5. Μέθοδοι δυσκαμψίας (μετακινήσεων) για επίλυση δικτυωμάτων

Εαρινό εξάμηνο 2023

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

http://www.eng.ucy.ac.cy/petros

- ***Μέθοδος μετακινήσεων ή δυσκαμψίας***
  - Εισαγωγή στις μεθόδους μετακινήσεων ή δυσκαμψίας
  - *Επίλυση συστημάτων ελατηρίων*
    - Γενική διαδικασία μεθόδου μετακινήσεων ή δυσκαμψίας
    - Διαδικασία άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας
  - ***Ανάλυση δικτυωμάτων με τη μέθοδο δυσκαμψίας***
    - Μητρώα δυσκαμψίας ράβδων
    - Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων
    - Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας για δικτυώματα
    - Κεκλιμένες συνοριακές συνθήκες
    - Ανάλυση χωρικών δικτυωμάτων
    - Προγραμματισμός άμεσης μεθόδου δυσκαμψίας για δικτυώματα
    - Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

- *μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι δυνάμεις και ροπές

- *μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι μετακινήσεις

Μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας

- βασίζεται στα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής βάσει των οποίων σχηματίζεται το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας ***K*** της κατασκευής
- οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι οι μετακινήσεις των ελεύθερων κόμβων της κατασκευής
  - επιλύνοντας το σύστημα των εξισώσεων το οποίο σχηματίζεται, υπολογίζονται οι μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας των κόμβων της κατασκευής
  - ακολούθως, χρησιμοποιώντας τα επιμέρους μητρώα δυσκαμψίας του κάθε μέλους, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του κάθε μέλους
- χρήσιμη για επιλύσεις γενικών προβλημάτων με Η/Υ
- εύκολη αυτοματοποίηση και προγραμματισμός της μεθόδου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η σύγχρονη ανάλυση των κατασκευών γίνεται με αξιοποίηση των Η/Υ, με χρήση μητρώων και μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Η Μέθοδος Δυσκαμψίας ή, όπως άλλως είναι γνωστή, Μέθοδος των Μετακινήσεων, είναι η πιο συστηματική μέθοδος ανάλυσης, η οποία εύκολα προγραμματίζεται σε Η/Υ, αφού ακολουθεί μια πλήρως συστηματοποιημένη διαδικασία. Σε αντίθεση με τη Μέθοδο Ευκαμψίας, όπου ο τρόπος επίλυσης ενός φορέα διαφέρει ανάλογα με το αν ο φορέας είναι ισοστατικός ή υπερστατικός, η διαδικασία επίλυσης μιας κατασκευής με τη Μέθοδο Δυσκαμψίας είναι η ίδια είτε η κατασκευή είναι ισοστατική είτε υπερστατική.

Επιπλέον, με τη Μέθοδο Δυσκαμψίας υπολογίζονται κατευθείαν οι μετακινήσεις των κόμβων και τα εντατικά μεγέθη των μελών της κατασκευής. Αντιθέτως, με τη Μέθοδο Ευκαμψίας δεν υπολογίζονται άμεσα οι μετακινήσεις των κόμβων και στην περίπτωση χρήσεως συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού δεν είναι καν δυνατό να υπολογιστούν οι μετακινήσεις βαθμών ελευθεριών, οι οποίες δε λήφθηκαν υπόψη στο σχηματισμό του μητρώου ευκαμψίας του φορέα.

Αν και η Μέθοδος Δυσκαμψίας είναι αυτοματοποιήσιμη και εύκολα προγραμματιζόμενη σε Η/Υ, η αναλυτική επίλυση ενός φορέα με τη μέθοδο αυτή χωρίς Η/Υ είναι γενικά αρκετά χρονοβόρα και δύσκολη διαδικασία. Έτσι, τα παραδείγματα τα οποία θα λυθούν αναλυτικά θα είναι τα απλούστερα δυνατά, ώστε να γίνει κατανοητή η διαδικασία της μεθόδου.

Βάσεις μεθόδου δυσκαμψίας

- εξισώσεις ισορροπίας
- καταστατικό νόμο του υλικού
- συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων

⇨ κοινός τρόπος ανάλυσης ισοστατικών και υπερστατικών φορέων

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Γενική περιγραφή μεθόδου

Κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Δυσκαμψίας ή Μετακινήσεων, απαιτείται ο καθορισμός και η αρίθμηση των επιμέρους μελών καθώς και των κόμβων και των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας. Η μέθοδος αυτή, τόσο για ισοστατικούς όσο και για υπερστατικούς φορείς βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας, στον καταστατικό νόμο του υλικού, δηλαδή τη σχέση τάσεων παραμορφώσεων και στις συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων.

