

## *6. Εισαγωγή στο Πρόγραμμα Ανάλυσης GT-Strudl*

**Εαρινό εξάμηνο 2023**

*Πέτρος Κωμοδρόμος*  
*[komodromos@ucy.ac.cy](mailto:komodromos@ucy.ac.cy)*

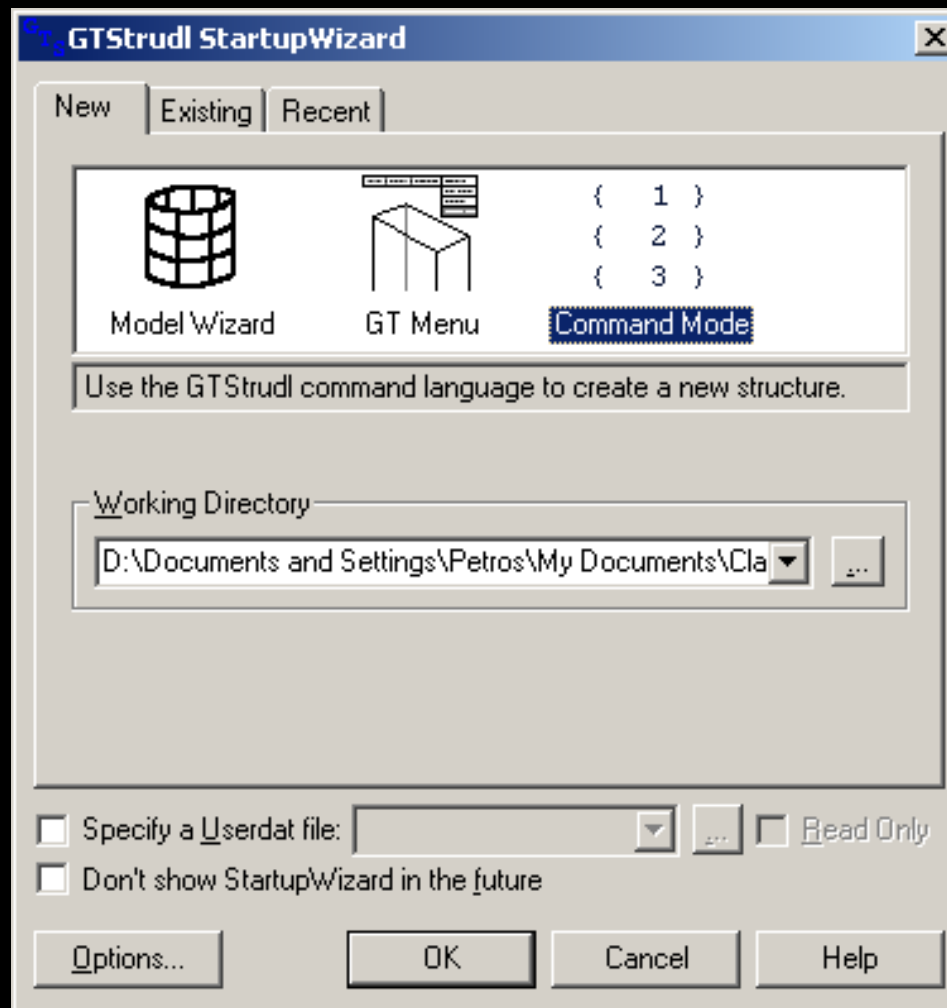
*<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>*

# Γενική Περιγραφή *GT- Strudl*

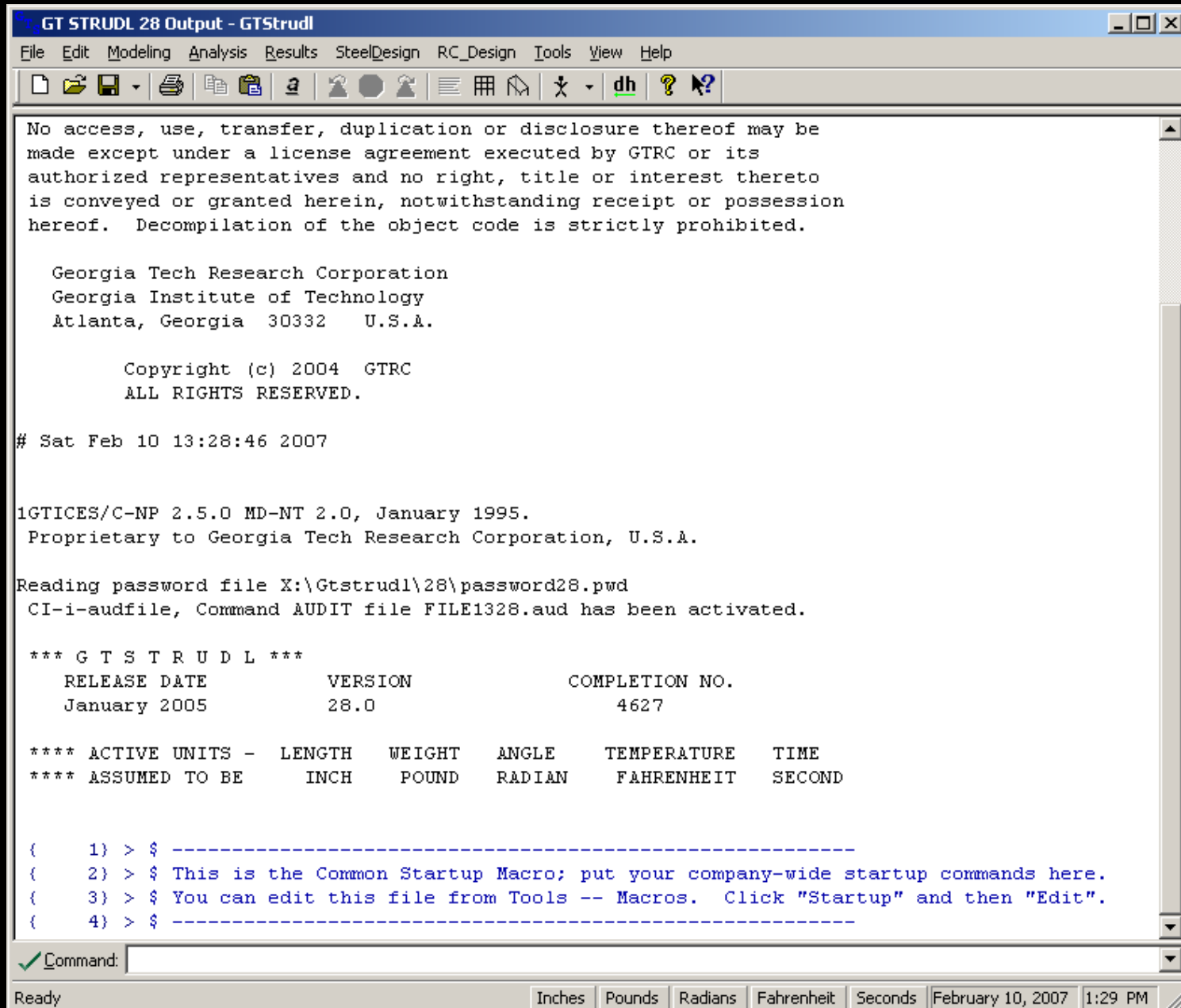
- Το *GT- Strudl* (*Georgia Tech - Structure Design Language*) είναι ένα από τα πρώτα και πιο αξιόπιστα λογισμικά πακέτα στατικής και δυναμικής ανάλυσης κατασκευών πολιτικού μηχανικού.
  - Η αρχική ανοικτή έκδοση του *Strudl* δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε στο *Massachusetts Institute of Technology* (*MIT*)
  - Στη συνέχεια την ανάπτυξη και διάθεση του ανέλαβε η *Georgia Tech Research Corp.* του *Georgia Institute of Technology*
- Το πρόγραμμα αυτό, έχει πολύ ισχυρές δυνατότητες ανάλυσης πολύπλοκων κατασκευών με πολύ ψηλό επίπεδο απόδοσης και ακρίβειας.
- Επίσης, παρέχει πολύ καλές δυνατότητες γραφικής παρουσίασης της κατασκευής, καθώς και τροποποίησης της σχεδίασης της.
- Αυτή σύντομη εισαγωγή παρέχει κάποιες πολύ βασικές εντολές και λειτουργίες που προσφέρει το *GTStrudl* χρησιμοποιώντας κυρίως το *Command Mode*.

