμβάνουν εγκάρσιες στη δοκό μεταθέσεις, με τις αντίστοιχες τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές στα άκρα της δοκού. Οι στροφές μετρούνται βάσει του τοπικού άξονα X' , ενώ στο στροφικό ελατήριο μετρούνται βάσει της χορδής του μέλους.

Τόσο το 2×2 στροφικό μητρώο δυσκαμψίας όσο και το 4×4 , βάσει του τοπικού συστήματος συντεταγμένων, μητρώο δυσκαμψίας περιγράφουν πλήρως την καμπτική συμπεριφορά μιας δοκού και τη μεταβολή της καμπυλότητας. Όμως, το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας περιγράφει και μετακίνηση στερεού σώματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ανάλυση πλαισιακών κατασκευών οι οποίες πέρα από στροφές παρουσιάζουν και μεταθέσεις των κόμβων τους.

Τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας μπορούν να υπολογιστούν θέτοντας μοναδιαία μια από τις μετακινήσεις διαδοχικά και διατηρώντας τις υπόλοιπες μηδενικές. Οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους και μεθόδους.



Σχήμα 10.2: Μετακινήσεις και εντατικά μεγέθη κόμβων επίπεδης καμπτόμενης δοκού.

$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$

Έχοντας υπολογίσει το στροφικό 2×2 μητρώο δυσκαμψίας, μπορούμε, πιο εύκολα, να υπολογίσουμε το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας βάσει του στροφικού μητρώου δυσκαμψίας, γνωρίζοντας ότι οι ροπές και οι σχετικές στροφές μιας καμπτόμενης δοκού συνδέονται με το στροφικό μητρώο δυσκαμψίας ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i$$

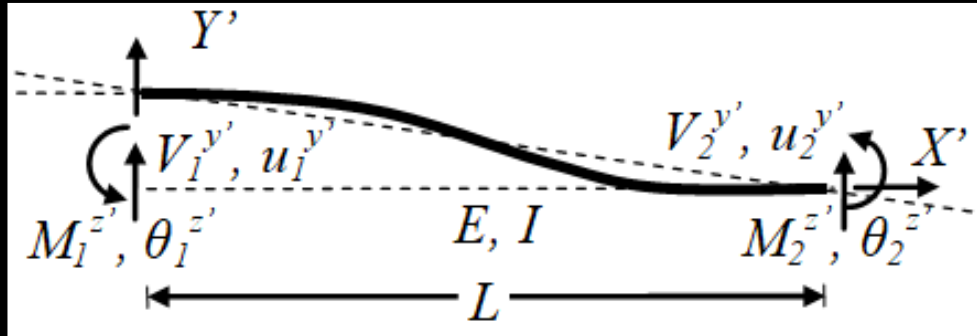
Αυτό που πρέπει να προσέξουμε, είναι ότι το μητρώο δυσκαμψίας σχηματίζεται θεωρώντας ως θετικές μετακινήσεις και εντατικά μεγέθη κόμβων καμπτόμενης δοκού αυτές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 10.2 ενώ οι ροπές M_1 και M_2 που υπολογίζονται από το στροφικό μητρώο δυσκαμψίας έχουν ως θετική φορά αυτή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.1. Με βάση τα πιο πάνω ισχύει ότι:

$$M_1^{z'} = -M_1 \quad \text{και} \quad M_2^{z'} = M_2$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$

$$u_1^{y'} = 1.0$$

Εύρεση 1ης στήλης

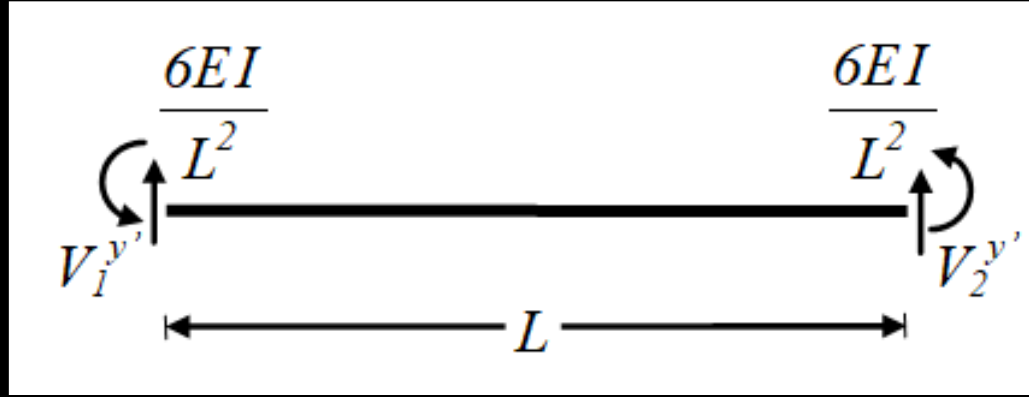


$$\theta_1 = -\frac{1}{L}, \theta_2 = \frac{1}{L}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i$$

$$\Rightarrow M_1 = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} = -M_1^{z'}$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} = M_2^{z'}$$



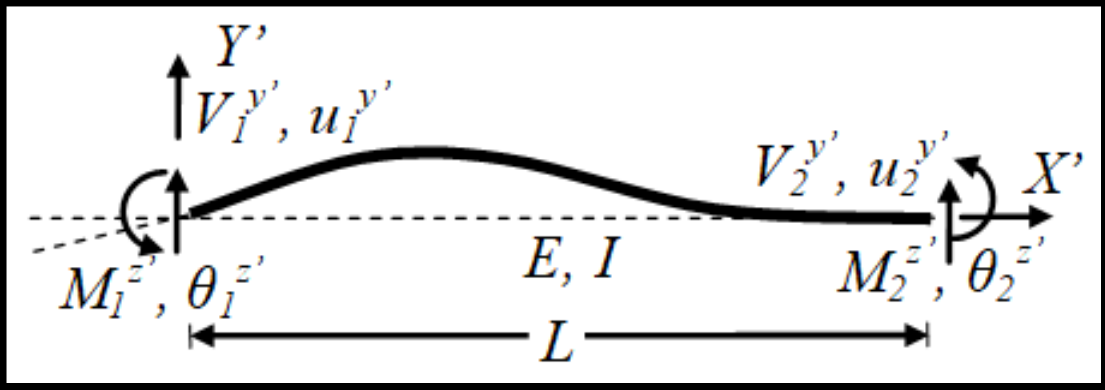
$$V_1^{y'} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$V_2^{y'} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\theta_1^{z'} = 1.0$$

Εύρεση 2ης στήλης



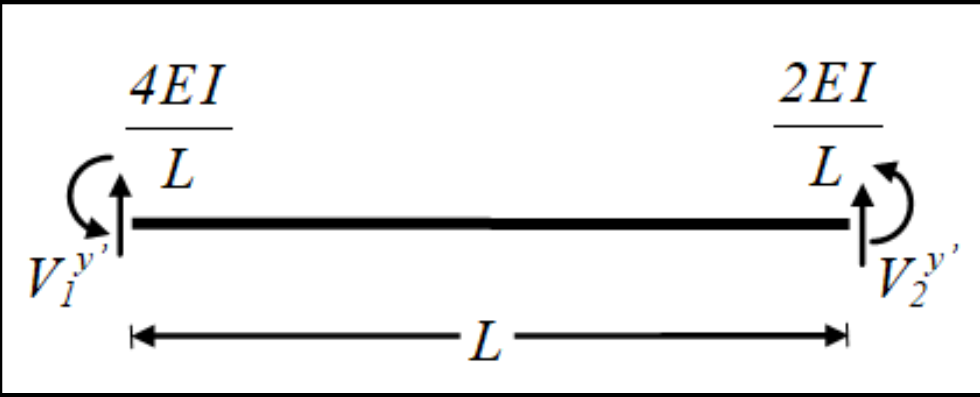
$$\theta_1 = -1.0$$

$$\theta_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i$$

$$M_1 = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = -M_1^{z'}$$

$$M_2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = M_2^{z'}$$



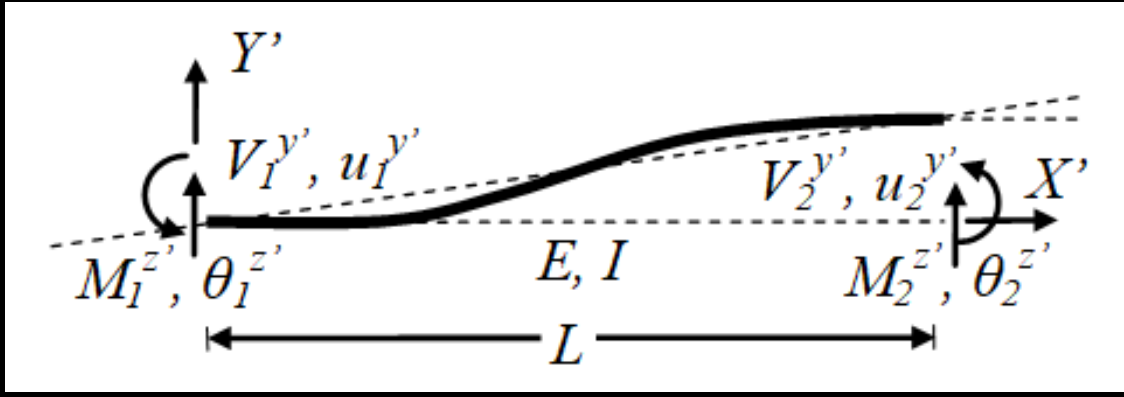
$$V_1^{y'} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$V_2^{y'} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

$$u_2^{y'} = 1.0$$

Εύρεση 3ης στήλης



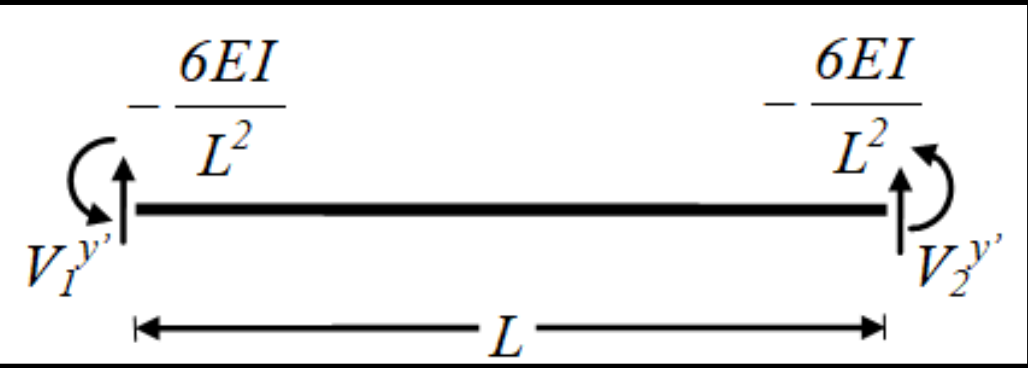
$$\theta_1 = \frac{1}{L}$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{L}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i$$

$$M_1 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} = -M_1^{z'}$$

$$M_2 = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} = M_2^{z'}$$



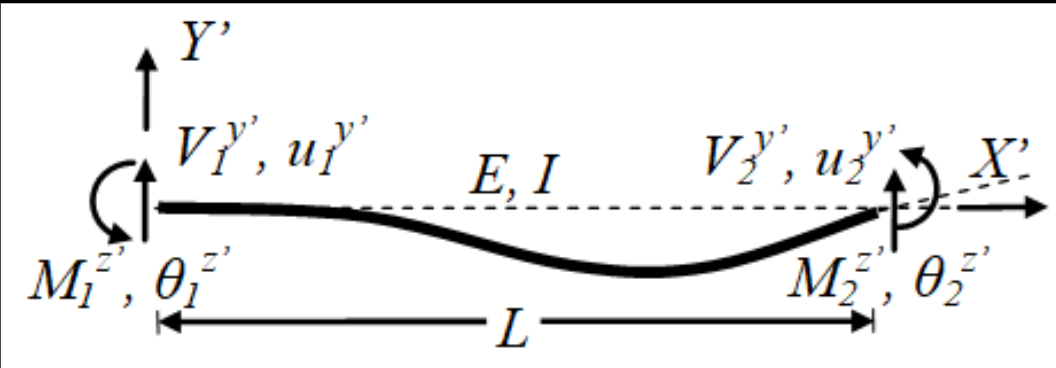
$$V_1^{y'} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$V_2^{y'} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^{z'} = 1.0$$

Εύρεση 4ης στήλης



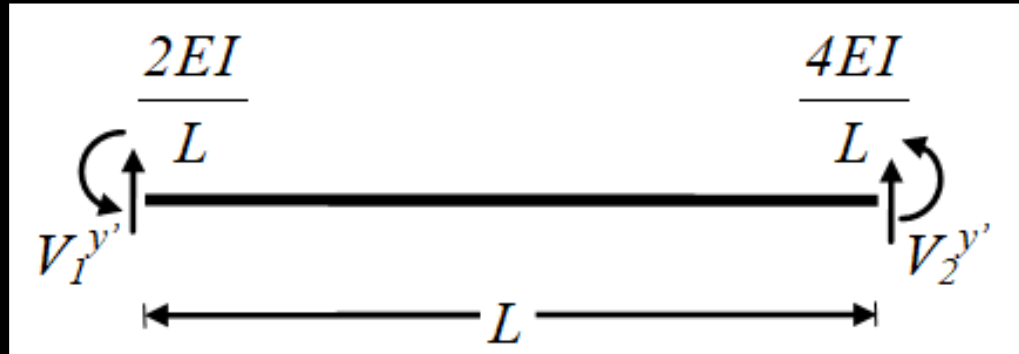
$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = 1.0$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i$$

$$M_1 = -\frac{2 \cdot E \cdot I}{L} = -M_1^{z'}$$

$$M_2 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = M_2^{z'}$$



$$V_1^{y'} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$V_2^{y'} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

Έτσι, σχηματίζεται το 4×4 μητρώο δυσκαμψίας μιας επίπεδης, ευθύγραμμης δοκού μήκους L , σταθερής διατομής με ροπή αδρανείας I , και μέτρο ελαστικότητας E , το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα της με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη:

$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$

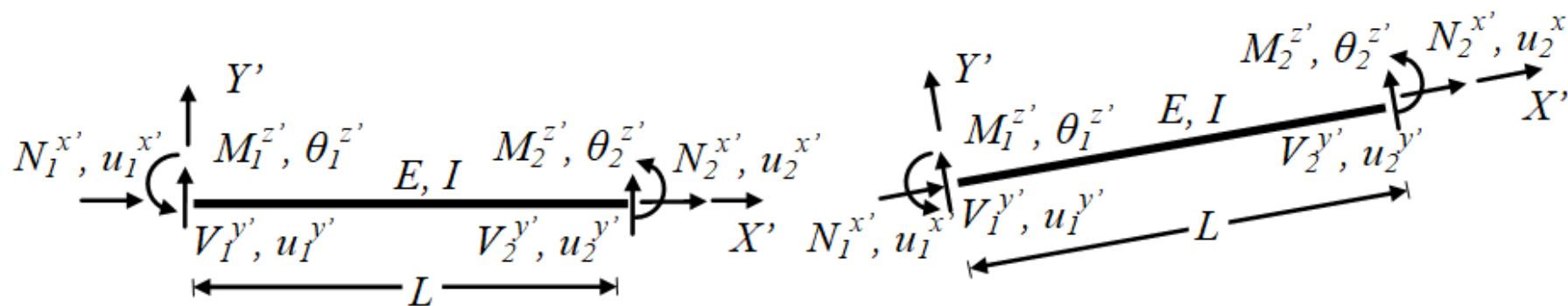
Το μητρώο αυτό έχει σχηματιστεί σύμφωνα με την προσήμανση η οποία έχει χρησιμοποιηθεί εδώ, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις. Αν χρησιμοποιηθεί διαφορετική προσήμανση για τα εντατικά μεγέθη και τις αντίστοιχες μετακινήσεις, τότε τα πρόσημα των στοιχείων του μητρώου δυσκαμψίας θα είναι διαφορετικά.