Συγκεκριμένα, αφού καθοριστούν οι σχέσεις εντατικών μεγεθών $\underline{s}_i$ και των αντίστοιχων μετακινήσεων $\underline{u}_i$ των μελών ενός φορέα, βάσει των μητρώων δυσκαμψίας $\underline{K}_i$ των επιμέρους μελών της κατασκευής, εφαρμόζονται εξισώσεις ισορροπίας στους κόμβους και χρησιμοποιώντας κατάλληλα μητρώα μετασχηματισμών, σχηματίζεται το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής. Στη συνέχεια, αφού εφαρμοστούν οι συνοριακές συνθήκες, επιλύεται το σχηματιζόμενο σύστημα των εξισώσεων, από το οποίο προκύπτουν οι μετακινήσεις $\underline{U}$ των κόμβων της κατασκευής.

Ακολούθως, με γνωστές τις μετακινήσεις των κόμβων, υπολογίζονται οι αντιδράσεις στις στηρίξεις χρησιμοποιώντας το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, ενώ τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του κάθε μέλους υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα επιμέρους μητρώα δυσκαμψίας του κάθε μέλους.

Συστήματα συντεταγμένων

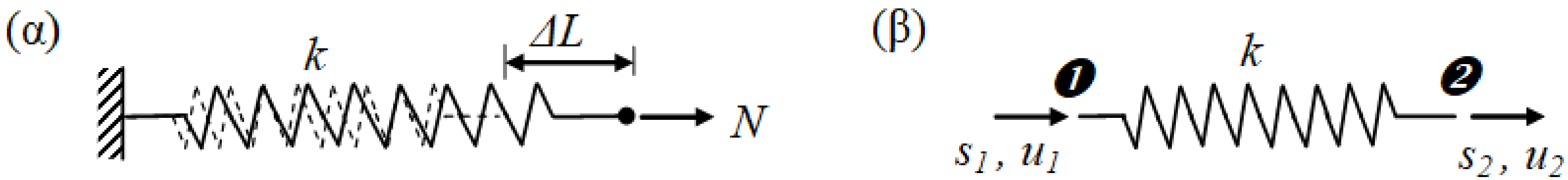
Γενικά, στη Μέθοδο Δυσκαμψίας χρησιμοποιούνται δύο είδη συστημάτων συντεταγμένων, το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων και τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων. Το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων συνήθως χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των εξωτερικά επιβαλλόμενων επικόμβιων φορτίων και των μετακινήσεων των κόμβων. Τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων συνήθως χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των επιβαλλόμενων στα μέλη φορτίων, των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των μελών και των εντατικών μεγεθών των μελών. Σε μερικές περιπτώσεις, χρησιμοποιούνται τοπικά συστήματα σε κόμβους, όπως π.χ. στην περίπτωση κεκλιμένων στηρίξεων, ώστε να είναι δυνατή η έκφραση των εξισώσεων ισορροπίας στις διευθύνσεις που είναι ορισμένη η μετακίνηση.

Ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται έτσι ώστε να διευκολύνει τον καθορισμό των χαρακτηριστικών και φορτίων του αντίστοιχου μέλους καθώς και την αποτελεσματική αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Έτσι, ο τοπικός άξονας x_1' συμπίπτει συνήθως με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής και καθορίζει τον κόμβο αρχής i και τέλους j του μέλους. Όμως, για την εφαρμογή της μεθόδου και το σχηματισμό του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, απαιτούνται μετασχηματισμοί από το τοπικό στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