## Περιβάλλον εισαγωγής εντολών – *Command mode*

- Για την εισαγωγή στο περιβάλλον εντολών κατά την έναρξη του GT-Strudl, επιλέγουμε το *Command Mode*



Για την  
εισαγωγή  
εντολών  
πληκτρολογούμε  
στο πεδίο  
Command, στο  
κάτω μέρος του  
παραθύρου:



```
GT STRUDL 28 Output - GTStrudl
File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help
[Icons]
No access, use, transfer, duplication or disclosure thereof may be
made except under a license agreement executed by GTRC or its
authorized representatives and no right, title or interest thereto
is conveyed or granted herein, notwithstanding receipt or possession
hereof. Decompilation of the object code is strictly prohibited.

Georgia Tech Research Corporation
Georgia Institute of Technology
Atlanta, Georgia 30332 U.S.A.

Copyright (c) 2004 GTRC
ALL RIGHTS RESERVED.

# Sat Feb 10 13:28:46 2007

1GTICES/C-NP 2.5.0 MD-NT 2.0, January 1995.
Proprietary to Georgia Tech Research Corporation, U.S.A.

Reading password file X:\Gtstrudl\28\password28.pwd
CI-i-audfile, Command AUDIT file FILE1328.aud has been activated.

*** G T S T R U D L ***
RELEASE DATE          VERSION          COMPLETION NO.
January 2005          28.0          4627

**** ACTIVE UNITS - LENGTH WEIGHT ANGLE TEMPERATURE TIME
**** ASSUMED TO BE INCH POUND RADI AN FAHRENHEIT SECOND

( 1) > $ -----
( 2) > $ This is the Common Startup Macro; put your company-wide startup commands here.
( 3) > $ You can edit this file from Tools -- Macros. Click "Startup" and then "Edit".
( 4) > $ -----

[Command: ]
Ready [Inches] [Pounds] [Radians] [Fahrenheit] [Seconds] February 10, 2007 1:29 PM
```

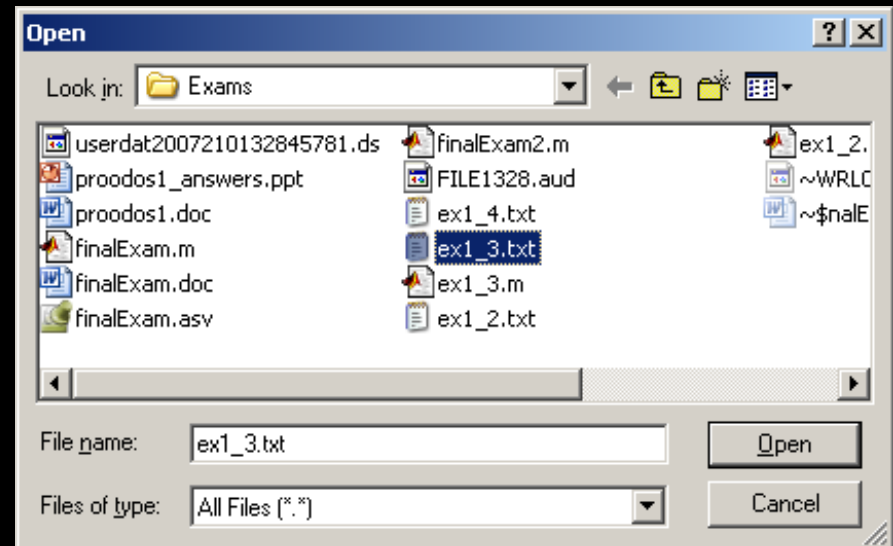
## Περιβάλλον εισαγωγής εντολών – Command mode

- Όταν για την εκτέλεση ενός προβλήματος ανάλυσης έχουμε μια μεγάλη ακολουθία εντολών το GT Strudl μας δίνει τη δυνατότητα να τις φορτώνουμε από κάποιο αρχείο όπου τις αποθηκεύουμε
- Τα αρχεία αυτά μπορούν να δημιουργηθούν σε μορφή απλού αρχείου εντολών το οποίο μπορούμε να εκτελέσουμε εκ των υστέρων ανοίγοντας το με το GT Strudl :

>> File >> Open >> Look in:

επιλέγουμε το directory που έχουμε αποθηκεύσει το πρόγραμμα

>> Files of type: All types (\*.\*)



# Γενικές πληροφορίες από το Help του *GT-Strudl*

The screenshot shows the GT-Strudl software interface. The main window displays the following text:

```
*****  
PROBLEM - ex1_3      TITLE - PLANE TRUSS STRUCTURE  
  
ACTIVE UNITS  MM      N      RAD  DEGC  SEC  
  
-----  
---  LOADING - 1      APPLIED JOINT LOADS  
-----  
  
RESULTANT JOINT LOADS SUPPORTS  
  
JOINT      /-----FORCE-----//-----MO:  
           X FORCE      Y FORCE      Z FORCE      X MOMENT      Y MO:  
1         GLOBAL      243902.4531250      0.0000000  
2         GLOBAL      76904.1562500      57678.1171875  
3         GLOBAL      0.0000000      -274977.1250000  
4         GLOBAL      235290.9531250      -176468.2187500  
5         GLOBAL      243902.4531250      0.0000000  
6         GLOBAL      0.0000000      -206232.8281250  
  
{ 58) >  
{ 59) > $FINISH  
{ 59) >
```

The Help menu is open, showing the following options:

- Topics
- Index
- What's This?
- Reference Documentation
  - Getting Started
  - Analysis User Guide
  - Design User Guide
  - GT STRUDL Release Guide
  - GMenu
  - Reference Manuals
    - Volume 1
    - Volume 2A
    - Volume 2B (old steel codes)
    - Volume 3
    - Volume 4
    - Volume 5
    - Volume 7
    - Volume 8
    - Abstract of Commands
- Help on Help...
- About GTStrudl...