Συμπερίληψη αξονικών δυνάμεων

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι χρήσιμο να συμπεριληφθούν και οι αξονικές, πέρα από τις καμπτικές, παραμορφώσεις, μιας δοκού. Συμπεριλαμβάνοντας τις αξονικές παραμορφώσεις, μια δοκός έχει 3 βαθμούς ελευθερίας στον κάθε κόμβο της (Σχήμα 10.7) και συνεπώς το μητρώο δυσκαμψίας έχει διαστάσεις 6×6 .

Το μητρώο δυσκαμψίας ενός μέλους το οποίο υπόκειται σε αξονικές δυνάμεις στα άκρα του και αξονικές παραμορφώσεις έχει ήδη προσδιορισθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ανάλυση ράβδων δικτυώματος και έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{L} & -\frac{A \cdot E}{L} \\ -\frac{A \cdot E}{L} & \frac{A \cdot E}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 10.7: Μετακινήσεις και εντατικά μεγέθη κόμβων επίπεδης δοκού συμπεριλαμβάνοντας καμπτικές και αξονικές παραμορφώσεις.

Χρησιμοποιώντας την ίδια προσήμανση των αξονικών δυνάμεων (Σχήμα 10.7) και συμπεριλαμβάνοντας τις αξονικές δυνάμεις και παραμορφώσεις, το 6×6 μητρώο δυσκαμψίας \underline{k}'_m μιας δοκού m παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_1^{rz'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \\ S_2^{rz'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 & -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 & \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_m$$

6x6 μητρώο δυσκαμψίας δοκού στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων

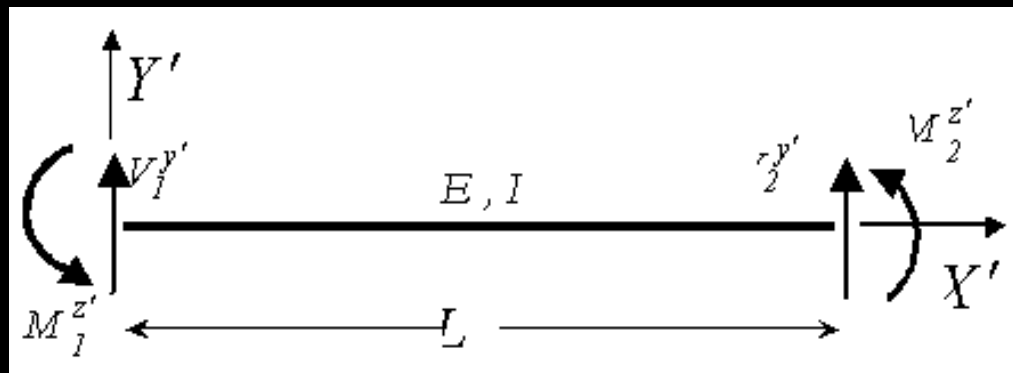
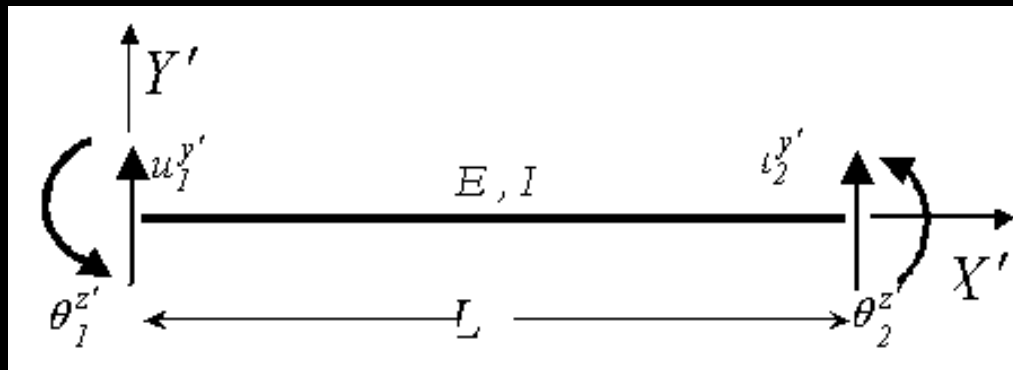
$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_1^{rz'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \\ S_2^{rz'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 & -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 & \frac{A \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_m$$

\underline{k}'_m : είναι το μητρώο δυσκαμψίας μιας δοκού στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο εκφράζει τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της δοκού \underline{s}'_m συναρτήσει των μετακινήσεων στα άκρα της \underline{u}'_m , χρησιμοποιώντας το τοπικό σύστημα συντεταγμένων που έχει ορισθεί.

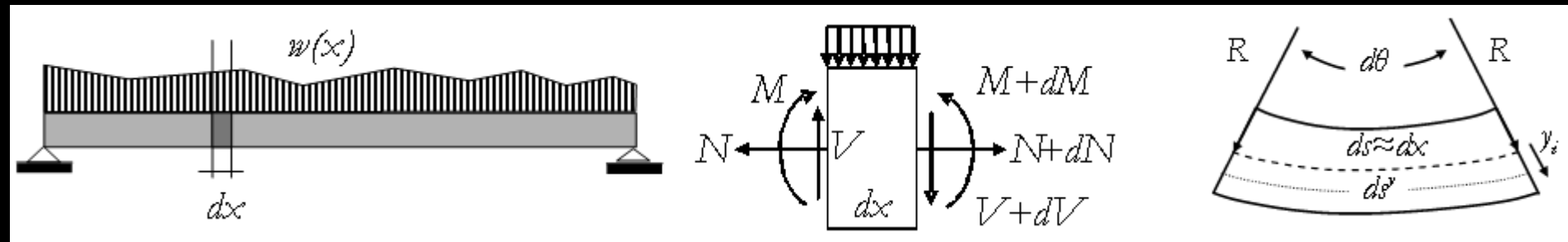
$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$

Συναρτήσεις μορφών καμπτικής παραμόρφωσης δοκών

Ένας εναλλακτικός τρόπος σχηματισμού του μητρώου δυσκαμψίας μιας δοκού βασίζεται στις δυνατές μορφές παραμόρφωσης της βάσει των βαθμών ελευθερίας (BE) στα άκρα της. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση μιας δοκού μπορούμε να προσδιορίσουμε τις μορφές παραμόρφωσης, σαν συναρτήσεις μορφής (*shape functions*), με δεδομένες τις μετακινήσεις των άκρων της.



$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$



$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = -w_y(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$$



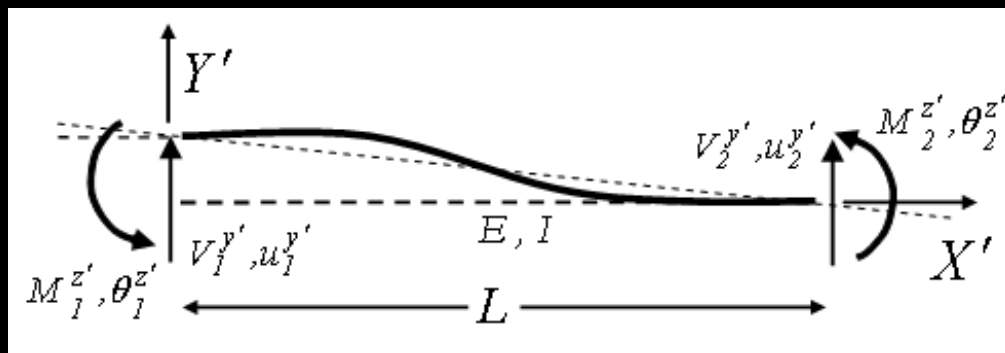
$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = -\frac{w_y(x)}{EI_z}$$

Για δοκούς χωρίς οποιοδήποτε φορτίο η ΔΕ ισούται με: $\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0$

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0$$



$$y(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$



$$u_1^{y'} = y_1(0) = 1.0 \Rightarrow y_1(0) = C_4 = 1.0$$

$$\theta_1^{z'} = \frac{dy_1}{dx}(0) = 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx}(0) = C_3 = 0$$

$$u_2^{y'} = y_1(L) = 0 \Rightarrow y_1(L) = C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} + 1.0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 L^3 + 3C_2 L^2 + 6 = 0$$

$$u_2^y = y_1(L) = 0 \Rightarrow y_1(L) = C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + 1.0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 L^3 + 3C_2 L^2 + 6 = 0$$

$$\theta_2^x = \frac{dy_1}{dx}(L) = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx}(L) = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{2C_2}{L}$$

$$\left(-\frac{2C_2}{L}\right)L^2 + 3C_2 L^2 + 6 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{6}{L^2}, \quad C_1 = \frac{12}{L^3}$$

$$y_1(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$\rightarrow y_1(x) = \left(\frac{12}{L^3}\right) \frac{x^3}{6} + \left(-\frac{6}{L^2}\right) \frac{x^2}{2} + 1.0 = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1.0$$

Αν αντί $u_7^y = 1.0$ επιβάλουμε μια άλλη μετακίνηση u_7^y διατηρώντας τις υπόλοιπες μετακινήσεις μηδενικές τότε η ελαστική γραμμή $y(x)$, βάσει της Αρχής της Επαλληλίας θα ισούται με:

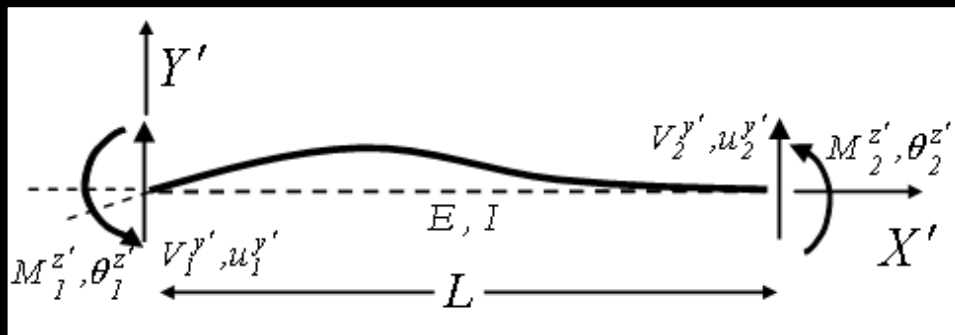
$$y_7(x) = \left[2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right] \cdot u_7^y$$

Το πολυώνυμο το οποίο προέκυψε το ονομάζουμε $N_7(x)$ και δίνει την ελαστική γραμμή λόγω μοναδιαίας μετακίνησης u_7^y , στον 1^ο βαθμό ελευθερίας (BE):

$$N_7(x) = 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1$$



$$y_7(x) = N_7(x) \cdot u_7^y$$



$$u_1^{y'} = y_2(0) = 0 \Rightarrow y_2(0) = C_4 = 0$$

$$\theta_1^{z'} = \frac{dy_2}{dx}(0) = 1.0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx}(0) = C_3 = 1.0$$

$$u_2^{y'} = y_2(L) = 0 \Rightarrow y_2(L) = C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + L = 0$$

$$\Rightarrow C_1 L^3 + 3C_2 L^2 + 6L = 0$$

$$\theta_2^{z'} = \frac{dy_2}{dx}(L) = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx}(L) = C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + 1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 L^2 + 2C_2 L + 2 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 L^3 + 2C_2 L^2 + 2L = 0$$

$$C_1 L^3 + 3C_2 L^2 + 6L = 0$$

$$C_1 L^3 + 2C_2 L^2 + 2L = 0$$

$$C_2 L + 4L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{4}{L}$$

$$C_1 L^3 + 3\left(-\frac{4}{L}\right)L^2 + 6L = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{6}{L^2}$$

$$y_2(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$y_2(x) = \frac{6}{L^2} \cdot \frac{x^3}{6} + \left(-\frac{4}{L}\right) \frac{x^2}{2} + x = x \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} + 1 \right) = x \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2$$

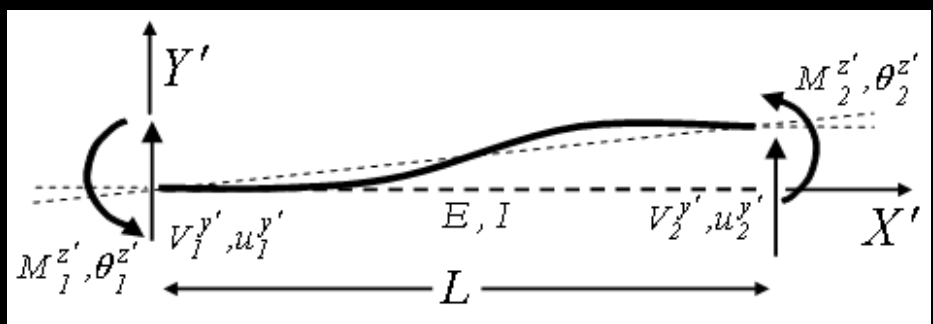
Ονομάζοντας το πολυώνυμο που προέκυψε $N_2(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ελαστική γραμμή για οποιαδήποτε μετακίνηση του 2^{ου} ΒΕ, $\theta_1^{z'}$, βάσει της Αρχής της Επαλληλίας:

$$N_2(x) = x \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2$$

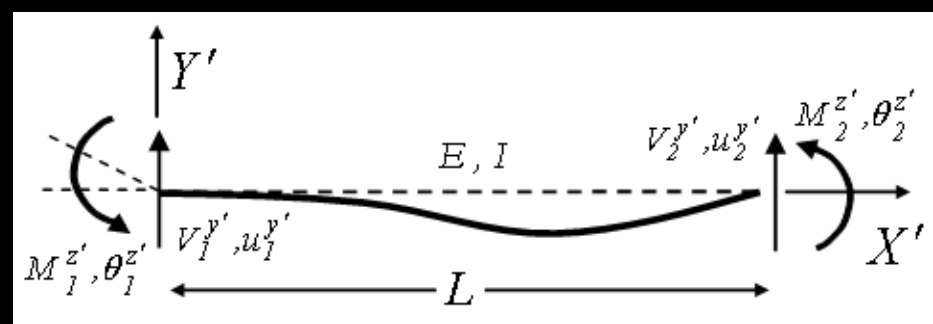


$$y_2(x) = N_2(x) \cdot \theta_1^{z'}$$

Εφαρμόζοντας παρομοίως μοναδιαίες μετακινήσεις για τους άλλους δύο ΒΕ



$$N_3(x) = -2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2$$



$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

$$N_1(x) = 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1$$

$$N_2(x) = x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2$$

$$N_3(x) = -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Έτσι, η ελαστική γραμμή λόγω οποιοδήποτε μετακινήσεων των κόμβων της δοκού μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει αυτών των μετακινήσεων βάσει της Αρχής της Επαλληλίας:

$$y(x) = N_1(x) \cdot u_1^y + N_2(x) \cdot \theta_1^z + N_3(x) \cdot u_2^y + N_4(x) \cdot \theta_2^z$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_i$$