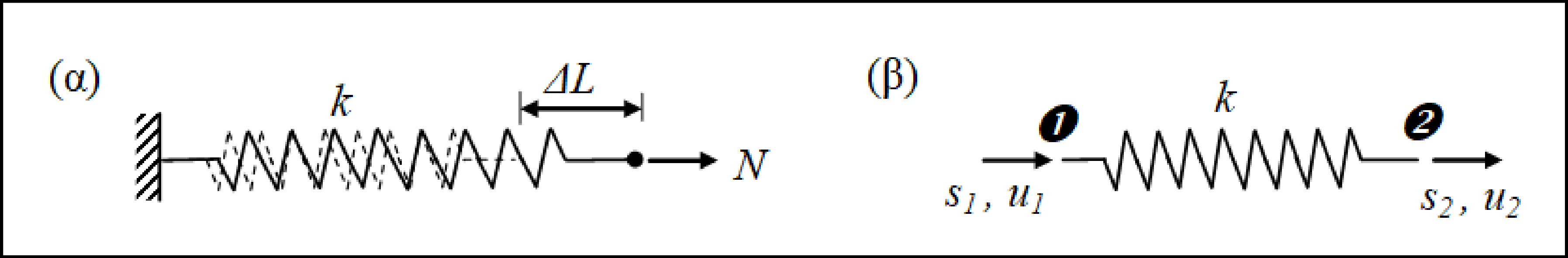
Επίλυση συστημάτων ελατηρίων με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Η διαδικασία της Μεθόδου Δυσκαμψίας περιγράφεται σε αυτή την παράγραφο για την απλή περίπτωση ελατηρίων ώστε να εξηγηθεί η διαδικασία χωρίς την πολυπλοκότητα των μετασχηματισμών, οι οποίοι απαιτούνται σε δικτυωτές και πλαισιακές κατασκευές για να εκφρασθούν δυνάμεις και μετακινήσεις από το τοπικό σύστημα του κάθε μέλους στο κοινό απόλυτο (άλλως, καθολικό) σύστημα συντεταγμένων, αλλά και τα πιο πολύπλοκα μητρώα δυσκαμψίας δοκών.

Ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου k (Σχήμα 9.1.α) έχει επιμήκυνση $\Delta\mathrm{L}$ λόγω εξάσκησης δύναμης N, η οποία εκφράζεται από τον τύπο: $\mathrm{N} = \mathrm{k} \cdot \Delta\mathrm{L}$.



Σχήμα 9.1: Ελατήριο: (α) αξονική δύναμη και επιμήκυνση ελατηρίου (β) εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα του ελατηρίου.



Ορίζοντας σαν s_1, s_2 και u_1, u_2 τις δυνάμεις και μετακινήσεις, αντίστοιχα, που ασκούνται στα άκρα ενός ελατηρίου, μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση που συνδέει τις μετακινήσεις με τις δυνάμεις στα άκρα του μέλους και να προσδιορίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας k του μέλους.

$$\underline{s} = \underline{k} \cdot \underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Εύρεση μητρώου δυσκαμψίας ελατηρίου

$$\underline{s} = \underline{k} \cdot \underline{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία της πρώτης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{k}$ μπορούν να προσδιοριστούν θέτοντας $u_1 = 1.0\,\mathrm{m}$ και $u_2 = 0$ ως μετακινήσεις στα άκρα του ελατηρίου και υπολογίζοντας τις δυνάμεις s_1 και s_2 που απαιτούνται να εφαρμοσθούν στα άκρα του ελατηρίου και αντιστοιχούν στα στοιχεία k_{11} και k_{21}, αντίστοιχα.

$$\begin{matrix} u_1 = 1.0\,\mathrm{m} \\ u_2 = 0 \end{matrix} \qquad \sum F_x = 0 \qquad \begin{matrix} \Rightarrow S_1 = k \cdot 1.0 \\ \Rightarrow S_2 = -k \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} k_{11} = k \\ k_{21} = -k \end{matrix}$$

$$\underline{s} = \underline{k} \cdot \underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Παρομοίως, τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{k}$ μπορούν να προσδιοριστούν θέτοντας $u_1 = 0$ και $u_2 = 1.0\,\mathrm{m}$ ως μετακινήσεις στα άκρα του ελατηρίου και υπολογίζοντας τις δυνάμεις s_1 και s_2 που απαιτούνται να εφαρμοσθούν στα άκρα του ελατηρίου και αντιστοιχούν στα στοιχεία k_{12} και k_{22}, αντίστοιχα.

$$\begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 1.0\,\mathrm{m} \end{matrix} \qquad \sum F_x = 0 \qquad \begin{matrix} \Rightarrow S_1 = -k \\ \Rightarrow S_2 = k \cdot 1.0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} k_{12} = -k \\ k_{22} = k \end{matrix}$$