The Command line at the bottom is empty.

Reference Manual, Volume 1: General commands, basic frame analysis

# Σχόλια

- Ο χρήστης μπορεί να περιλάβει πληροφορίες με μορφή σχολίων σε όλο το αρχείο χρησιμοποιώντας το σύμβολο \$.
- Τέτοια σχόλια είναι ιδιαίτερα χρήσιμα καθώς μπορούν να διευκρινίσουν περαιτέρω το πρόβλημα που εισάγεται για το χρήστη αλλά και για οποιονδήποτε άλλον θελήσει να εκτελέσει το πρόγραμμα.

# Σύντομη Περιγραφή Βασικών Εντολών του *GT Strudl*

*STRUDL '...''...'*

STRUDL 'όνομα προβλήματος 1-8 χαρακτήρ.' 'τίτλος προβλήματος 1-64 χαρακτήρ.'

*§...*

Οτιδήποτε μετά το σύμβολο § θεωρείται σχόλιο και δεν εκτελείται

*TYPE PLANE TRUSS*

*Τύπος κατασκευής*

Επίπεδο δικτύωμα

*TYPE PLANE FRAME*

Επίπεδος πλαίσιακός φορέας

*TYPE SPACE TRUSS*

Χωρικό δικτύωμα

*TYPE SPACE FRAME*

Χωρική πλαίσιακός κατασκευή

*UNITS ...*

*Καθορισμός μονάδων μέτρησης*

*- Inches, Feet, Millimeters,  
Centimeters, Meters*

- Μήκους

*- Pounds, Kips, Tons, Kilograms,  
Metric Tons, Newtons, KiloNewtons*

- Δύναμης

*- Radians, Degrees, Cycles*

- Στροφής



*JOINT COORDINATES*

*Συντεταγμένες κόμβων*

... ..

Κόμβος Συντεταγμ. X Συντεταγμ. Y Συντεταγμ. Z

*STATUS SUPPORT JOINTS ...*

Καθορισμός δεσμεύσεων (στηρίξεων) κόμβων

*JOINT RELEASES*

*Καθορισμός ελευθεριών στηρίξεων*

... FORCE ...

Κόμβος ΔΥΝΑΜΗ άξονας ελευθερίας

... MOMENT ...

Κόμβος ΡΟΠΗ άξονας ελευθερίας

*MEMBER INCIDENCES*

*Καθορισμός συνδεσμολογίας μελών*

... ..

Μέλος Κόμβος Αρχής Κόμβος Τέλους

*CONSTANTS*

*Σταθερές*

... ..

Σταθερά Τιμή σταθεράς

*MATERIAL ...*

Υλικό κατασκευής ράβδων ή δοκών (μπορούν να καθοριστούν αυτόματα ιδιότητες του υλικού)

π.χ: STEEL CONCRETE

<i>MEMBER PROPERTIES</i>	<i>Ιδιότητες μελών</i>
... ..	Μέλος ιδιότητα (AX, AY, AZ, IX, IY, IZ) Τιμή
<i>LOADING ... ('...')</i>	Φόρτιση αριθμός φόρτισης ('χαρακτηρισμ. φόρτισης')
<i>JOINT LOADS</i>	<i>Επικόμβια φορτία</i>
... FORCE ... ..	Κόμβος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης (+/-)Τιμή
... MOMENT ... ..	Κόμβος ΡΟΠΗ άξονας φόρτισης (+/-)Τιμή
<i>MEMBER LOADS</i>	<i>Φόρτιση μέλους/μελών</i>
... FORCE ... LINEAR WA ... WB ... LA ... LB ...	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ WA (+/-) τιμή φορτίου στο A, WB (+/-) τιμή φορτίου στο B, LA σημείο φόρτισης A (από την αρχή του μέλους), LB σημείο φόρτισης B (από την αρχή του μέλους)
... FORCE ... UNIFORM W ... LA ... LB ...	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ W (+/-) τιμή, LA σημείο φόρτισης A (από την αρχή του μέλους), LB σημείο φόρτισης B (από την αρχή του μέλους)
... FORCE ... CONC P ... L ...	Μέλος ΔΥΝΑΜΗ άξονας φόρτισης ΣΥΓΚΕΝΤΡ. ΦΟΡΤΙΟ P (+/-)τιμή, L σημείο φόρτισης
... MOMENT ... CONC M ... L ...	Μέλος ΡΟΠΗ άξονας φόρτισης ΣΥΓΚΕΝΤΡ. ΡΟΠΗ M (+/-)τιμή, L σημείο φόρτισης
<i>JOINT DISPLACEMENTS</i>	<i>Μετακινήσεις κόμβου/ων</i>
... DISPL ... ..	Μέλος ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ άξονας μετατόπ. (+/-)Τιμή

*QUERY*

Συνοψίζονται οι εντολές εισόδου

(παρουσιάζεται μήνυμα εάν η κατασκευή δεν είναι ευσταθής, εάν κάποιο από τα δεδομένα εισόδου λείπει ή ενδέχεται να είναι λανθασμένο)

*STIFFNESS ANALYSIS*

Στατική ανάλυση (ανάλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας)

*OUTPUT DECIMAL ...*

Αριθμός σημαντικών ψηφίων εξόδου

<i>LIST DISPLACEMENTS</i>	Παρουσιάζει τις μετακινήσεις των κόμβων
<i>LIST REACTIONS</i>	Παρουσιάζει τις αντιδράσεις στις στηρίξεις
<i>LIST FORCES</i>	Παρουσιάζει τα εντατικά μεγέθη των μελών
<i>CINPUT</i>	Επιτρέπει την εισαγωγή περαιτέρω εντολών από το πληκτρολόγιο
<i>FINISH</i>	Τερματίζει την εκτέλεση του <i>GT Strudl</i>

# GT Menu

- Αντίστοιχα με το περιβάλλον εισαγωγής εντολών υπάρχει και το περιβάλλον εισαγωγής γραφικά (*GT Menu*) και οι εντολές που αναφέρονται αναλυτικά πιο πάνω, μπορούν να εισαχθούν με αντίστοιχο γραφικό τρόπο.



GTMenu Structural Modeling Tool Version 28

File Create Edit Display Results Check Options Units Coordinate System Utilities Help

Print Inquire Active 1 Zoom Label Rotate Redraw Redraw Solid View

Select from a Menu with a left-click, get HELP with a right-click or click in the Graphics window.