Βάσει της Αρχής των Δυνατών Έργων, και λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις, δηλαδή θεωρώντας αμελητέες τις διατμητικές παραμορφώσεις το κάθε στοιχείο k_{ij} του μητρώου δυσκαμψίας το οποίο δίνει τη δύναμη ή ροπή στο ΒΕ i λόγω μοναδιαίας μετακίνησης του ΒΕ j με όλους τους ΒΕ να είναι μηδενικοί, ισούται με:

$$k_{ij} = \int_0^L M_z^i(x) \frac{M_z^j(x)}{EI} dx$$

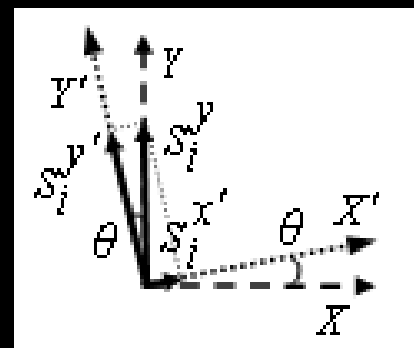
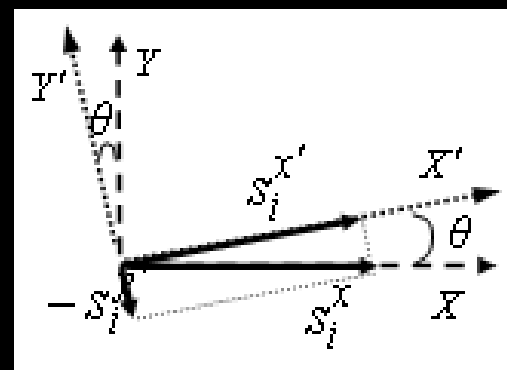
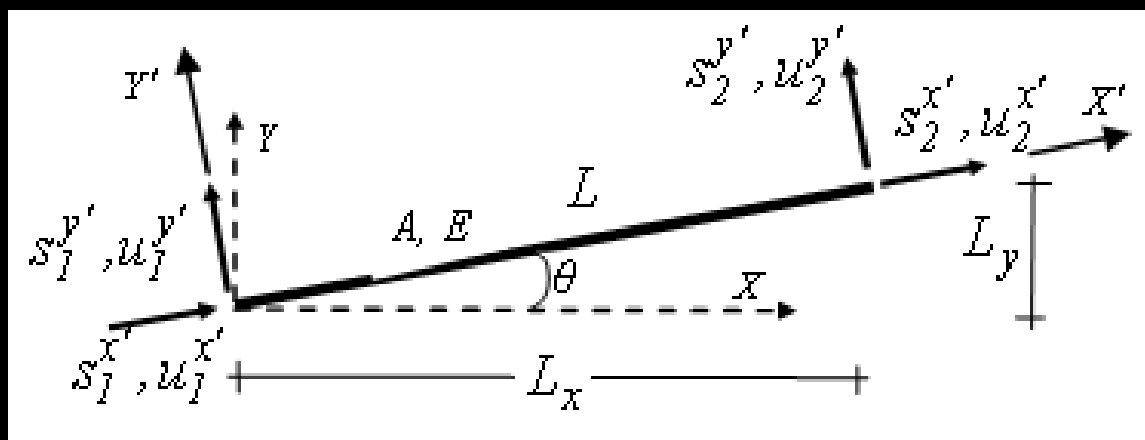
$$k_{ij} = \int_0^L M_x^i(x) \frac{M_x^j(x)}{EI} dx$$

$$\rightarrow k_{ij} = \int_0^L \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j(x)}{\partial x^2} \cdot EI \cdot dx = \int_0^L \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot EI \cdot \frac{\partial^2 N_j(x)}{\partial x^2} dx$$

$$\rightarrow \underline{k}_m' = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 4EI & -\frac{6EI}{L^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI & -\frac{6EI}{L^2} & 4EI \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί μητρώων δυσκαμψίας δοκών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαν προσδιοριστεί τα μητρώα μετασχηματισμού των εντατικών μεγεθών και των μετακινήσεων στα άκρα μιας ράβδου, από το τοπικό στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μετασχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας της δοκού. Η μόνη διαφορά εδώ είναι οι καμπτικές ροπές, οι οποίες όμως δεν επηρεάζονται από μετασχηματισμούς των συστημάτων συντεταγμένων.



$$\underline{S}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{S}_m$$

$$\underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

- Μετασχηματισμοί εντατικών μεγεθών:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} s_1^x \\ s_1^y \\ s_1^{rz} \\ s_2^x \\ s_2^y \\ s_2^{rz} \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} s_1^x \\ s_1^y \\ s_1^{rz} \\ s_2^x \\ s_2^y \\ s_2^{rz} \end{bmatrix}_m$$

- Μετασχηματισμοί μετακινήσεων:

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{rZ'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{rZ'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^{rZ} \\ u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^{rZ} \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^{rZ} \\ u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^{rZ} \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^x \\ s_1^y \\ s_1^{rz} \\ s_2^x \\ s_2^y \\ s_2^{rz} \end{bmatrix}$$



$$\underline{s}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{rz'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{rz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^{rz} \\ u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^{rz} \end{bmatrix}$$



$$\underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

Μητρώο δυσκαμψίας καμπτόμενης δοκού (αμελώντας τις αξονικές παραμορφώσεις)

$$\begin{aligned}\underline{s}'_m &= \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m \\ \underline{u}'_m &= \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m\end{aligned}$$



$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$



$$\underline{T}_m \cdot \underline{s}_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$



$$\underline{s}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$



$$\underline{s}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

$$\underline{T}_m^{-1} = \underline{T}_m^T$$



$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m$$



$$\underline{k}_m = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot s^2}{L^3} & -\frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{12 \cdot s^2}{L^3} & \frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{6 \cdot s}{L^2} \\ -\frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{12 \cdot c^2}{L^3} & \frac{6 \cdot c}{L^2} & \frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{12 \cdot c^2}{L^3} & \frac{6 \cdot c}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{6 \cdot c}{L^2} & 4 & \frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{6 \cdot c}{L^2} & 2 \\ \frac{12 \cdot s^2}{L^3} & \frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{12 \cdot s^2}{L^3} & -\frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{6 \cdot s}{L^2} \\ \frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{12 \cdot c^2}{L^3} & -\frac{6 \cdot c}{L^2} & \frac{12 \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{12 \cdot c^2}{L^3} & -\frac{6 \cdot c}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{6 \cdot c}{L^2} & 2 & \frac{6 \cdot s}{L^2} & -\frac{6 \cdot c}{L^2} & 4 \end{bmatrix} \cdot EI$$

Μητρώο δυσκαμψίας καμπτόμενης δοκού

(συμπεριλαμβάνοντας τις αξονικές παραμορφώσεις)

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_m$$

$$\underline{k}_m = \begin{bmatrix} \frac{AE \cdot c^2}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot s^2}{L^3} & \frac{AE \cdot c \cdot s}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} & -\frac{AE \cdot c^2}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot s^2}{L^3} & -\frac{AE \cdot c \cdot s}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} \\ \frac{AE \cdot c \cdot s}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{AE \cdot s^2}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c^2}{L^3} & \frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & -\frac{AE \cdot c \cdot s}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{AE \cdot s^2}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c^2}{L^3} & \frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} & \frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} & \frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} & -\frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ -\frac{AE \cdot c^2}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot s^2}{L^3} & -\frac{AE \cdot c \cdot s}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{6 \cdot s}{L^2} & \frac{AE \cdot c^2}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot s^2}{L^3} & \frac{AE \cdot c \cdot s}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} \\ -\frac{AE \cdot c \cdot s}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & -\frac{AE \cdot s^2}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c^2}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & \frac{AE \cdot c \cdot s}{L} - \frac{12 \cdot EI \cdot c \cdot s}{L^3} & \frac{AE \cdot s^2}{L} + \frac{12 \cdot EI \cdot c^2}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} & \frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} & \frac{6 \cdot EI \cdot s}{L^2} & -\frac{6 \cdot EI \cdot c}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix}$$

Σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας κατασκευής

Αφού σχηματιστεί, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε μέλους m , το οποίο είναι συμμετρικό, μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερα, 3×3 σε αυτή την περίπτωση, υπομητρώα τα οποία αντιστοιχούν στους κόμβους αρχής i και τέλους j , μπορούν εύκολα να προστεθούν στις γραμμές και στήλες των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας, σχηματίζοντας, με άμεση επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας όλων των μελών, το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής \underline{K} :

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii} & \underline{K}_{ij} \\ \underline{K}_{ji} & \underline{K}_{jj} \end{bmatrix}$$

Συγκεκριμένα, στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων i και j θα πρέπει να προστεθούν τα υπομητρώα \underline{K}_{ii} και \underline{K}_{jj} , αντίστοιχα. Στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου i και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου j θα πρέπει να προστεθεί το υπομητρώο \underline{K}_{ij} . Αντίστοιχα, στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου j και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου i θα πρέπει να προστεθεί το υπομητρώο \underline{K}_{ji} .

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Είναι σημαντικό η αρίθμηση των κόμβων να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το ημιεύρος h_b (*half bandwidth*) του μητρώου δυσκαμψίας, το οποίο ορίζεται ως ο αριθμός των στοιχείων από τη διαγώνιο του μητρώου πέραν από τα οποία όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά. Για τη γενική περίπτωση ενός χωρικού φορέα με 6 ΒΕ σε κάθε κόμβο: $h_b = (\Delta_{max} + 1) \cdot 6$ όπου: Δ_{max} είναι η μέγιστη διαφορά στην αρίθμηση των δύο κόμβων οποιουδήποτε μέλους. Ελαχιστοποιώντας το ημιεύρος h_b , μειώνεται αντίστοιχα η απαιτούμενη μνήμη για τη αποθήκευση του μητρώου δυσκαμψίας, αφού υπάρχουν τρόποι να μην αποθηκεύονται τα εκτός ημιεύρους μηδενικά. Συγκεκριμένα, υπάρχουν αλγόριθμοί που αποθηκεύουν με βέλτιστο τρόπο μόνο τα στοιχεία εντός του ημιεύρους, εκμεταλλεύοντας και τη συμμετρία του μητρώου δυσκαμψίας. Επιπλέον, τα σύγχρονα προγράμματα ανάλυσης κάνουν αυτόματη επαναρίθμηση των κόμβων χρησιμοποιώντας κατάλληλους αλγόριθμους για να ελαχιστοποιήσουν το ημιεύρος του μητρώου δυσκαμψίας, άσχετα με την αρίθμηση που όρισε ο χρήστης του προγράμματος.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

Επιβολή συνοριακών συνθηκών και επίλυση

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_s = \underline{U}_s^* \quad \rightarrow \quad \underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^*$$

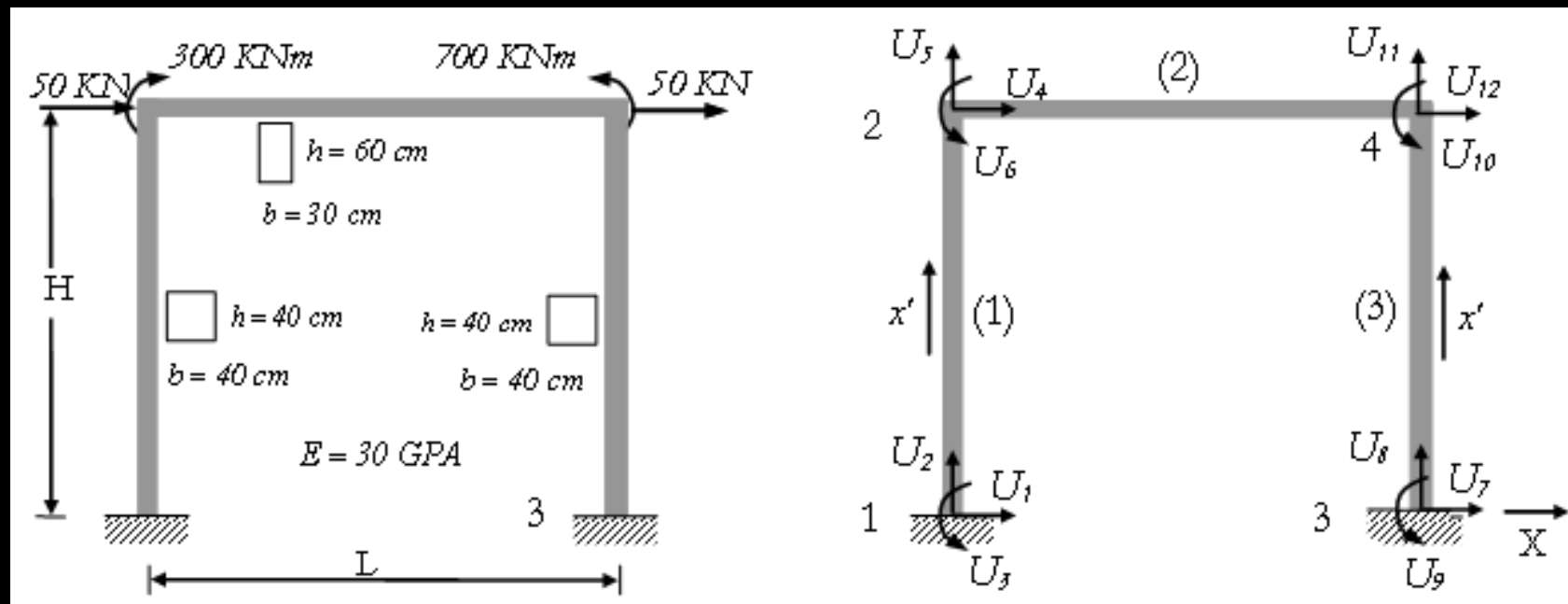
$$\rightarrow \quad \underline{U}_f = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot (\underline{R}_f - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^*) \quad \text{μετακινήσεις κόμβων}$$

$$\rightarrow \quad \underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^* \quad \text{αντιδράσεις στηρίξεων}$$

$$\rightarrow \quad \underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \quad \text{εντατικά μεγέθη}$$

$$\underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

Παράδειγμα-1



Μέλος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	Μήκος, L [m]	Διατομή, A [m ²]	Ροπή αδρανείας, I [m ⁴]	θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
1	1	2	3	0.16	0.002133	90°	0	1
2	2	4	4	0.18	0.00540	0°	1	0
3	3	4	3	0.16	0.002133	90°	0	1

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_1^{yz'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \\ S_2^{yz'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} N_1^{x'} \\ V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ N_2^{x'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix}_m$$



$$K'_1 = K'_3 = \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 & -160 & 0 & 0 \\ 0 & 2.844 & 4.2667 & 0 & -2.844 & 4.2667 \\ 0 & 4.2667 & 8.5333 & 0 & -4.2667 & 4.2667 \\ -160 & 0 & 0 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & -2.844 & -4.2667 & 0 & 2.844 & -4.2667 \\ 0 & 4.2667 & 4.2667 & 0 & -4.2667 & 8.5333 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \quad m$$



$$K'_2 = \begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0375 & 6.0750 & 0 & -3.0375 & 6.0750 \\ 0 & 6.0750 & 16.2 & 0 & -6.0750 & 8.1 \\ -135 & 0 & 0 & 135 & 0 & 0 \\ 0 & -3.0375 & -6.0750 & 0 & 3.0375 & -6.0750 \\ 0 & 6.0750 & 8.1 & 0 & -6.0750 & 16.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \quad m$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{T}_3$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\theta=0^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{k}_1 = \begin{bmatrix} 2.8444 & 0.0000 & -4.2667 & -2.8444 & 0.0000 & -4.2667 \\ 0.0000 & 160.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -160.0000 & 0.0000 \\ -4.2667 & 0.0000 & 8.5333 & 4.2667 & 0.0000 & 4.2667 \\ -2.8444 & 0.0000 & 4.2667 & 2.8444 & 0.0000 & 4.2667 \\ -0.0000 & -160.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 160.0000 & 0.0000 \\ -4.2667 & 0.0000 & 4.2667 & 4.2667 & 0.0000 & 8.5333 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{k}_2 = \begin{bmatrix} 135 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0375 & 6.0750 & 0 & -3.0375 & 6.0750 \\ 0 & 6.0750 & 16.2000 & 0 & -6.0750 & 8.1000 \\ -135 & 0 & 0 & 135 & 0 & 0 \\ 0 & -3.0375 & -6.0750 & 0 & 3.0375 & -6.0750 \\ 0 & 6.0750 & 8.1000 & 0 & -6.0750 & 16.2000 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους 1 προστίθεται στις πρώτες 6 γραμμές και 6 στήλες του 12×12 μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, αφού το μέλος έχει κόμβο αρχής τον 1 και κόμβο τέλους το 2.

Για το μέλος 2, το οποίο έχει κόμβο αρχής το 2 και κόμβο τέλους τον 4:

- τα στοιχεία των πρώτων τριών γραμμών και πρώτων τριών στηλών του μητρώου δυσκαμψίας προστίθεται στις 4, 5, 6 γραμμές και 4, 5, 6 στήλες του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής,
- τα στοιχεία των πρώτων τριών γραμμών και τελευταίων τριών στηλών του μητρώου δυσκαμψίας προστίθεται στις 4, 5, 6 γραμμές και 10, 11, 12 στήλες του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής,
- τα στοιχεία των τελευταίων τριών γραμμών και πρώτων τριών στηλών του μητρώου δυσκαμψίας προστίθεται στις 10, 11, 12 γραμμές και 4, 5, 6 στήλες του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, και
- τα στοιχεία των τελευταίων τριών γραμμών και τελευταίων τριών στηλών του μητρώου δυσκαμψίας προστίθεται στις 10, 11, 12 γραμμές και 10, 11, 12 στήλες του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής.