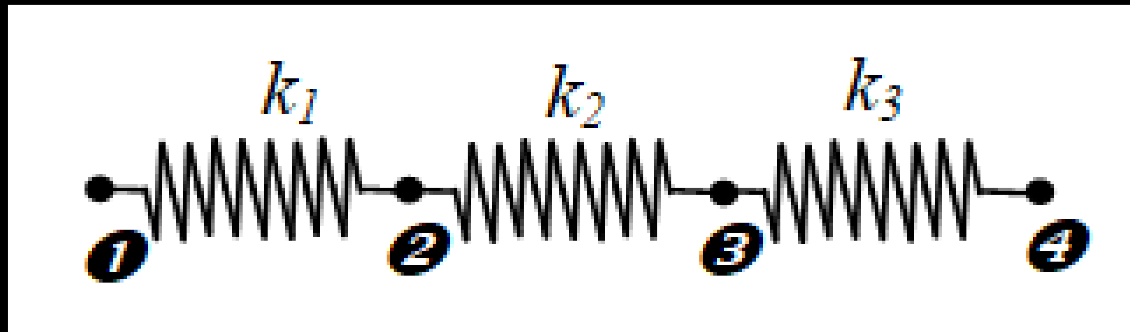
Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{k}$ για ένα ελατήριο με σταθερά k είναι:

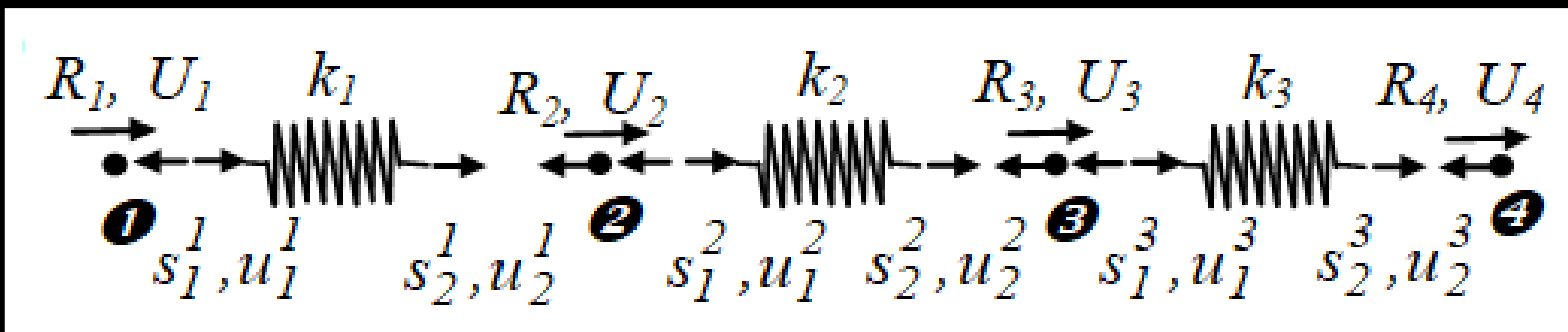
$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

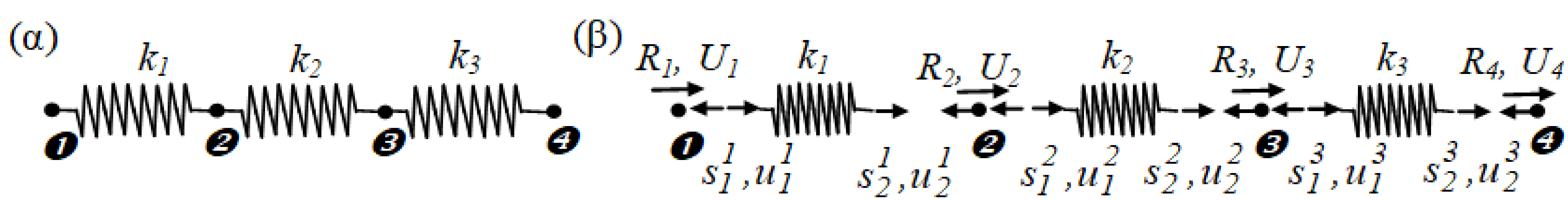
Γενικότερα, το κάθε στοιχείο k_{ij} του μητρώου δυσκαμψίας είναι ουσιαστικά η αντίστοιχη δύναμη που ασκείται στον κόμβο i λόγω μοναδιαίας μετακίνησης στον κόμβο j διατηρώντας τις υπόλοιπες μετακινήσεις μηδενικές.