Display Model: Default Mode: All

UNITS: MM N DEG CEN SEC Arrow Keys = Rotate

**Member & Element**

Shrink Factor: 1.0 (0.1-1.0)

Mesh Boundary Outline

Add Interior Detail

**Generate Display List**

**Mark Loads**

Joint  Member

Element  All

**Mark Properties**

Section  Material

All types

**Mark Joint**

Supported D.O.F.

**Draw Member**

Releases

Section Names

Local Axes

Beta/Profiles

**Draw Element**

Incidence Order

Planar Axes

Color by Thickness

Hit List All Line Plane Volume Bound Unbound Point Joint Coord Global Pln

# Scope Environment

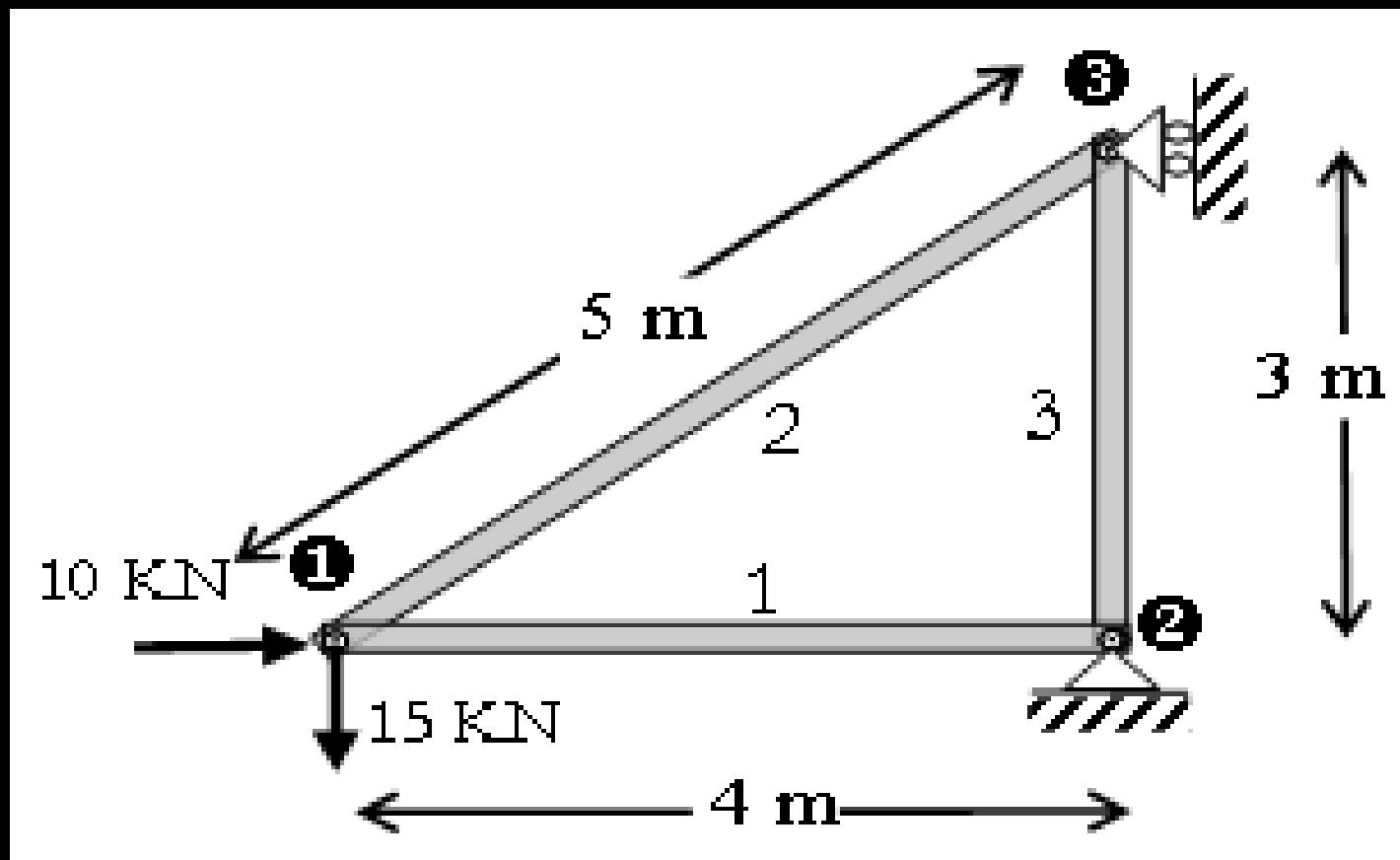
- Επίσης, υπάρχει και το Scope Environment για έλεγχο των δεδομένων και αποτελεσμάτων της ανάλυσης:

The screenshot displays the GTStrudl software interface. The main window shows a 3D coordinate system with several points and lines. A menu is open, highlighting the 'Scope Environment' option. A dialog box titled 'Scope Environment' is visible, showing a 3D coordinate system and input fields for x, y, and z coordinates. A 'STRUDL Scope Output' window displays the following data:

```
STRUDL Scope Output
X 5000.00000
Y 7000.00000
Z 0.00000
COORD JOINT 1
X 0.00000
Y 3000.00000
Z 0.00000
DISP JT 7 LD 1
X -1.21951
Y 0.82493
Z 0.00000
```

The interface also shows a toolbar with various icons, including a red circle around the 'Scope Environment' icon. The status bar at the bottom indicates 'Ready' and provides units (Millimeters, Newtons, Degrees, Centigrade, Seconds) and the date/time (February 10, 2007, 1:59 PM).

# Παράδειγμα Επίλυσης Δικτυώματος



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A = 0.001 \text{ m}^2$$

# Αρχείο Δεδομένων

```
STRUDL 'Paradeigma-1' 'Epipedo Diktywma'  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
```

```
$ Typos kataskeyhs  
TYPE PLANE TRUSS
```

```
$ Ka8orismos monadwn  
UNITS M N CENTIGRADE
```

```
$ Syntetagmenes kombwn  
JOINT COORDINATES
```

```
1 0 0  
2 4 0  
3 4 3
```



\$ Καθρισμός στήριξης  
STATUS SUPPORT JOINTS 2 3

\$ Καθρισμός ελεύθερης  
JOINT RELEASES  
3 FORCE Y \$ Roller support

\$ Καθρισμός συνδεσμολογίας μελών  
MEMBER INCIDENCES

1 1 2

2 1 3

3 2 3

\$ Καθορισμός μετρού ελαστικότητας

CONSTANTS

E 200E9 ALL

\$ Καθορισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών μελών

MEMBER PROPERTIES

1 TO 3 AX 0.001

\$ Καθορισμός φορέων

LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS'