Το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους 3 προστίθεται στις τελευταίες 6 γραμμές και 6 στήλες του 12×12 μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, αφού το μέλος έχει κόμβο αρχής τον 3 και κόμβο τέλους τον 4.

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 2.844 & 0 & -4.267 & -2.844 & 0 & -4.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 & 0 & -160 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.267 & 0 & 8.533 & 4.267 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.844 & 0 & 4.267 & 137.8 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & -160 & 0 & 0 & 163 & 6.075 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.038 & 6.075 \\ -4.267 & 0 & 4.267 & 4.267 & 6.075 & 24.733 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.075 & 8.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.844 & 0 & -4.267 & -2.844 & 0 & -4.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & 0 & 0 & -160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.267 & 0 & 8.533 & 4.267 & 0 & 4.267 \\ 0 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 & -2.844 & 0 & 4.267 & 137.8 & 0 & 4.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.038 & -6.075 & 0 & -160 & 0 & 0 & 163 & -6.075 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.075 & 8.1 & -4.267 & 0 & 4.267 & 4.267 & -6.075 & 24.7 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$



$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} 50 \text{ KN} \\ 0 \\ -300 \text{ KN m} \\ 50 \text{ KN} \\ 0 \\ 700 \text{ KN m} \end{bmatrix}$$



$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^{rz} \\ u_4^x \\ u_4^y \\ u_4^{rz} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 2.844 & 0 & -4.267 & -2.844 & 0 & -4.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 & 0 & -160 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.267 & 0 & 8.533 & 4.267 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.844 & 0 & 4.267 & 137.8 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & -160 & 0 & 0 & 163 & 6.075 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.038 & 6.075 \\ -4.267 & 0 & 4.267 & 4.267 & 6.075 & 24.733 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.075 & 8.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.844 & 0 & -4.267 & -2.844 & 0 & -4.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & 0 & 0 & -160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.267 & 0 & 8.533 & 4.267 & 0 & 4.267 \\ 0 & 0 & 0 & -135 & 0 & 0 & -2.844 & 0 & 4.267 & 137.8 & 0 & 4.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.038 & -6.075 & 0 & -160 & 0 & 0 & 163 & -6.075 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.075 & 8.1 & -4.267 & 0 & 4.267 & 4.267 & -6.075 & 24.7 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{K}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 137.8 & 0 & 4.2667 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & 163.04 & 6.075 & 0 & -3.0375 & 6.075 \\ 4.2667 & 6.075 & 24.733 & 0 & -6.075 & 8.1 \\ -135 & 0 & 0 & 137.8 & 0 & 4.2667 \\ 0 & -3.0375 & -6.075 & 0 & 163.04 & -6.075 \\ 0 & 6.075 & 8.1 & 4.2667 & -6.075 & 24.73 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

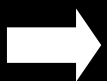
$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 137.8 & 0 & 4.2667 & -135 & 0 & 0 \\ 0 & 163.04 & 6.075 & 0 & -3.0375 & 6.075 \\ 4.2667 & 6.075 & 24.733 & 0 & -6.075 & 8.1 \\ -135 & 0 & 0 & 137.8 & 0 & 4.2667 \\ 0 & -3.0375 & -6.075 & 0 & 163.04 & -6.075 \\ 0 & 6.075 & 8.1 & 4.2667 & -6.075 & 24.73 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ u_2^{rz} \\ u_4^x \\ u_4^y \\ u_4^{rz} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.001071 \text{ mm} \\ -0.0000358 \text{ mm} \\ -0.002529 \text{ rad} \\ 0.000977 \text{ mm} \\ 0.000036 \text{ mm} \\ 0.003507 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -2.844 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -160 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.267 & 0 & 4.267 & 0 & 0 & 0 \\ 4.267 & 6.075 & 24.733 & -2.844 & 0 & -4.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.533 & 0 & 4.267 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f = \begin{bmatrix} 77.43 \text{ KN} \\ 57.28 \text{ KN} \\ -62.20 \text{ KN m} \\ -177.43 \text{ KN} \\ -57.28 \text{ KN} \\ 191.32 \text{ KN m} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}_1 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{rz'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{rz'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}_1 \cdot \underline{T}_1 \cdot \underline{U}_1 = \begin{bmatrix} 57.28 \text{ KN} \\ -77.43 \text{ KN} \\ -62.20 \text{ KNm} \\ -57.28 \text{ KN} \\ 77.43 \text{ KN} \\ -170.1 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{rz'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{rz'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}_2 \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{U}_2 = \begin{bmatrix} 127.43 \text{ KN} \\ 57.28 \text{ KN} \\ -129.9 \text{ KNm} \\ -127.43 \text{ KN} \\ -57.28 \text{ KN} \\ 359.03 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{rz'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{rz'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_3 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{rz'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{rz'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_3 \cdot \underline{T}_3 \cdot \underline{U}_3 = \begin{bmatrix} -57.28 \text{ KN} \\ 177.43 \text{ KN} \\ 191.32 \text{ KNm} \\ 57.28 \text{ KN} \\ -177.43 \text{ KN} \\ 340.97 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

Επίλυση με το *GTStrudl*

UNITS M N CENTIGRADE

JOINT COORDINATES

1 0 0
2 0 3
3 4 0
4 4 3

STATUS SUPPORT JOINTS 1
3

TYPE PLANE FRAME

MEMBER INCIDENCES

1 1 2
2 2 4
3 3 4

MATERIAL CONCRETE

CONSTANTS
E 30E9 ALL

MEMBER PROPERTIES

1 3 AX 0.16 IZ 0.0021333
2 AX 0.18 IZ 0.0054

LOAD 1 'NODAL LOADS'
JOINT LOADS

2 FORCE X 50E3
2 MOMENT Z -300E3
4 FORCE X 50E3
4 MOMENT Z 700E3

STIFFNESS ANALYSIS

OUTPUT DECIMAL 5

LIST FORCES
LIST REACTIONS
LIST SUM REACTIONS

UNITS MM
LIST DISPLACEMENTS

 LOADING - 1 NODAL LOADS

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	/----- FORCE -----//-----			MOMENT -----/	
		AXIAL	SHEAR Y	SHEAR Z	TORSIONAL	BENDING Y BENDING Z
1	1	57280.42578	-77429.62500			-62197.57031
1	2	-57280.42578	77429.62500			-170091.28125
2	2	127429.62500	57280.42578			-129908.71094
2	4	-127429.62500	-57280.42578			359030.40625
3	3	-57280.42578	177429.62500			191319.23438
3	4	57280.42578	-177429.62500			340969.65625

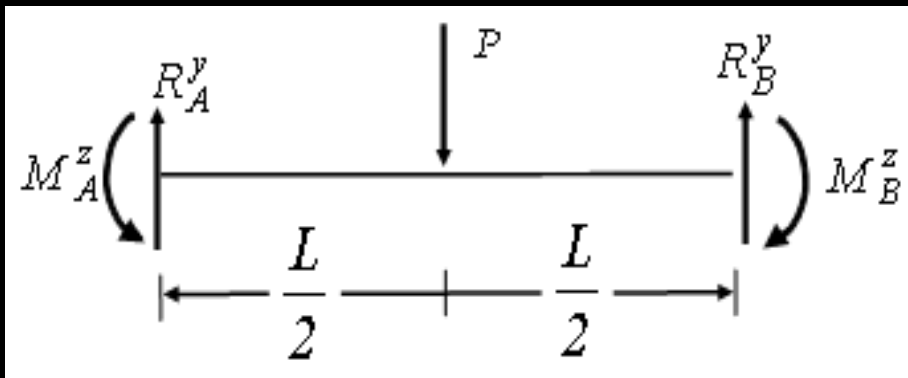
ACTIVE UNITS MM N RAD DEGC SEC

RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS FREE JOINTS

JOINT	/-----DISPLACEMENT-----//-----			ROTATION-----		
-----/	X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
2 GLOBAL	1.07102	-0.03580				-0.00253
4 GLOBAL	0.97663	0.03580				0.00351

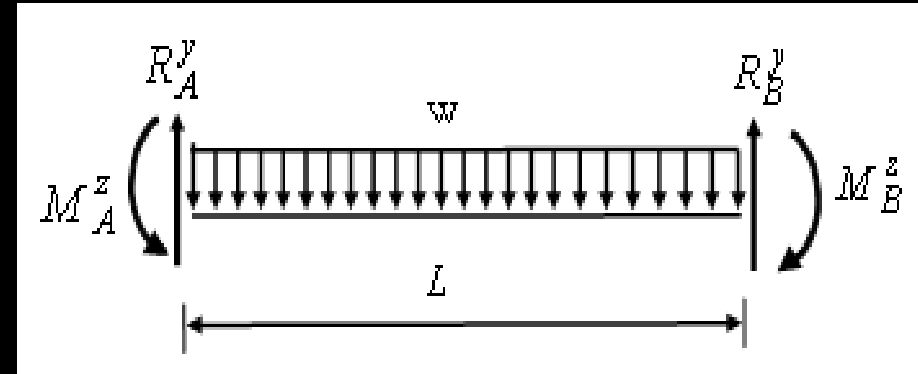
Μη επικόμβια φορτία

- Χρήση ισοδύναμων επικόμβιων φορτίων
 - χρησιμοποιώντας αντιδράσεις αμφίπακτης δοκού



$$R_A^y = R_B^y = \frac{P}{2}$$

$$M_A^z = \frac{P \cdot L}{8} \quad M_B^z = \frac{P \cdot L}{8}$$



$$R_A^y = R_B^y = \frac{w \cdot L}{2}$$

$$M_A^z = \frac{w \cdot L^2}{12} \quad M_B^z = \frac{w \cdot L^2}{12}$$

Φορτία σε αμφίπλευρη δοκό	R_A^y	R_B^y	M_A^z	M_B^z
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$
	$\frac{P}{L}L_2$	$\frac{P}{L}L_1$	$\frac{P}{L^2}L_1L_2^2$	$\frac{P}{L^2}L_1^2L_2$
	P	P	$\frac{2PL}{9}$	$\frac{2PL}{9}$
	$\frac{wL}{2}$	$\frac{wL}{2}$	$\frac{wL^2}{12}$	$\frac{wL^2}{12}$
	$\frac{3P}{4}$	$\frac{P}{4}$	$\frac{11wL^2}{192}$	$\frac{5wL^2}{192}$
	$\frac{2P}{3}$	$\frac{P}{3}$	$\frac{wL^2}{20}$	$\frac{wL^2}{30}$
	$-\frac{6M}{L^3}L_1L_2$	$\frac{6M}{L^3}L_1L_2$	$\frac{ML_2}{L^2}(L_2 - 2L_1)$	$\frac{ML_1}{L^2}(L_1 - 2L_2)$

Αντικαταστήσουμε όλα τα μη επικόμβια φορτία με στατικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία, τα οποία υπολογίζονται θεωρώντας ότι τα άκρα του μέλους είναι πακτωμένα και επιλύοντας τη δοκό για τα συγκεκριμένα εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία.

Εφαρμόζοντας τις αντιδράσεις που υπολογίστηκαν στις πακτώσεις αλλά με αντίθετο πρόσημο στους κόμβους του μέλους, ο φορέας μπορεί να επιλυθεί με όλα τα εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία συμπεριλαμβάνοντας και τα ισοδύναμα επικόμβια φορτία λόγω εξωτερικά επιβαλλόμενων μη επικόμβιων φορτίων.

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U} + \underline{R}^F$$



$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{R}_f^F \\ \underline{R}_s^F \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_s = \underline{U}_s^*$$



$$\underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s + \underline{R}_f^F$$



$$\underline{U}_f = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \left(\underline{R}_f - \underline{R}_f^F - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s \right)$$

(μετακινήσεις)

Αντιδράσεις στις στηρίξεις:

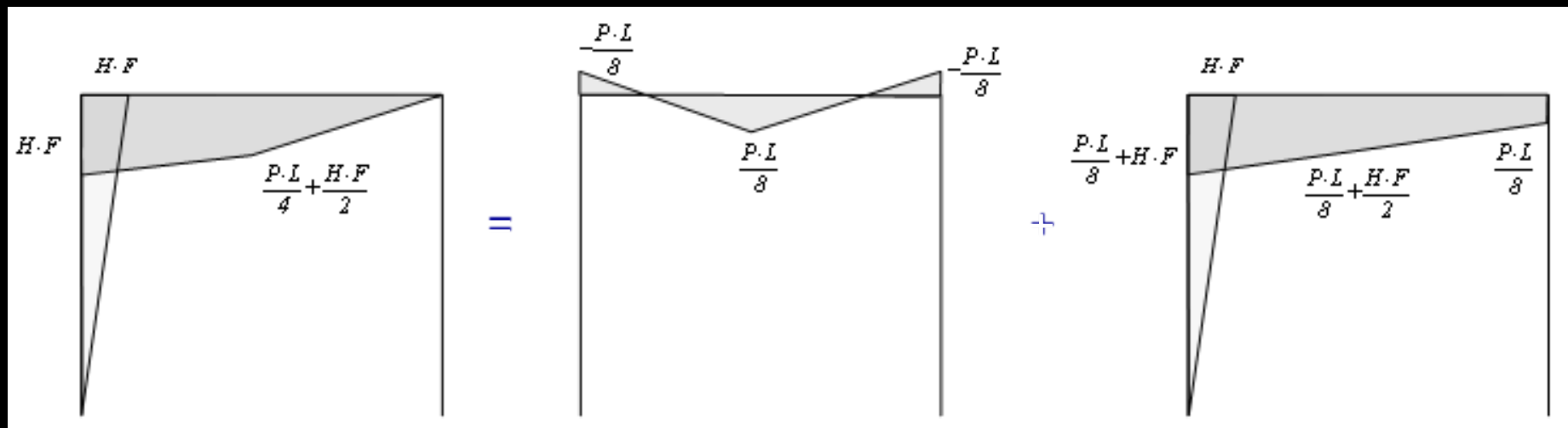
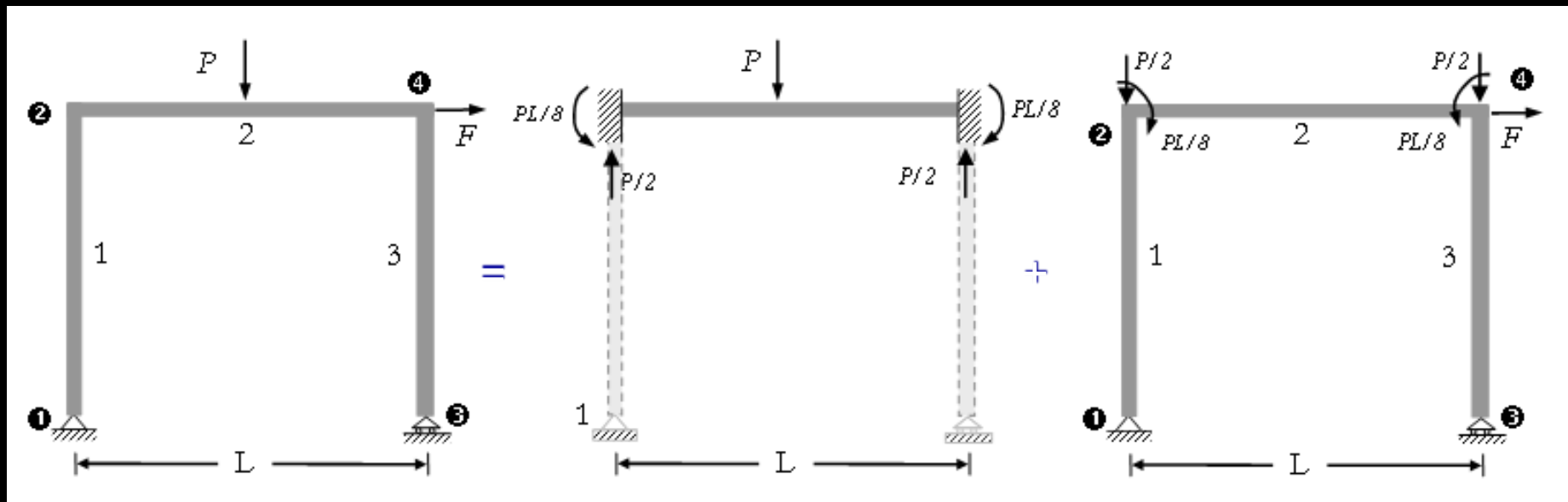
$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^* + \underline{R}_s^F$$

Εντατικά μεγέθη μελών:

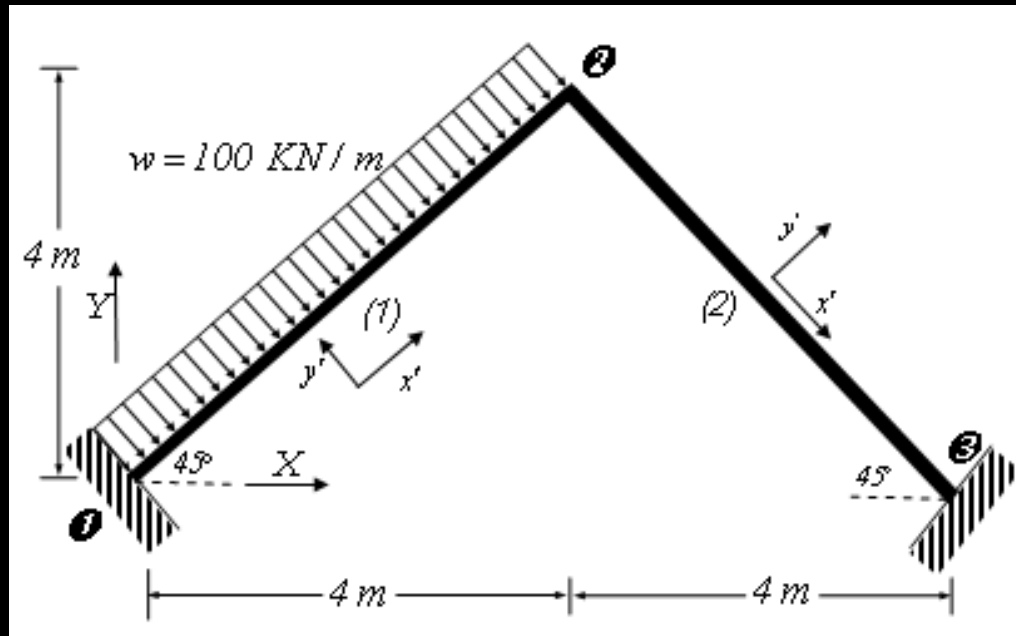
Με δεδομένες τις μετακινήσεις των κόμβων στα άκρα ενός μέλους μπορούν να υπολογιστούν τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη στα άκρα του μέλους χρησιμοποιώντας το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους.

Τα τελικά εντατικά μεγέθη ενός μέλους με μη επικόμβια φορτία θα προκύψουν αφού αθροιστούν στα εντατικά μεγέθη που θα υπολογισθούν από τις μετακινήσεις και τα εντατικά μεγέθη της αμφίπακτης δοκού την οποία νοητά επιβάλλαμε, ώστε να αναιρεθεί η θεώρηση που κάναμε για να μπορέσουμε να ορίσουμε ισοδύναμα επικόμβια φορτία.

$$\underline{s}'_{m2} = \underline{k}'_{m2} \cdot \underline{u}'_{m2} + \underline{s}'_{m2}^F$$

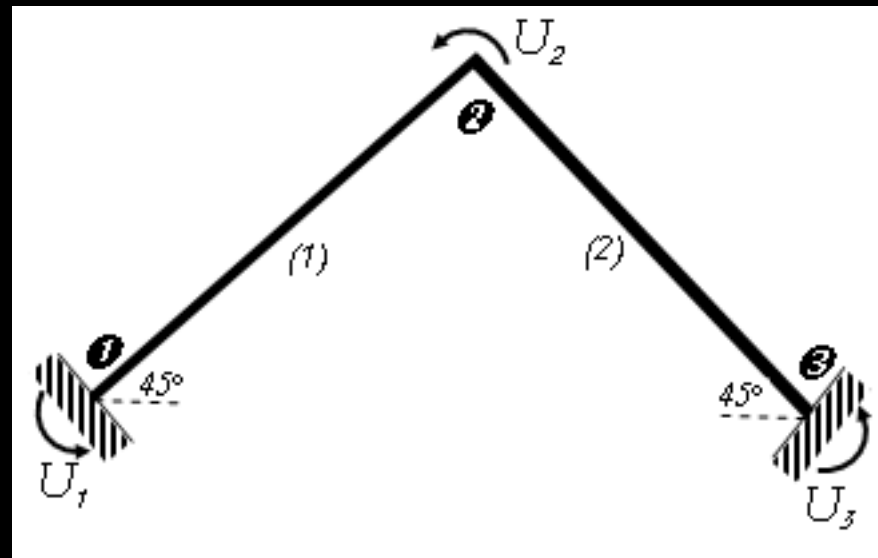


Παράδειγμα-2:



$$EI = 5 \cdot 10^7$$

αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις αμελητέες.



Για την εφαρμογή της Μεθόδου Άμεσης Δυσκαμψίας πρέπει να υπολογίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε μέλους στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, είτε κατευθείαν είτε προσδιορίζοντας πρώτα το μητρώο δυσκαμψίας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο μετασχηματίζουμε στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Τα στοιχεία του κάθε μέλους συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα:

Μέλος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	Μήκος L [m]	Καμπτική δυσκαμψία EI [N m ²]	θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
1	1	2	$\sqrt{32}$	$5 \cdot 10^7$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	2	3	$\sqrt{32}$	$5 \cdot 10^7$	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Σε περιπτώσεις δοκών και πλαισίων για τα οποία μπορεί να γίνει παραδοχή ότι παρουσιάζουν μόνο στροφές, όπως στο παράδειγμα μας και ότι οι μεταθέσεις μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες χρησιμοποιείται το μητρώο:

$$\rightarrow \underline{\underline{K}}_1 = \underline{\underline{K}}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{5 \cdot 10^7}{\sqrt{32}} = \begin{bmatrix} 3.5355 & 1.7678 \\ 1.7678 & 3.5355 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Οι καμπτικές ροπές, ωστόσο, δεν επηρεάζονται από μετασχηματισμούς

Με βάση αυτά τα στοιχεία μπορεί να υπολογιστεί το μητρώο δυσκαμψίας του πιο πάνω πλαισίου. Το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους 1, προστίθεται στις πρώτες 2 γραμμές και 2 στήλες του 3×3 μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, αφού το μέλος έχει κόμβο αρχής τον 1 και κόμβο τέλους το 2. Για το μέλος 2, το οποίο έχει κόμβο αρχής το 2 και κόμβο τέλους τον 3, το μητρώο δυσκαμψίας προστίθεται στις τελευταίες στις πρώτες 2 γραμμές και 2 στήλες του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής.

$$\rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 3.5355 & 1.7678 & 0 \\ 1.7678 & 7.0711 & 1.7678 \\ 0 & 1.7678 & 3.5355 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 3.5355 & 1.7678 & 0 \\ 1.7678 & 7.0711 & 1.7678 \\ 0 & 1.7678 & 3.5355 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Ορίζοντας σαν \underline{U}_s τους βαθμούς ελευθερίας στους οποίους είναι μηδενικές ή γνωστές οι μετακινήσεις και σαν \underline{U}_f τους βαθμούς ελευθερίας στους οποίους είναι άγνωστες οι μετακινήσεις και συνεπώς μπορούν να εξασκηθούν επικόμβια φορτία διαχωρίζουμε το μητρώο δυσκαμψίας σε 4 υπομητρώα:

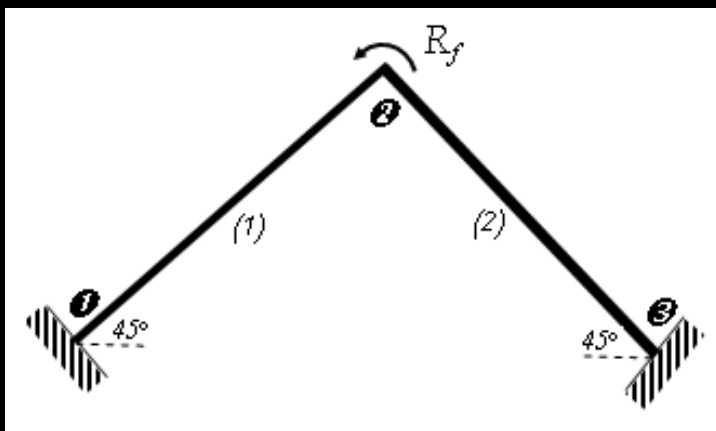
$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{R}_f^F \\ \underline{R}_s^F \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το κατανεμημένο φορτίο μπορεί να αντικατασταθεί από στατικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία, τα οποία φορτία ισούνται με τις αντιδράσεις μιας αμφίπακτης δοκού, της οποίας τα άκρα εξ' ορισμού έχουν μηδενικές μετακινήσεις, αλλά με αντίθετο πρόσημο

Οι αντιδράσεις μιας αμφίπακτης δοκού με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο 100 KN/m ισούνται με:

$$M_1^z = M_2^z = \frac{w \cdot L^2}{12} = \frac{100000 \cdot (\sqrt{32})^2}{12} \text{ Nm} = 2.667 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$



$$R_f = [2.667 \cdot 10^5] \text{ Nm}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 3.5355 & 1.7678 & 0 \\ 1.7678 & 7.0711 & 1.7678 \\ 0 & 1.7678 & 3.5355 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{K}_{ff} = [7.0711 \cdot 10^7]$$



$$\underline{U}_f = U_2 = u_2^{rz} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = 0.003771 \text{ radians}$$

Έχοντας υπολογίσει την άγνωστη στροφή του ελεύθερου κόμβου 2, μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις στους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις συνοριακές συνθήκες. Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων στον κόμβο αρχής του μέλους 1 θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι αντιδράσεις \underline{R}_1^F της αμφίπακτης δοκού:

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} 1.7678 \\ 1.7678 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\rightarrow \underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{R}_s^F = \begin{bmatrix} 1.7678 \\ 1.7678 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot 0.003771 + \begin{bmatrix} 2.667 \cdot 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

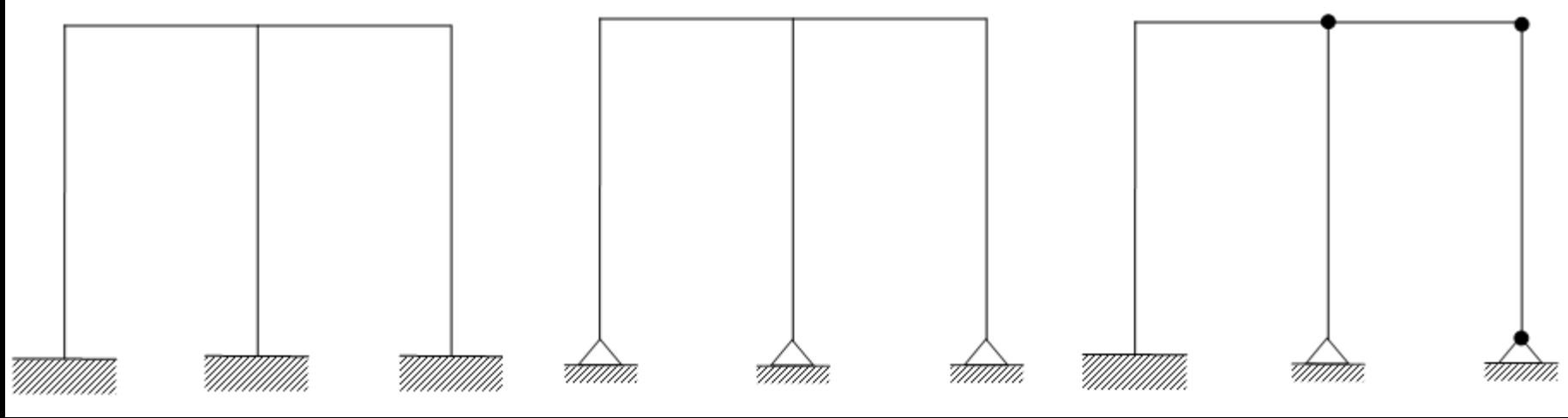
$$\rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} 333.3637 \\ 66.6637 \end{bmatrix} \text{KN } m$$

Με δεδομένες τις μετακινήσεις των κόμβων στα άκρα ενός μέλους μπορούν να υπολογιστούν τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη στα άκρα του μέλους χρησιμοποιώντας το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους. Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών του μέλους 1 θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα εντατικά μεγέθη της αμφίπακτης δοκού.

$$\begin{bmatrix} s_1^{M'} \\ s_2^{M'} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{5 \cdot 10^7}{\sqrt{32}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.003771 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.667 \cdot 10^5 \\ -2.667 \cdot 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333.3637 \\ -133.3750 \end{bmatrix} \text{KNm}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^{M'} \\ s_2^{M'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{5 \cdot 10^7}{\sqrt{32}} \cdot \begin{bmatrix} 0.003771 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133.3250 \\ 66.6625 \end{bmatrix} \text{KNm}$$

Μητρώα δυσκαμψίας δοκών με ελευθερίες στα άκρα



Η ύπαρξη ελευθεριών σε άκρα ενός μέλους μπορεί να ληφθεί υπόψη τροποποιώντας κατάλληλα το μητρώο δυσκαμψίας \underline{k} και το διάνυσμα επικόμβιων φορτίων \underline{R} . Οι εξισώσεις ισορροπίας, λαμβάνοντας υπόψη και τυχόν μη επικόμβια φορτία έχουν την πιο κάτω μορφή για μια καμπτόμενη δοκό:

$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 4 \cdot E \cdot I & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1F}^{y'} \\ M_{1F}^{z'} \\ V_{2F}^{y'} \\ M_{2F}^{z'} \end{bmatrix}$$

Εφόσον έχουμε κάποια ελευθερία στροφής, δηλαδή άρθρωση στη δοκό, σημαίνει ότι έχουμε ακόμη μια συνθήκη που πρέπει να ισχύει εξασφαλίζοντας μηδενική ροπή στη συγκεκριμένη άρθρωση. Συνεπώς, η αντίστοιχη στροφή μπορεί, βάσει της εξίσωσης που πρέπει να ισχύει για τη ροπή, να εκφραστεί συναρτήσει των υπολοίπων μετακινήσεων. Αυτό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος βαθμός ελευθερίας δεν είναι πλέον ανεξάρτητος.

Έχοντας άρθρωση στον κόμβο αρχής μιας δοκού η αντίστοιχη εξίσωση για τη ροπή στο αριστερό άκρο πρέπει να ισούται με μηδέν ($M_1^{z'} = 0$):

$$M_1^{z'} = \frac{6EI}{L^2} u_1^{y'} + \frac{4EI}{L} \theta_1^{z'} - \frac{6EI}{L^2} u_2^{y'} + \frac{2EI}{L} \theta_2^{z'} + M_{1F}^{z'}$$

Συνεπώς, η στροφή που πραγματοποιείται στην άρθρωση ισούται με:

$$\theta_1^{z'} = -\frac{3}{2L} u_1^{y'} + \frac{3}{2L} u_2^{y'} - \frac{\theta_2^{z'}}{2} - \frac{L}{4EI} M_{1F}^{z'}$$

Αντικαθιστώντας την πιο πάνω σχέση στην κάθε εξίσωση, προκύπτει η διόρθωση που πρέπει να γίνει για να ληφθεί υπόψη η ύπαρξη της άρθρωσης και να επιβληθεί η συνθήκη της μηδενικής ροπής σε εκείνο το σημείο.