\$ Επικομβία φορέα

JOINT LOADS

1 FORCE X 10000

1 FORCE Y -15000

QUERY

STIFFNESS ANALYSIS

UNITS mm KN CENTIGRADE

OUTPUT DECIMAL 5

LIST FORCES

LIST DISPLACEMENTS

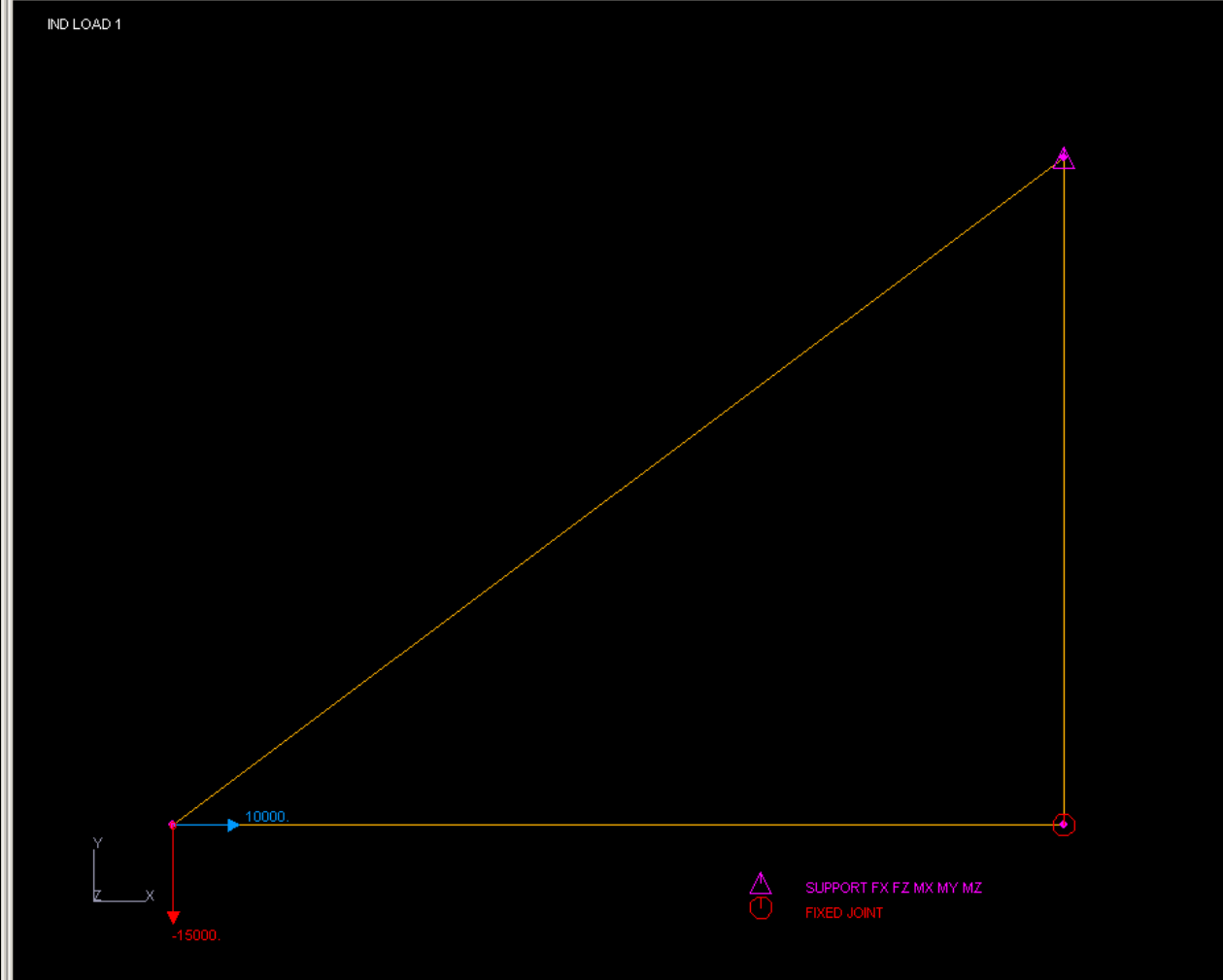
CINPUT

\$FINISH

Print Inquire Active 1 Zoom Label Rotate Redraw Redraw Solid View

Display Load: Default Mode: All  
 No applied member loads.  
 No elements in model.

UNITS: M N DEG CEN SEC Arrow Keys = Rotate



Display Load

**Load Scale**  
 Factor:  (0.1-5.0)

**Coordinate System**  
 Global Sys  Input Sys

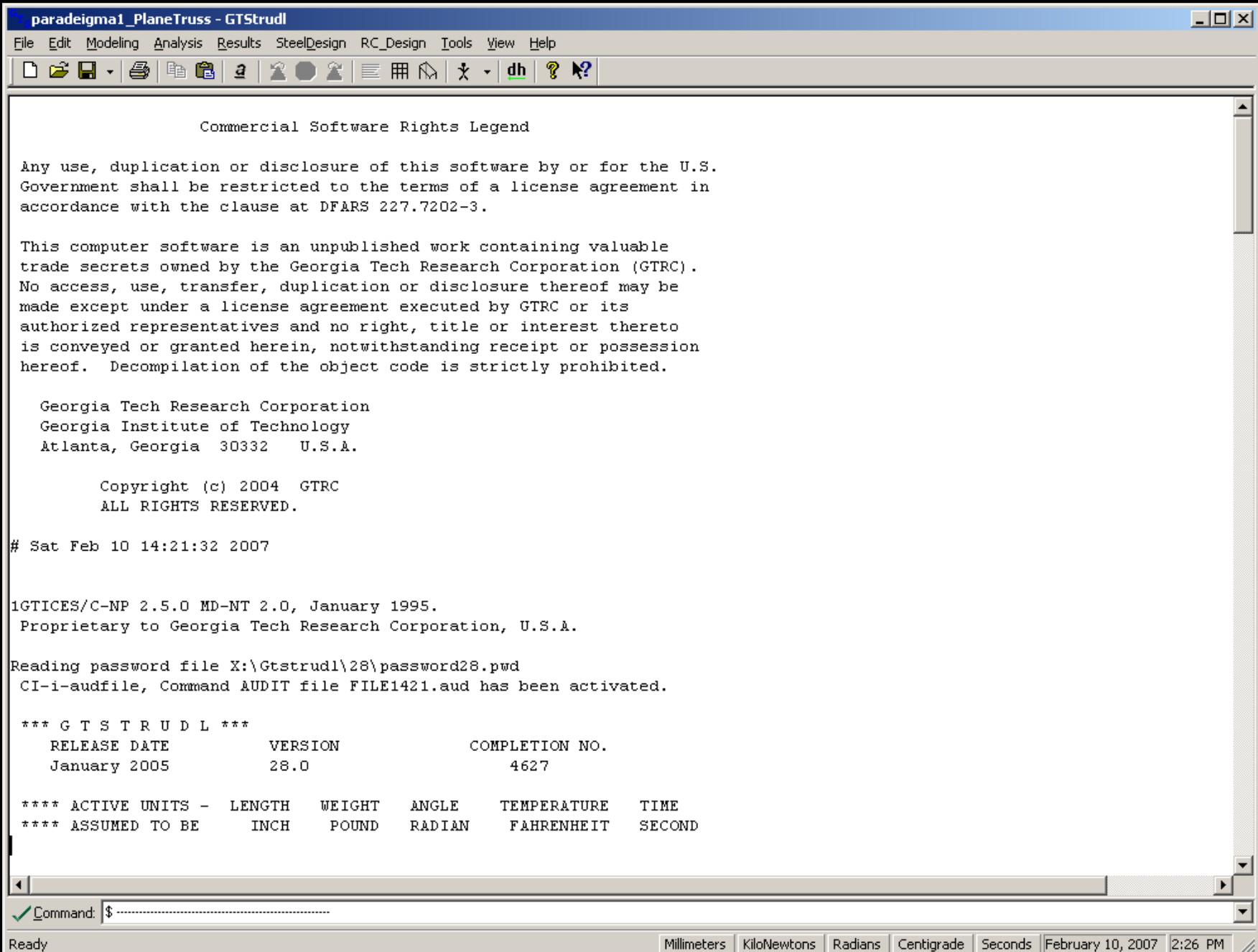
**Format**  
 Vectors & Values  
 Vectors Only