Η 1^η γραμμή του μητρώου δυσκαμψίας διαμορφώνεται ως ακολούθως χρησιμοποιώντας την 1^η εξίσωση ισορροπίας:

$$V_1^{y'} = \frac{12EI}{L^3} u_1^{y'} + \frac{6EI}{L^2} \theta_1^{z'} - \frac{12EI}{L^3} u_2^{y'} + \frac{6EI}{L^2} \theta_2^{z'} + V_{1F}^{y'}$$

$$V_1^{y'} = \frac{12EI}{L^3} u_1^{y'} + \frac{6EI}{L^2} \left(-\frac{3}{2L} u_1^{y'} + \frac{3}{2L} u_2^{y'} - \frac{\theta_2^{z'}}{2} - \frac{L}{4EI} M_{1F}^{z'} \right) - \frac{12EI}{L^3} u_2^{y'} + \frac{6EI}{L^2} \theta_2^{z'} + V_{1F}^{y'}$$

$$V_1^{y'} = \frac{3EI}{L^3} u_1^{y'} - \frac{3EI}{L^3} u_2^{y'} + \frac{3EI}{L^2} \theta_2^{z'} + V_{1F}^{y'} - \frac{3}{2L} M_{1F}^{z'}$$



$$V_2^{y'} = -\frac{3EI}{L^3} u_1^{y'} + \frac{3EI}{L^3} u_2^{y'} - \frac{3EI}{L^2} \theta_2^{z'} + V_{2F}^{y'} + \frac{3}{2L} M_{1F}^{z'}$$

$$M_2^{z'} = \frac{3EI}{L^3} u_1^{y'} - \frac{3EI}{L^3} u_2^{y'} + \frac{3EI}{L^2} \theta_2^{z'} + M_{2F}^{z'} + \frac{3}{2L} M_{1F}^{z'}$$



$$\begin{bmatrix} V_1^{y'} \\ M_1^{z'} \\ V_2^{y'} \\ M_2^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{y'} \\ \theta_1^{z'} \\ u_2^{y'} \\ \theta_2^{z'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1F}^{y'} - \frac{3}{2L} M_{1F}^{z'} \\ 0 \\ V_{2F}^{y'} + \frac{3}{2L} M_{1F}^{z'} \\ M_{2F}^{z'} - \frac{M_{1F}^{z'}}{2} \end{bmatrix}$$



$$k_m' = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}$$

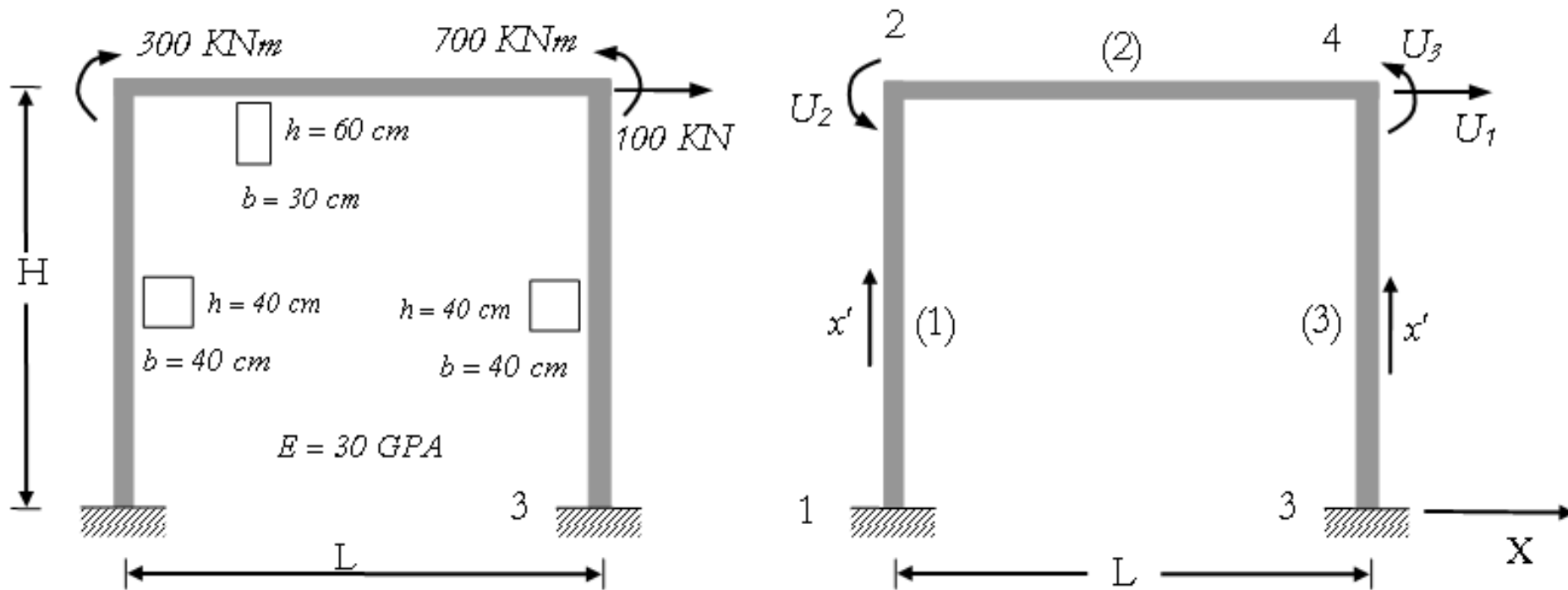
Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Με τη γραφική μέθοδο μπορεί να επιλυθεί πρακτικά ένα απλός φορέας λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι δεν είναι δεσμευμένοι. Για αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας σχηματίζεται κατευθείαν το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K}_{ff} , το οποίο χρησιμοποιείται μαζί με τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία \mathbf{R}_f για να υπολογιστούν οι άγνωστες μετακινήσεις \mathbf{U}_f .

Συγκεκριμένα αφού καθοριστούν και αριθμηθούν όλοι οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας, παραλείποντας δηλαδή όλους τους βαθμούς ελευθερίας των οποίων οι μετακινήσεις είναι δεδομένες, επιβάλλεται διαδοχικά μοναδιαία μετακίνηση στον κάθε ένα από αυτούς τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, διατηρώντας τους υπόλοιπους με μηδενικές μετακινήσεις. Έτσι, υπολογίζεται η αντίστοιχη στήλη του μητρώου δυσκαμψίας, τα στοιχεία της οποία ισούνται εξ' ορισμού με τις υπολογιζόμενες αντιδράσεις για τη συγκεκριμένη μοναδιαία μετακίνηση.

Αφού προσδιορισθεί το μητρώο δυσκαμψίας, \mathbf{K}_{ff} , επιβάλλοντας τα επικόμβια φορτία \mathbf{R}_f και υπολογιστούν οι μετακινήσεις \mathbf{U}_f , υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη των μελών αξιοποιώντας τα εντατικά μεγέθη για μοναδιαίες μετακινήσεις τα οποία ήδη υπολογίστηκαν κατά τη διαδικασία εύρεσης του μητρώου δυσκαμψίας.

Παράδειγμα-3



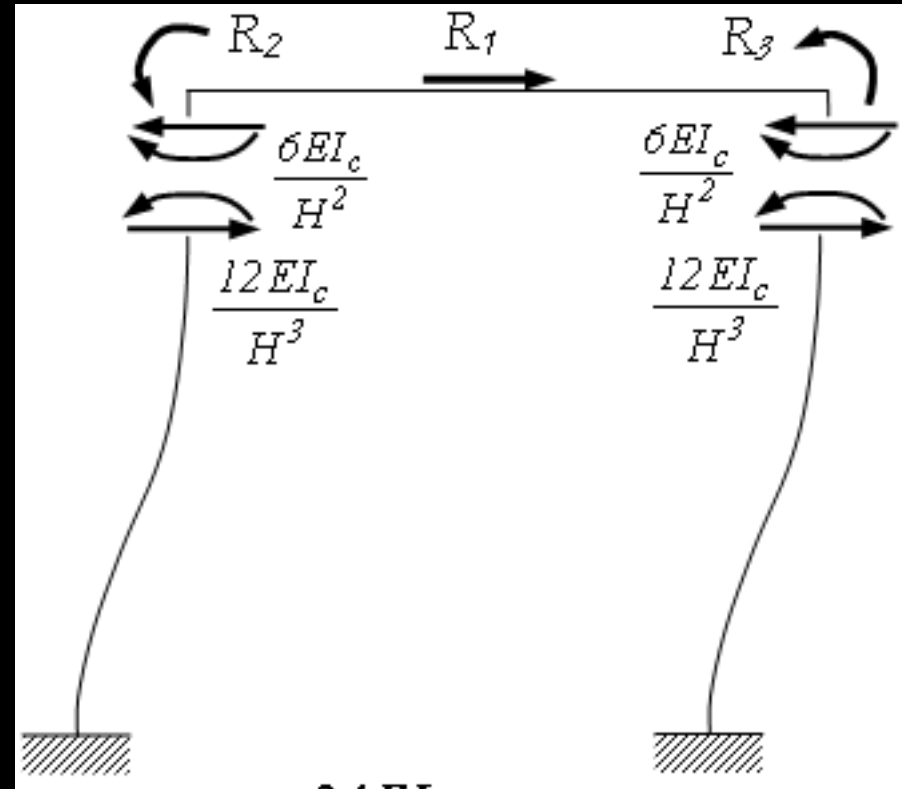
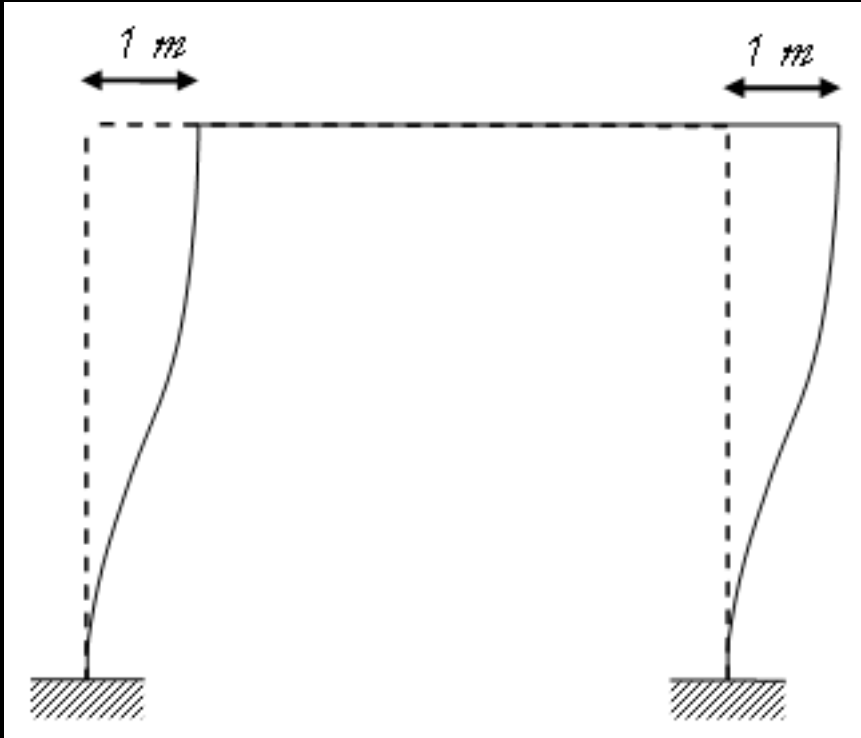
Η συνεισφορά των αξονικών παραμορφώσεων, συχνά στη πράξη, μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και να παραληφθεί. Αυτό όμως δεν σημαίνει κατ' ουδένα λόγο ότι τα μέλη μίας κατασκευής δεν έχουν μηδενικές δυνάμεις, αλλά απλά ότι οι αξονικές παραμορφώσεις σχετικά με τα άλλα είδη παραμόρφωσης, για συνηθισμένα δομικά στοιχεία και φορτίσεις είναι σημαντικά μικρότερες των καμπτικών παραμορφώσεων, οι οποίες συνήθως είναι οι πιο σημαντικές.

Έτσι, θεωρώντας αμελητέες τις αξονικές παραμορφώσεις, το πλαίσιο έχει 3 βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι δεν είναι δεδομένοι, είτε άμεσα είτε έμμεσα, στους οποίους αντιστοιχούν οι μετακινήσεις U_1 , $U_2 = \theta_1$ και $U_3 = \theta_2$, και τα αντίστοιχα εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία R_1 , $R_2 = M_1$ και $R_3 = M_2$. Υπολογίζοντας τις άγνωστες μετακινήσεις U_1 , U_2 και U_3 μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε, βάσει αυτών, οποιοδήποτε άλλο μέγεθος του πλαισίου.

Με τη γραφική μέθοδο, στόχος είναι να υπολογιστεί άμεσα το μητρώο δυσκαμψίας K_{ff} , το οποίο συνδέει τις ελεύθερες μετακινήσεις των κόμβων U_f με τα αντίστοιχα εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία R_f :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K_{ff} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Εύρεση 1^{ης} στήλης μητρώου δυσκαμψίας

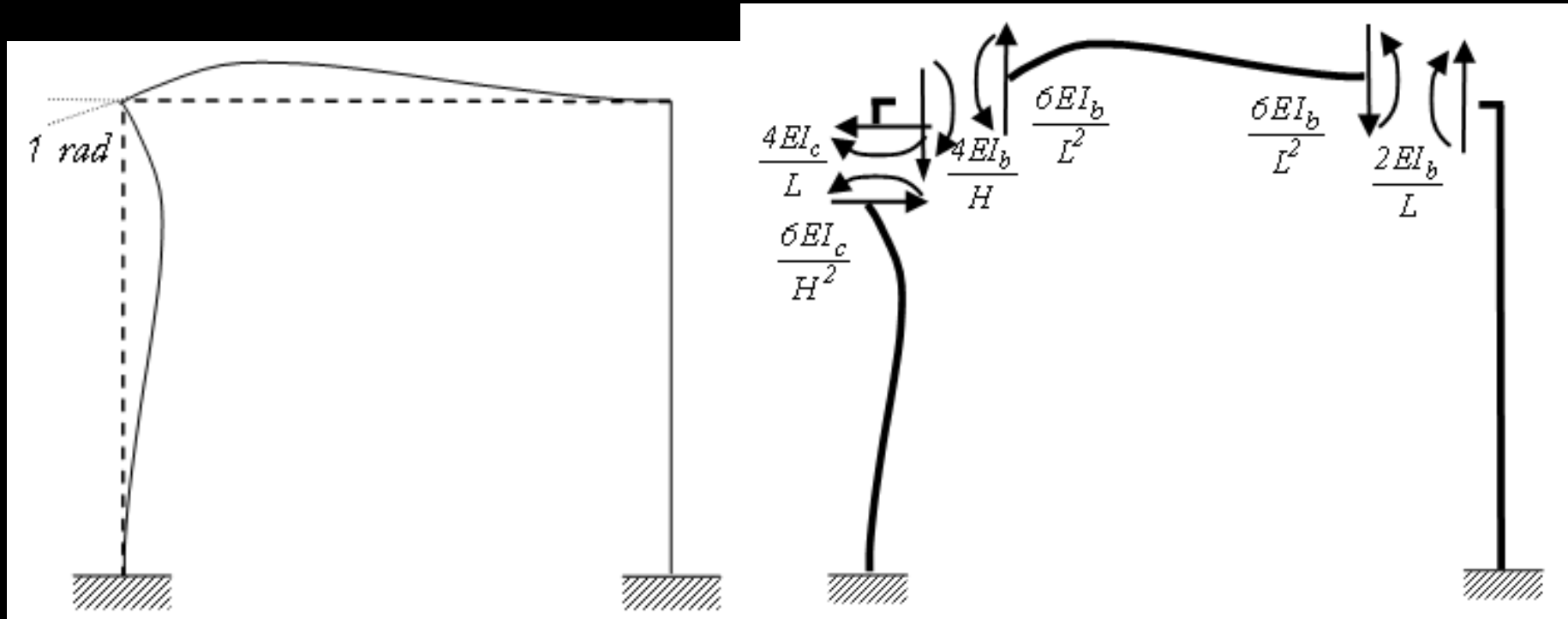


$$\begin{aligned} U_1 &= 1 \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{24EI_c}{H^3} = K_{ff}^{1,1} \\ R_2 &= \frac{6EI_c}{H^2} = K_{ff}^{2,1} \\ R_3 &= \frac{6EI_c}{H^2} = K_{ff}^{3,1} \end{aligned}$$

Εύρεση 2^{ης} στήλης μητρώου δυσκαμψίας



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 1$$

$$U_3 = 0$$

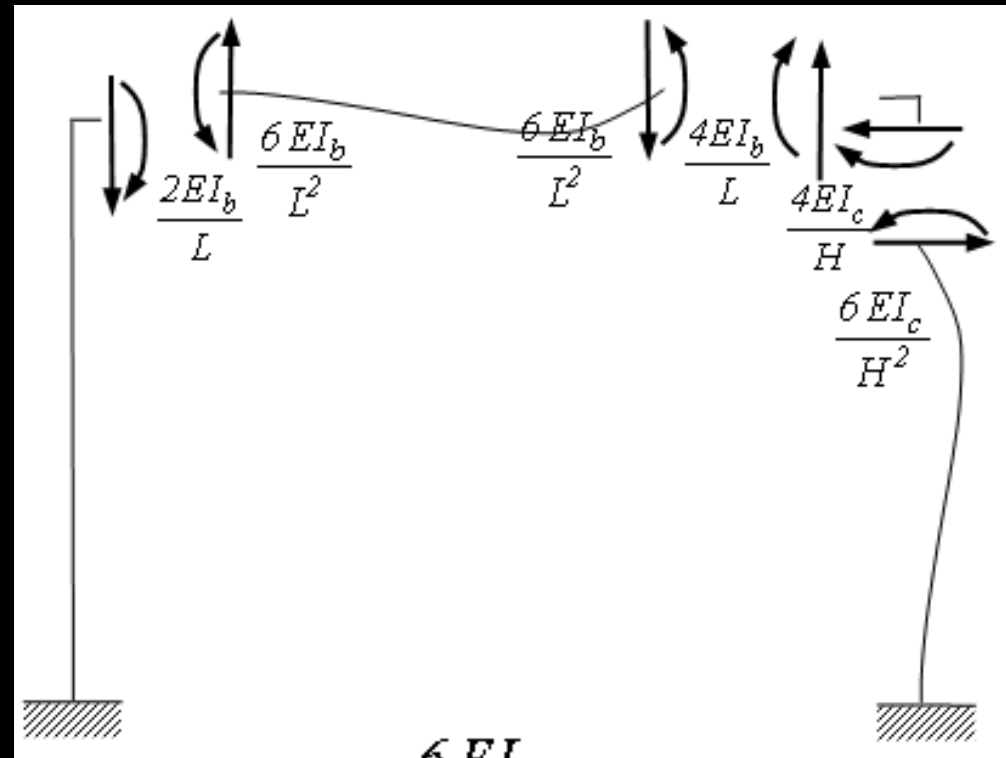
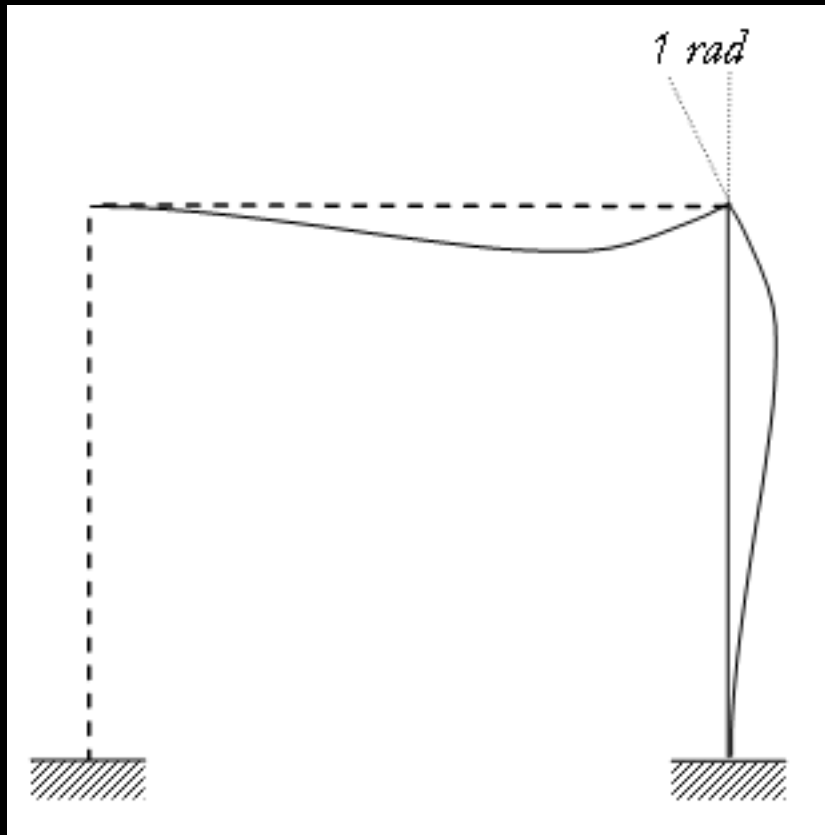


$$R_1 = \frac{6EI_c}{H^2} = K_{ff}^{1,2}$$

$$R_2 = \frac{4EI_c}{H} + \frac{4EI_b}{L} = K_{ff}^{2,2}$$

$$R_3 = \frac{2EI_b}{L} = K_{ff}^{3,2}$$

Εύρεση 3^{ης} στήλης μητρώου δυσκαμψίας



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0$$

$$U_3 = 1$$



$$R_1 = \frac{6EI_c}{H^2} = K_{ff}^{1,3}$$

$$R_2 = \frac{2EI_b}{L} = K_{ff}^{2,3}$$

$$R_3 = \frac{4EI_c}{H} + \frac{4EI_b}{L} = K_{ff}^{3,3}$$

Μητρώο δυσκαμψίας πλαισίου



$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} \frac{24EI_c}{H^3} & \frac{6EI_c}{H^2} & \frac{6EI_c}{H^2} \\ \frac{6EI_c}{H^2} & \frac{4EI_c}{H} + \frac{4EI_b}{L} & \frac{2EI_b}{L} \\ \frac{6EI_c}{H^2} & \frac{2EI_b}{L} & \frac{4EI_c}{H} + \frac{4EI_b}{L} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των εξωτερικά επιβαλλόμενων επικόμβιων φορτίων, R_1 , R_2 και R_3 , καθώς και τις τιμές των στοιχείων του μητρώου δυσκαμψίας, μπορούμε, μετά από αντιστροφή του τελευταίου, να υπολογίσουμε τις άγνωστες μετακινήσεις, U_1 , U_2 και U_3 .

Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

$$I_c = 0.002133 \text{ m}^4, I_b = 0.0054 \text{ m}^4, H = 3 \text{ m}, L = 4 \text{ m}$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 5.689 & 4.267 & 4.267 \\ 4.267 & 24.73 & 8.1 \\ 4.267 & 8.1 & 24.73 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \text{ KN} \\ -300 \text{ KNm} \\ 700 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.69 & 4.267 & 4.267 \\ 4.267 & 24.73 & 8.1 \\ 4.267 & 8.1 & 24.73 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00105 \text{ m} \\ -0.00253 \text{ rad} \\ 0.00348 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Εντατικά μεγέθη αριστερού υποστυλώματος

$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 2.844 & 4.267 & -2.844 & 4.267 \\ 4.267 & 8.533 & -4.267 & 4.267 \\ -2.844 & -4.267 & 2.844 & -4.267 \\ 4.267 & 4.267 & -4.267 & 8.533 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00105 \\ -0.00253 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -78.3 \text{ KN} \\ 63.4 \text{ KNm} \\ 78.3 \text{ KN} \\ -171.5 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

Εντατικά μεγέθη δεξιού υποστυλώματος

$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 2.844 & 4.267 & -2.844 & 4.267 \\ 4.267 & 8.533 & -4.267 & 4.267 \\ -2.844 & -4.267 & 2.844 & -4.267 \\ 4.267 & 4.267 & -4.267 & 8.533 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00105 \\ 0.00348 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 178.3 \text{ KN} \\ 193.2 \text{ KNm} \\ -178.3 \text{ KN} \\ 341.6 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

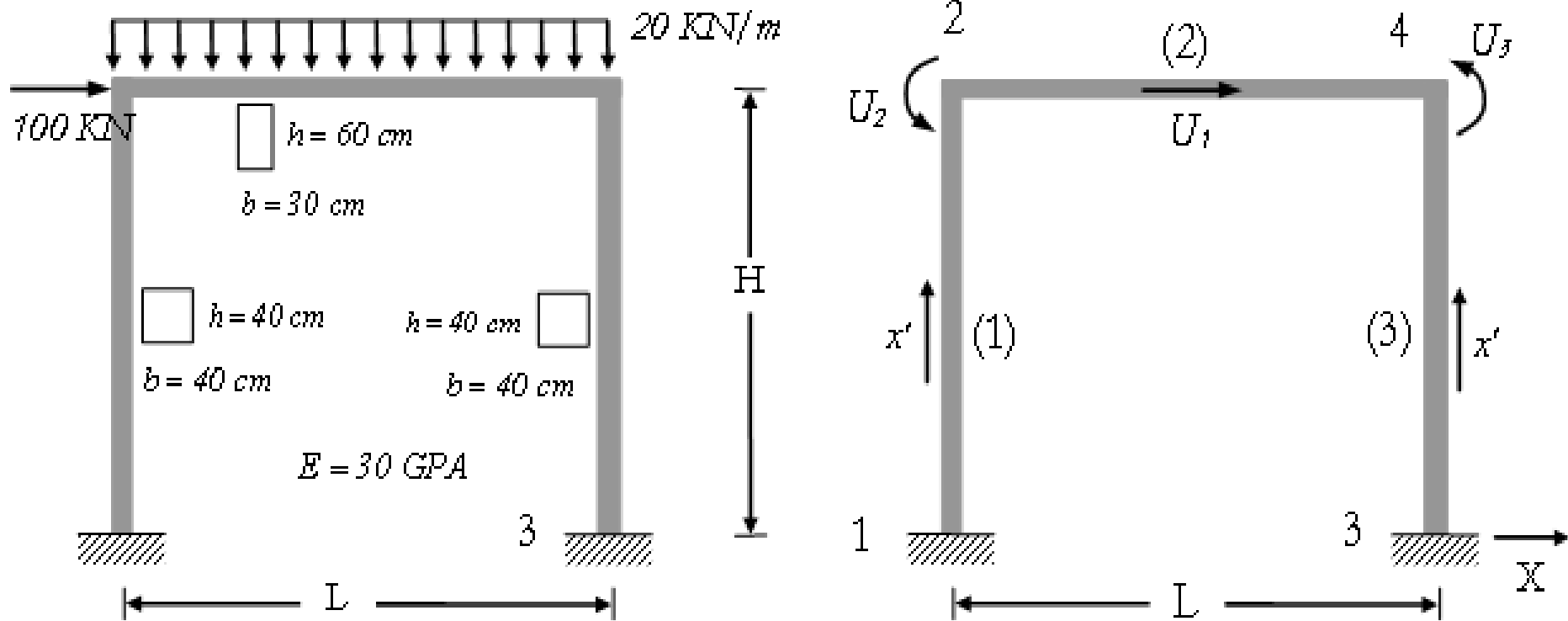
Εντατικά μεγέθη δοκού

$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 3.038 & 6.075 & -3.038 & 6.075 \\ 6.075 & 16.2 & -6.075 & 8.1 \\ -3.038 & -6.075 & 3.038 & -6.075 \\ -6.075 & 8.1 & -6.075 & 16.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00253 \\ 0 \\ 0.00348 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 57.5 \text{ KN} \\ 128.6 \text{ KNm} \\ -57.5 \text{ KN} \\ 358.5 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

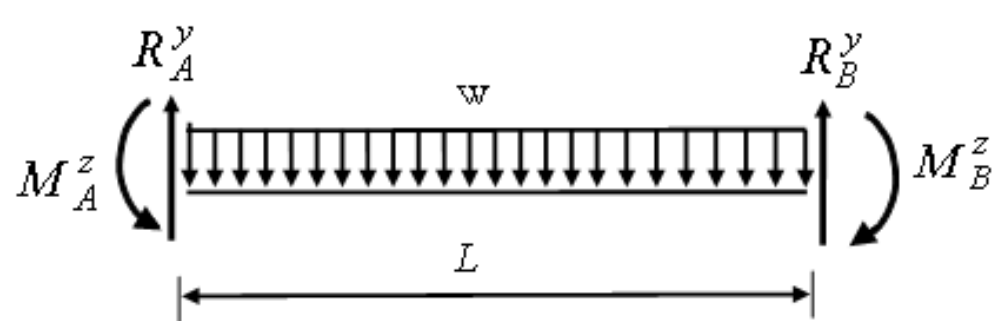
Παράδειγμα-4



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24 EI_c}{H^3} & \frac{6 EI_c}{H^2} & \frac{6 EI_c}{H^2} \\ \frac{6 EI_c}{H^2} & \frac{4 EI_c}{H} + \frac{4 EI_b}{L} & \frac{2 EI_b}{L} \\ \frac{6 EI_c}{H^2} & \frac{2 EI_b}{L} & \frac{4 EI_c}{H} + \frac{4 EI_b}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.689 & 4.267 & 4.267 \\ 4.267 & 24.73 & 8.1 \\ 4.267 & 8.1 & 24.73 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Το κατανεμημένο φορτίο μπορεί να αντικατασταθεί από στατικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία, τα οποία φορτία ισούνται με τις αντιδράσεις μίας αμφίπακτης δοκού, τις οποίες τα άκρα εξ' ορισμού έχουν μηδενικές μετακινήσεις, αλλά με αντίθετο πρόσημο. Συγκεκριμένα, για το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο w , πακτώνοντας τα άκρα της δοκού, οι αντιδράσεις, οι οποίες ισούνται με τις πιο κάτω τιμές, πρέπει να ασκηθούν με αντίθετο πρόσημο σαν ισοδύναμα επικόμβια φορτία στη δοκό:



$$R_A^y = R_B^y = \frac{w \cdot L}{2} = 40 \text{ KN}$$

$$M_A^z = M_B^z = \frac{w \cdot L^2}{12} = 26.667 \text{ KNm}$$



$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \text{ KN} \\ -26.667 \text{ KNm} \\ 26.667 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$


$$\rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.69 & 4.267 & 4.267 \\ 4.267 & 24.73 & 8.1 \\ 4.267 & 8.1 & 24.73 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ -26.667 \\ 26.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00218 \text{ m} \\ -0.000444 \text{ rad} \\ -0.000123 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Επίλυση του ίδιου προβλήματος με τη άμεση μέθοδο δυσκαμψίας, συμπεριλαμβάνοντας τις αξονικές παραμορφώσεις, δίνει αποτελέσματα: $U_1 = 0.0022 \text{ m}$, $U_2 = -0.000455 \text{ rad}$ και $U_3 = -0.000133 \text{ rad}$, τα οποία είναι σχετικά κοντά σε αυτά που έχουν υπολογισθεί με τη γραφική μέθοδο δυσκαμψίας, λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα με την οποία γνωρίζουμε τις τιμές κάποιων μεγεθών και παραμέτρων.