**Range**  
 All Loadings  
 Fractional Limit  
 Absolute Value Limit

**Type**  
 All  Conc & Dist  
 Joint  Concentrated  
 Member  Distributed  
 Element

**Load Type**  
 Forces & Moments  
 Jt. Displacement/Mem. Distortion  
 Temperature

Select Load:



Commercial Software Rights Legend

Any use, duplication or disclosure of this software by or for the U.S. Government shall be restricted to the terms of a license agreement in accordance with the clause at DFARS 227.7202-3.

This computer software is an unpublished work containing valuable trade secrets owned by the Georgia Tech Research Corporation (GTRC). No access, use, transfer, duplication or disclosure thereof may be made except under a license agreement executed by GTRC or its authorized representatives and no right, title or interest thereto is conveyed or granted herein, notwithstanding receipt or possession hereof. Decompilation of the object code is strictly prohibited.

Georgia Tech Research Corporation  
Georgia Institute of Technology  
Atlanta, Georgia 30332 U.S.A.

Copyright (c) 2004 GTRC  
ALL RIGHTS RESERVED.

# Sat Feb 10 14:21:32 2007

1GTICES/C-NP 2.5.0 MD-NT 2.0, January 1995.  
Proprietary to Georgia Tech Research Corporation, U.S.A.

Reading password file X:\Gtstrudl\28\password28.pwd  
CI-i-audfile, Command AUDIT file FILE1421.aud has been activated.

\*\*\* G T S T R U D L \*\*\*

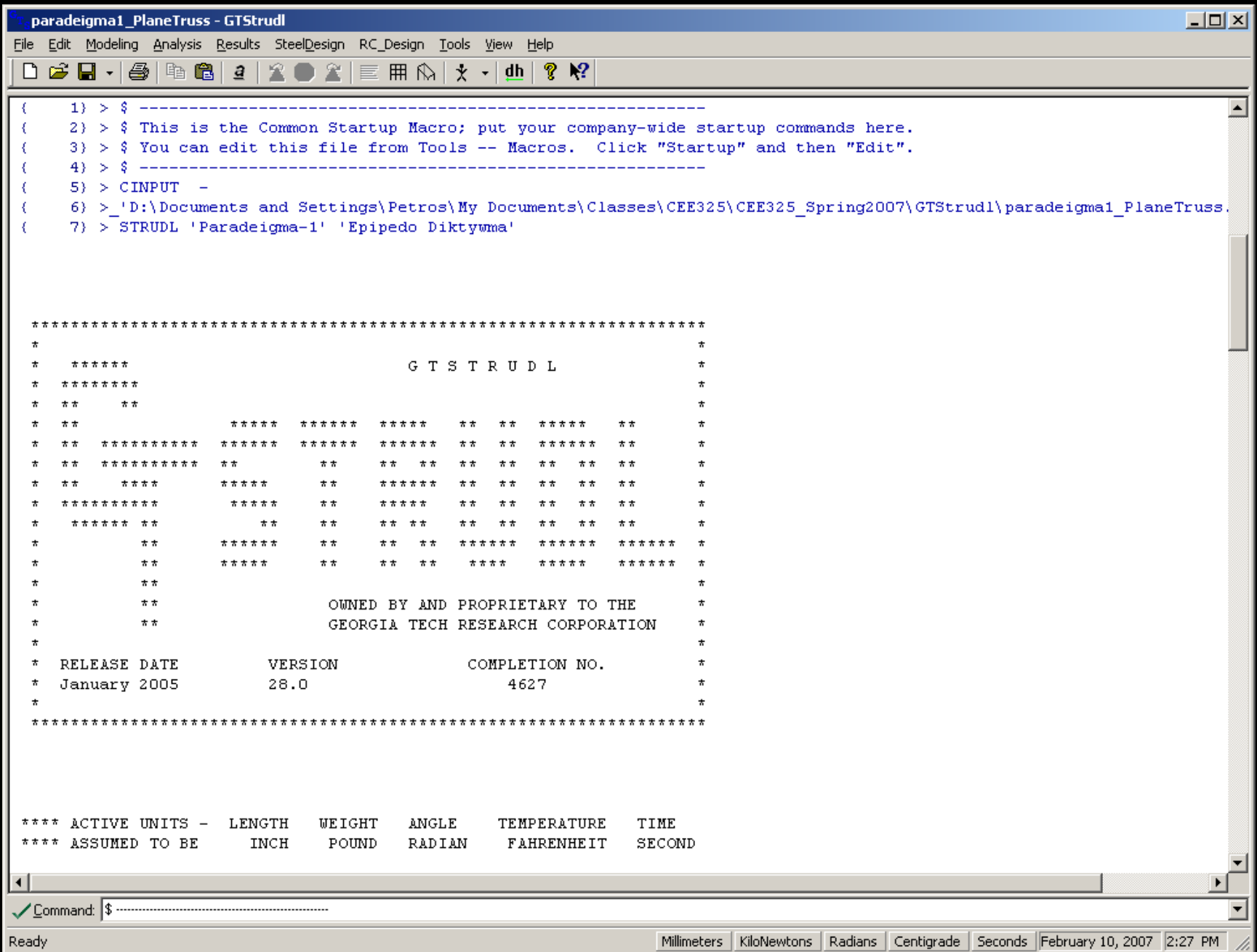
RELEASE DATE	VERSION	COMPLETION NO.
January 2005	28.0	4627

**** ACTIVE UNITS -	LENGTH	WEIGHT	ANGLE	TEMPERATURE	TIME
**** ASSUMED TO BE	INCH	POUND	RADIAN	FAHRENHEIT	SECOND

✓ Command: \$ .....