Έχοντας υπολογίσει τις μετακινήσεις των ελεύθερων κόμβων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε για κάθε μέλος τα εντατικά του μεγέθη, χρησιμοποιώντας το μητρώο δυσκαμψίας του μέλους, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, και τις αντίστοιχες μετακινήσεις των άκρων του μέλους, βάσει των μετακινήσεων των κόμβων:


Εντατικά μεγέθη αριστερού υποστυλώματος

$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} 2.844 & 4.267 & -2.844 & 4.267 \\ 4.267 & 8.533 & -4.267 & 4.267 \\ -2.844 & -4.267 & 2.844 & -4.267 \\ 4.267 & 4.267 & -4.267 & 8.533 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00218 \\ -0.000444 \end{bmatrix}$$


$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_{z'}^1 \\ V_{y'}^2 \\ M_{z'}^2 \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} 43.15 \text{ KN} \\ 74.19 \text{ KNm} \\ -43.15 \text{ KN} \\ 55.25 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

Εντατικά μεγέθη δεξιού υποστυλώματος

$$\begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_1^{z'} \\ V_{y'}^2 \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 2.844 & 4.267 & -2.844 & 4.267 \\ 4.267 & 8.533 & -4.267 & 4.267 \\ -2.844 & -4.267 & 2.844 & -4.267 \\ 4.267 & 4.267 & -4.267 & 8.533 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.00218 \\ -0.000123 \end{bmatrix}$$

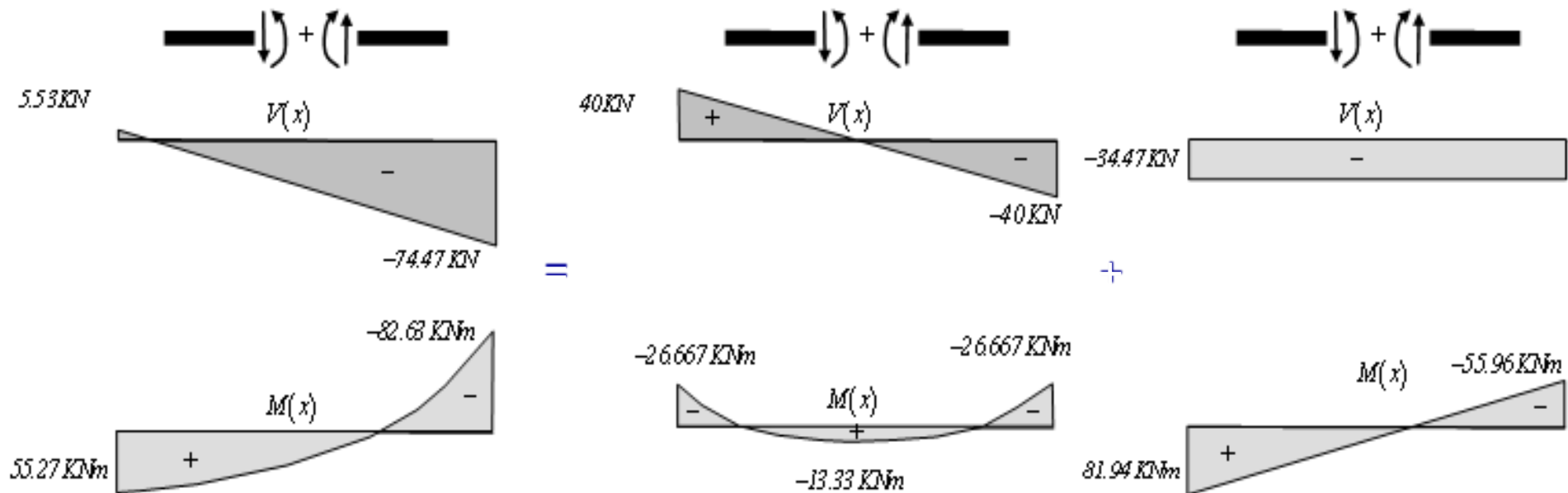

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_{y'}^1 \\ M_1^{z'} \\ V_{y'}^2 \\ M_2^{z'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 56.83 \text{ KN} \\ 87.88 \text{ KNm} \\ -56.83 \text{ KN} \\ 82.61 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

Εντατικά μεγέθη δοκού

$$\begin{bmatrix} V^{y'} \\ M^{z'} \\ V^{y'} \\ M^{z'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 3.038 & 6.075 & -3.038 & 6.075 \\ 6.075 & 16.2 & -6.075 & 8.1 \\ -3.038 & -6.075 & 3.038 & -6.075 \\ -6.075 & 8.1 & -6.075 & 16.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -0.000444 \\ 0 \\ -0.000123 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V^{y'} \\ M^{z'} \\ V^{y'} \\ M^{z'} \end{bmatrix}_2^F$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V^{y'} \\ M^{z'} \\ V^{y'} \\ M^{z'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -34.47 \text{ KN} \\ -81.94 \text{ KNm} \\ 34.47 \text{ KN} \\ -55.96 \text{ KNm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 \text{ KN} \\ 26.67 \text{ KNm} \\ 40 \text{ KN} \\ -26.67 \text{ KNm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.53 \text{ KN} \\ -55.27 \text{ KNm} \\ 74.47 \text{ KN} \\ -82.63 \text{ KNm} \end{bmatrix}$$

Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκού



Έχοντας υπολογίσει και τα εντατικά μεγέθη, τέμνουσες και ροπές, στα άκρα των μελών και λαμβάνοντας υπόψη τα επικόμβια φορτία μπορούμε από ισορροπία των κόμβων να προσδιοριστούν οι αξονικές δυνάμεις στα μέλη, των οποίων τις παραμορφώσεις θεωρήσαμε αμελητέες και παραλείψαμε στην επίλυση του φορέα με τη μέθοδο δυσκαμψίας. Έτσι οι αξονικές δυνάμεις των υποστυλωμάτων προκύπτουν να είναι θλιπτικές, 5.53 kN στο αριστερό και 74.47 kN στο δεξιό υποσύλωμα.

Επίλυση με το *GTStrudl*

TYPE PLANE FRAME

UNITS M NEWTONS
CENTIGRADE

JOINT COORDINATES

1 0 0
2 0 3
3 4 0
4 4 3

STATUS SUPPORT JOINTS 1 3

MEMBER INCIDENCES

1 1 2
2 2 4
3 3 4

CONSTANTS

E 30E9 ALL
G 13E9 ALL

MEMBER PROPERTIES

1 3 AX 1000 AY 1000 IZ 0.002133
2 AX 1000 AY 1000 IZ 0.0054

LOAD 1 'Epiballomena fortia'

JOINT LOADS

2 FORCE X 50E3
4 FORCE Y 50E3

MEMBER LOADS

2 FORCE Y UNIFORM w -20E3

STIFFNESS ANALYSIS

OUTPUT DECIMAL 7

LIST FORCES

LIST REACTIONS

LIST SUM REACTIONS

UNITS MM

LIST DISPLACEMENTS

PROBLEM - Frame 3 TITLE - Frame under uniformly distributed load

ACTIVE UNITS M N RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 Epiballomena fortia ---

MEMBER FORCES

MEMBER JOINT /----- FORCE -----//----- MOMENT -----/

		AXIAL	SHEAR Y	SHEAR Z	TORSIONAL	BENDING Y	BENDING Z
1	1	5526.0937500	43160.2070312				74212.4218750
1	2	-5526.0937500	-43160.2070312				55268.2109375
2	2	6839.7915039	5526.0937500				-55268.2109375
2	4	-6839.7915039	74473.9140625				-82627.4375000
3	3	74473.9140625	56839.7929688				87891.9453125
3	4	-74473.9140625	-56839.7929688				82627.4375000

PROBLEM - Frame 3 TITLE - Frame under uniformly distributed load

ACTIVE UNITS M N RAD DEGC SEC

 --- LOADING - 1 Epiballomena fortia ---

RESULTANT JOINT LOADS SUPPORTS

JOINT	/-----FORCE-----//-----MOMENT-----/	FORCE			MOMENT		
		X FORCE	Y FORCE	Z FORCE	X MOMENT	Y MOMENT	Z MOMENT
1	GLOBAL	-43160.2109375	5526.0942383				74212.4140625
3	GLOBAL	-56839.7929688	74473.9140625				87891.9453125

SUM OF REACTIONS ABOUT COORDINATE X 0.000 Y 0.000 Z 0.000

LOADING	/-----FORCE-----//-----MOMENT-----/			MOMENT		
	X FORCE	Y FORCE	Z FORCE	X MOMENT	Y MOMENT	Z MOMENT
1	-100000.00	80000.00	0.0000000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	460000.0

PROBLEM - Frame 3 TITLE - Frame under uniformly distributed load

ACTIVE UNITS MM N RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 Epiballomena fortia ---

ACTIVE UNITS MM N RAD DEGC SEC

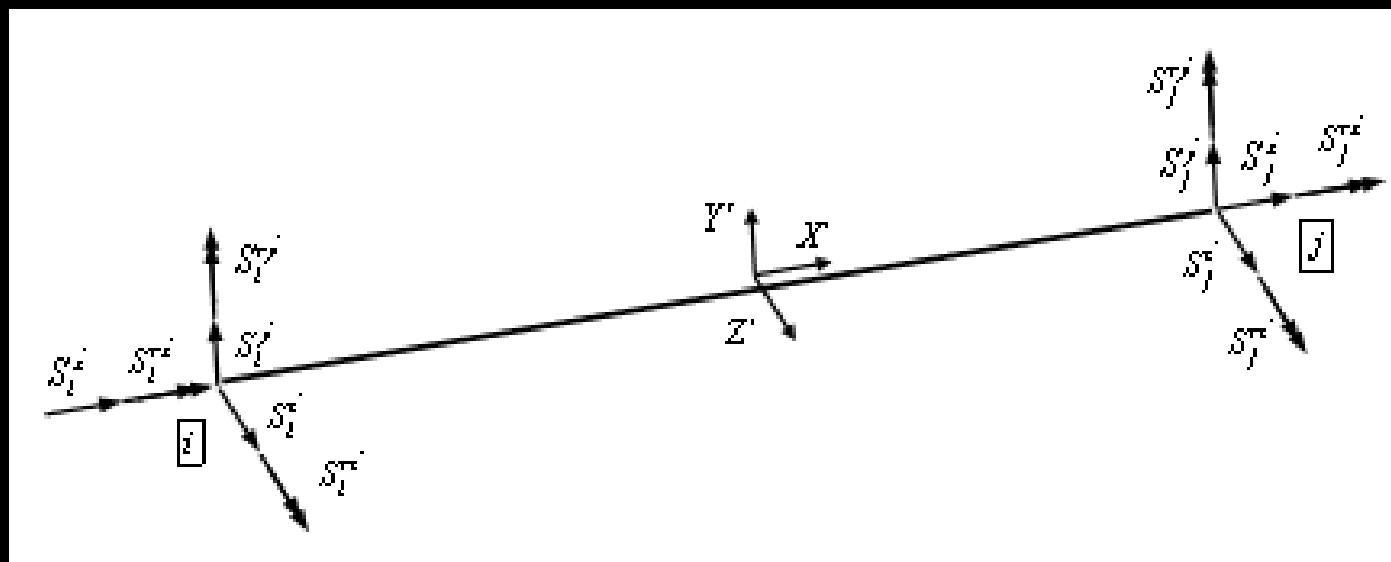
RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS SUPPORTS

JOINT		/-----DISPLACEMENT-----//			-----ROTATION-----/		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
1	GLOBAL	0.0000000	0.0000000				0.0000000
3	GLOBAL	0.0000000	0.0000000				0.0000000

RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS FREE JOINTS

JOINT		/-----DISPLACEMENT-----//			-----ROTATION-----/		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
2	GLOBAL	2.1837094	-0.0000006				-0.0004441
4	GLOBAL	2.1837084	-0.0000074				-0.0001234

Χωρικές δοκοί και πλαίσια



Η διαδικασία ανάλυσης με τη μέθοδο δυσκαμψίας είναι παρόμοια με αυτή που έχουμε δει μέχρι τώρα για επίπεδες κατασκευές. Οι διαφορές είναι ότι ο κάθε κόμβος μίας χωρικής κατασκευής έχει έξι, αντί τρεις, βαθμούς ελευθερίας. Ενώ, ένα μέλος μίας επίπεδης κατασκευής έχει τρία εντατικά μεγέθη, αξονικές και τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές, ένα χωρικό (τρισεδιάστατο) μέλος μπορεί να καταπονείται με έξι διαφορετικά είδη εντατικών μεγεθών. Συγκεκριμένα, ένα χωρικό μέλος μπορεί να έχει αξονική δύναμη $s_i^{x'} = N_i^{x'}$, τέμνουσες δυνάμεις στις δύο διευθύνσεις, $s_i^{y'} = V_i^{y'}$ και $s_i^{z'} = V_i^{z'}$, ροπή στρέψης, $s_i^{rx'} = T_i^{rx'}$, και καμπτικές ροπές στις δύο διευθύνσεις, $s_i^{ry'} = M_i^{ry'}$, $s_i^{rz'} = M_i^{rz'}$.

$$\begin{bmatrix} S_i^{x'} \\ S_i^{y'} \\ S_i^{z'} \\ S_i^{rx'} \\ S_i^{ry'} \\ S_i^{rz'} \\ S_j^{x'} \\ S_j^{y'} \\ S_j^{z'} \\ S_j^{rx'} \\ S_j^{ry'} \\ S_j^{rz'} \end{bmatrix}_m$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{z'}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{y'}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{y'}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{y'}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{y'}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{z'}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{z'}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z'}}{L} \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{bmatrix} u_i^{x'} \\ u_i^{y'} \\ u_i^{z'} \\ u_i^{rx'} \\ u_i^{ry'} \\ u_i^{rz'} \\ u_j^{x'} \\ u_j^{y'} \\ u_j^{z'} \\ u_j^{rx'} \\ u_j^{ry'} \\ u_j^{rz'} \end{bmatrix}_m$$

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$

$$\underline{s}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m$$

$$\underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

$$\underline{s}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\begin{bmatrix} u_i^{x'} \\ u_i^{y'} \\ u_i^{z'} \\ u_i^{rx'} \\ u_i^{ry'} \\ u_i^{rz'} \\ u_j^{x'} \\ u_j^{y'} \\ u_j^{z'} \\ u_j^{rx'} \\ u_j^{ry'} \\ u_j^{rz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \\ u_i^{rx} \\ u_i^{ry} \\ u_i^{rz} \\ u_j^x \\ u_j^y \\ u_j^z \\ u_j^{rx} \\ u_j^{ry} \\ u_j^{rz} \end{bmatrix}$$

Προγραμματισμός άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας

Καθορισμός δεδομένων για ανάλυση επίπεδων πλαισίων:

Η διαδικασία καθορισμού των δεδομένων περιλαμβάνει τα πιο κάτω βήματα:

- Καθορισμός και αρίθμηση όλων των κόμβων της κατασκευής.
- Καθορισμός και αρίθμηση όλων των μελών της κατασκευής.
- Καθορισμός των τοπικών συστημάτων συντεταγμένων του κάθε μέλους της κατασκευής, δηλαδή προσδιορισμός των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j).
- Καθορισμός ενός απόλυτου συστήματος συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των συντεταγμένων του κάθε κόμβου της κατασκευής χρησιμοποιώντας το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών στηρίξεων, δηλαδή των βαθμών ελευθερίας με δεδομένες μετακινήσεις, οι οποίες συνήθως είναι μηδενικές.
- Προσδιορισμός της συνδεσμολογίας των μελών της κατασκευής, δηλαδή των κόμβων αρχής (i) και τέλους (j) στα άκρα του κάθε μέλους.
- Καθορισμός των γεωμετρικών και μηχανικών ιδιοτήτων του κάθε μέλους.

Αυτόματη διαδικασία ανάλυσης πλαισίων:

Τα πιο κάτω βήματα μπορούν να ακολουθηθούν για την ανάλυση ενός πλαισίου:

- Υπολογισμός των συνημίτονων κατευθύνσεως του κάθε μέλους από τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.
- Προσδιορισμός των μητρώων δυσκαμψίας $\underline{\mathbf{K}}'_m$ του κάθε μέλους στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων και το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού.
- Υπολογισμός μητρώου δυσκαμψίας του κάθε μέλους $\underline{\mathbf{K}}_m$, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων:
- Διαχωρισμός του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{\mathbf{K}}_m$ για το κάθε μέλος σε τέσσερα υπομητρώα τα οποία αντιστοιχούν στους κόμβους αρχής i και τέλους j .

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}$$

Αυτόματη διαδικασία ανάλυσης πλαισίων (συν.):

- Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{\mathbf{K}}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, για το κάθε μέλος πρέπει να προστεθούν τα εξής, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής:
 - το μητρώο $\underline{\mathbf{k}}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
 - το μητρώο $\underline{\mathbf{k}}_m^{ij}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j
 - το μητρώο $\underline{\mathbf{k}}_m^{ji}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
 - το μητρώο $\underline{\mathbf{k}}_m^{jj} = \underline{\mathbf{k}}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j

Αυτόματη διαδικασία ανάλυσης πλαισίων (συν.):

- Με την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, U_s , ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία, R_f :

$$\begin{bmatrix} R_f \\ R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_f \\ U_s \end{bmatrix}$$

- Με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες $U_s = U_s^*$ μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων U_f :

$$U_s = U_s^* \quad \Rightarrow \quad R_f = K_{ff} \cdot U_f + K_{fs} \cdot U_s^*$$

- Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις στους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις συνοριακές συνθήκες:

$$R_s = K_{sf} \cdot U_f + K_{ss} \cdot U_s^*$$

- Στη συνέχεια μπορούν να υπολογιστούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$