Ready

Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:26 PM



paradeigma1\_PlaneTruss - GTStrudl

File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC\_Design Tools View Help

```

**** ACTIVE UNITS - LENGTH WEIGHT ANGLE TEMPERATURE TIME
**** ASSUMED TO BE INCH POUND RADIAN FAHRENHEIT SECOND

( 8) >
( 9) > $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
(10) >
(11) > $ Typos kataskeyhs
(12) > TYPE PLANE TRUSS
(13) >
(14) > $ Ka8orismos monadwn
(15) > UNITS M N CENTIGRADE
(16) >
(17) > $ Syntetagmenes kombwn
(18) > JOINT COORDINATES
(19) > 1 0 0
(20) > 2 4 0
(21) > 3 4 3
(22) >
(23) > $ Ka8orismos sthri3ewn
(24) > STATUS SUPPORT JOINTS 2 3
(25) >
(26) > $ Ka8orismos eley8eriwn
(27) > JOINT RELEASES
(28) > 3 FORCE Y $ Roller support
(29) >
(30) >
(31) > $ Ka8orismos syndesmologias melwn
(32) > MEMBER INCIDENCES
(33) > 1 1 2
(34) > 2 1 3
(35) > 3 2 3
(36) >
(37) > $ Ka8orismos metroy elastikohtas
(38) > CONSTANTS
(39) > E 200E9 ALL
(40) >
(41) > $ Ka8orismos gewmetrikwn xarakthristikwn melwn
(42) > MEMBER PROPERTIES
(43) > 1 TO 3 AX 0.001

```

✓ Command: \$

Ready Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:27 PM

```

paradeigma1_PlaneTruss - GTStrudl
File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC_Design Tools View Help
[Icons]
( 44) >
( 45) > $ Ka8orismos forisewn
( 46) > LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS'
( 47) > $ Epikombia fortia
( 48) > JOINT LOADS
( 49) > 1 FORCE X 10000
( 50) > 1 FORCE Y -15000
( 51) >
( 52) > QUERY

-----

**** CURRENT GTSTRUDL PROBLEM STATISTICS ****

ACTIVE UNITS:      M      N      RAD      DEGC      SEC

INPUT MODE: ADDITIONS          SCAN MODE INITIATED: NO

CURRENT STRUCTURAL TYPE: PLANE TRUSS

          JOINTS      MEMBERS      ELEMENTS      SUPERELEMENTS
ACTIVE          3          3          0          0
INACTIVE        0          0          0          0

RIGID BODIES          0
JOINT TIES            0

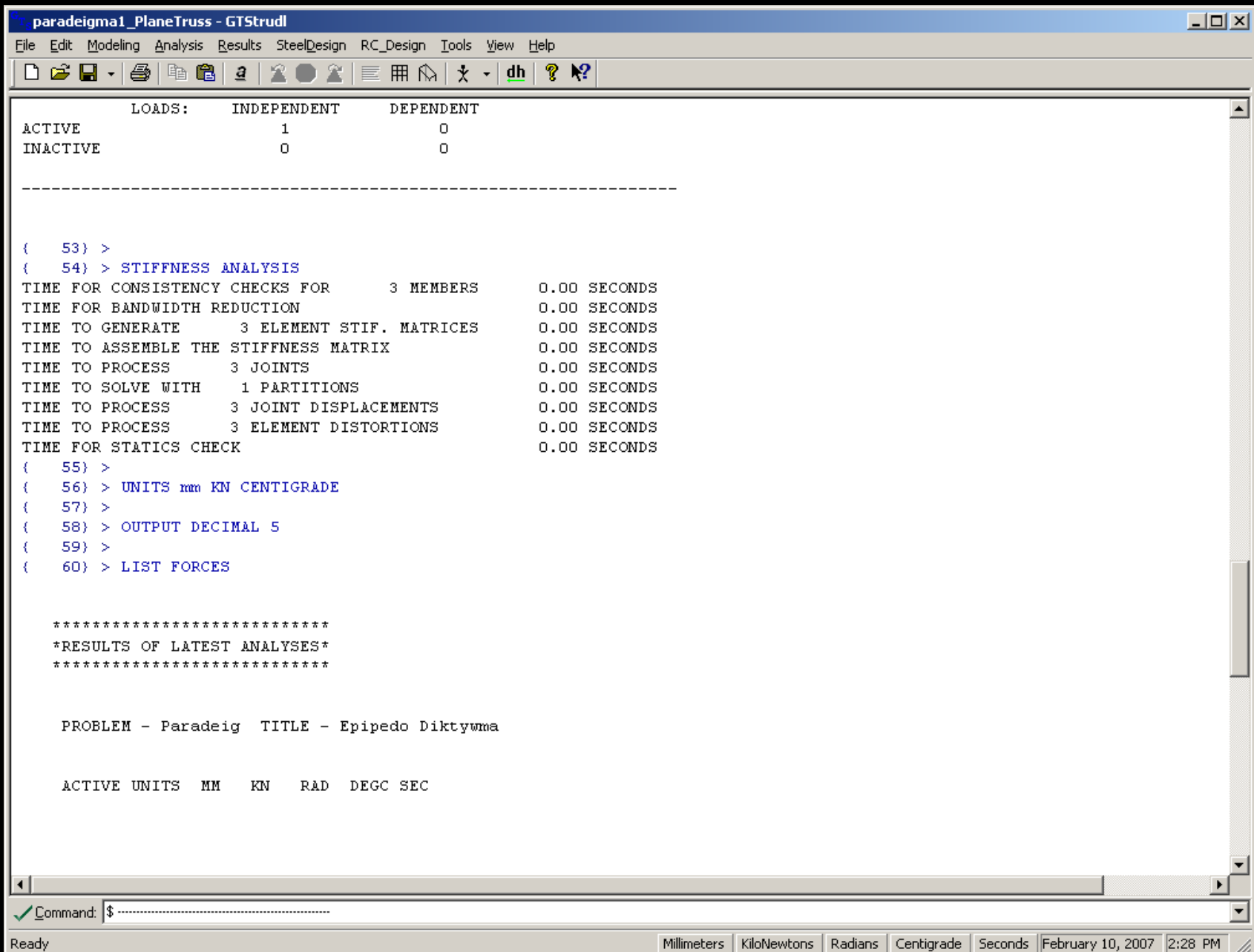
          LOADS:      INDEPENDENT      DEPENDENT
ACTIVE          1          0
INACTIVE        0          0

-----

Command: $
Ready
[Units: Millimeters | KiloNewtons | Radians | Centigrade | Seconds | February 10, 2007 | 2:28 PM]

```





paradeigma1\_PlaneTruss - GTStrudl

File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC\_Design Tools View Help

( 58) > OUTPUT DECIMAL 5  
 ( 59) >  
 ( 60) > LIST FORCES

\*\*\*\*\*  
 \*RESULTS OF LATEST ANALYSES\*  
 \*\*\*\*\*

PROBLEM - Paradeig TITLE - Epipedo Diktywma

ACTIVE UNITS MM KN RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 APPLIED JOINT LOADS ---

MEMBER FORCES

MEMBER	JOINT	FORCE				MOMENT	
		AXIAL	SHEAR Y	SHEAR Z	TORSIONAL	BENDING Y	BENDING Z
1	2	-30.00000					
2	3	25.00000					
3	3	-15.00000					

( 61) > LIST DISPLACEMENTS

✓ Command: \$

Ready Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:29 PM

paradeigma1\_PlaneTruss - GTStrudl

File Edit Modeling Analysis Results SteelDesign RC\_Design Tools View Help

{ 61} > LIST DISPLACEMENTS

\*\*\*\*\*  
 \*RESULTS OF LATEST ANALYSES\*  
 \*\*\*\*\*

PROBLEM - Paradeig TITLE - Epipedo Diktywma

ACTIVE UNITS MM KN RAD DEGC SEC

--- LOADING - 1 APPLIED JOINT LOADS ---

RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS SUPPORTS

JOINT		DISPLACEMENT			ROTATION		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
2	GLOBAL	0.00000	0.00000				
3	GLOBAL	0.00000	-0.22500				

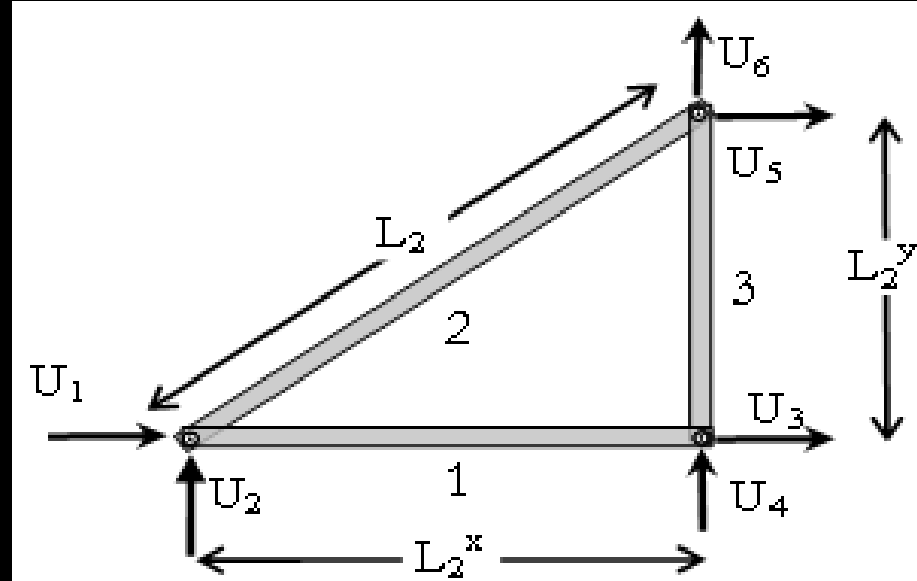
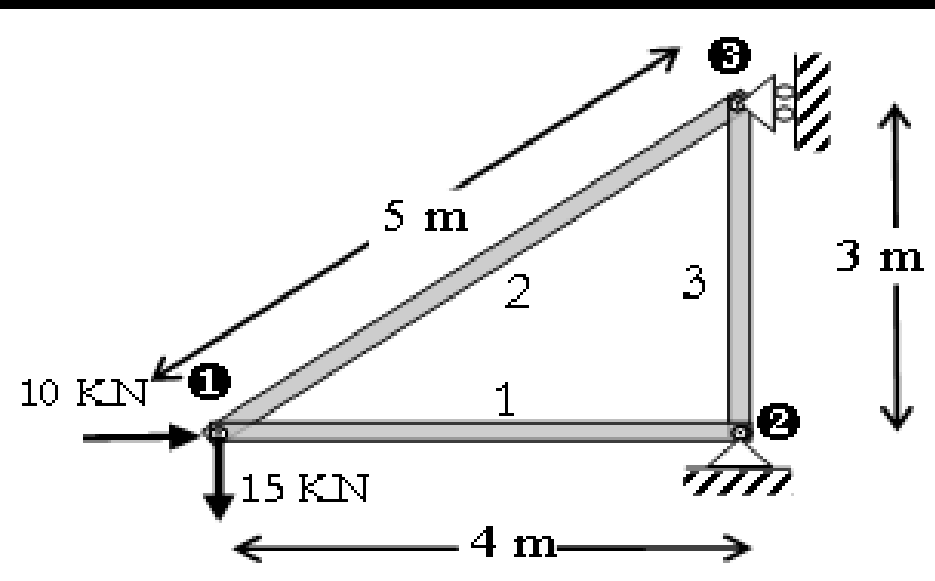
RESULTANT JOINT DISPLACEMENTS FREE JOINTS

JOINT		DISPLACEMENT			ROTATION		
		X DISP.	Y DISP.	Z DISP.	X ROT.	Y ROT.	Z ROT.
1	GLOBAL	0.60000	-2.06667				

Command: \$

Ready Millimeters KiloNewtons Radians Centigrade Seconds February 10, 2007 2:30 PM

# Αναλυτική Επίλυση



$$E = 200 \text{ GPa}$$



$$A = 0.001 \text{ m}^2$$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5 \cdot 10^7$
2	5	$4 \cdot 10^7$
3	3	$6.667 \cdot 10^7$

$$\underline{k}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7$$

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \Rightarrow \begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_1 \\ s'_2 \\ s'_2 \end{bmatrix} = \underline{k}'_m \cdot \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	$\theta_m$	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1

$$\rightarrow \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$



$$\underline{k}_1 = \underline{T}_1^T \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{k}_2 = \underline{T}_2^T \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.92 & -1.44 \\ -2.56 & -1.92 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



$$\underline{k}_3 = \underline{T}_3^T \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.667 & 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Ράβδος	$u_1^x$	$u_1^y$	$u_2^x$	$u_2^y$
1	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
2	$U_1$	$U_2$	$U_5$	$U_6$
3	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής,  $\underline{K}$ , με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής.



$$\begin{array}{c}
 U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 U_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$



## Μητρώο δυσκαμψίας κατασκευής



$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας  $\underline{K}$  είναι ιδιάζων (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζων φαίνεται από το βαθμό (*rank*) του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3 αντί με 6, που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και συνεπώς και οι διαστάσεις του μητρώου.

## Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$



$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$



$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$\underline{K} = \begin{matrix} & f & f & s & s & s & f \\ \begin{matrix} f \\ f \\ s \\ s \\ s \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.44 \\ -1.92 & -1.44 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 \\ 0 & 0 & -1.92 \\ 0 & -6.667 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$



$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$



$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} 0.600 \\ -2.067 \\ -0.225 \end{bmatrix} \text{ mm}$$


$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$



$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 15,000 \\ 20,000 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ KN}$$


# Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \underline{k}'_I \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \underline{k}'_I \cdot \underline{T}'_I \cdot \underline{U}_I$$


$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$

# Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}'_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{U}_2$$


$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$

# Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}'_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 \cdot \underline{U}_3$$



$$\begin{bmatrix} S_1^{x'} \\ S_1^{y'} \\ S_2^{x'} \\ S_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ KN}$$