Μια κατασκευή αποτελείται από διάφορα μέλη και συνεπώς για την επίλυση της πρέπει να προσδιοριστεί το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}$ με τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία $\underline{R}$, τα οποία αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

Σύστημα τριών ελατηρίων







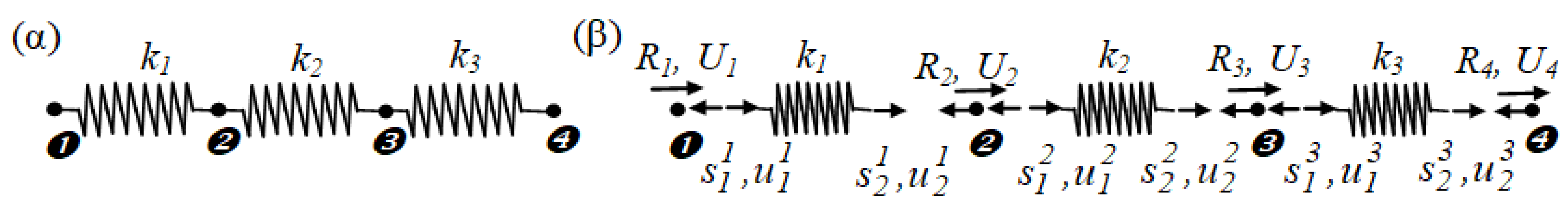
Σχήμα 9.2: (α) ελατήρια σε σειρά (β) εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα των ελατηρίων.

Έχοντας ένα σύστημα 3 ελατηρίων (Σχήμα 9.2.α-β), οι εξισώσεις που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη του κάθε ελατηρίου με τις μετακινήσεις στα άκρα του είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^3 \\ s_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 9.2: (α) ελατήρια σε σειρά (β) εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα των ελατηρίων.

Εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας γύρω από κάθε κόμβο

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας για τον κάθε κόμβο, όπου λαμβάνονται υπόψη τόσο οι δυνάμεις από τα άκρα των ελατήριων όσο και οι επικόμβιες δυνάμεις που μπορεί να ασκούνται στον κάθε κόμβο, προκύπτουν εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες συνδέουν τις μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}$ με τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία $\underline{R}$.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, από εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας γύρω από κάθε κόμβο, προκύπτουν 4 εξισώσεις ισορροπίας, όσες και ο συνολικός βαθμός ελευθερίας του συστήματος ελατηρίων.

❶ $$\sum F_x = 0: \ R_1 = s_1^1 = k_1 \cdot u_1^1 - k_1 \cdot u_2^1$$

❷ $$\sum F_x = 0: \ R_2 = s_2^1 + s_1^2 = -k_1 \cdot u_1^1 + k_1 \cdot u_2^1 + k_2 \cdot u_1^2 - k_2 \cdot u_2^2$$

❸ $$\sum F_x = 0: \ R_3 = s_2^2 + s_1^3 = -k_2 \cdot u_1^2 + k_2 \cdot u_2^2 + k_3 \cdot u_1^3 - k_3 \cdot u_2^3$$

❹ $$\sum F_x = 0: \ R_4 = s_2^3 = -k_3 \cdot u_1^3 + k_3 \cdot u_2^3$$

Υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των βαθμών ελευθερίας των μετακινήσεων στα άκρα των μελών με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων:

$$u_1^1 = U_1 \quad , \quad u_2^1 = u_1^2 = U_2 \quad , \quad u_2^2 = u_1^3 = U_3 \quad , \quad u_2^3 = U_4$$

Έτσι, οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να εκφραστούν βάσει των μετακινήσεων των κόμβων και των επικόμβιων φορτίων:

$$R_1 = k_1 \cdot U_1 - k_1 \cdot U_2$$

$$R_2 = -k_1 \cdot U_1 + \left(k_1 + k_2\right) \cdot U_2 - k_2 \cdot U_3$$

$$R_3 = -k_2 \cdot U_2 + \left(k_2 + k_3\right) \cdot U_3 - k_3 \cdot U_4$$

$$R_4 = -k_3 \cdot U_3 + k_3 \cdot U_4$$

Εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωική μορφή

Γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωική μορφή προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{K}$:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζον (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες, οι οποίες καταστούν το φορέα σταθερό. Η ορίζουσα του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι μηδενική και η τάξη (*rank*) του μητρώου είναι μικρότερη των διαστάσεων του, τα οποία εκφράζουν μαθηματικά τη χαλαρότητα του φορέα.

Το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό, γεγονός το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί για εξοικονόμηση υπολογισμών και μνήμης αποθήκευσης του, ειδικά λαμβάνοντας υπόψη ότι τα περισσότερα του στοιχεία είναι μηδενικά.

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

Ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός με την εφαρμογή κάποιων συνοριακών συνθηκών, όπως καθορισμό στηρίξεων με μηδενικές μετακινήσεις ή καθορισμό των μετακινήσεων κάποιων βαθμών ελευθερίας. Ορίζοντας σαν $\underline{U}_s$ τους βαθμούς ελευθερίας στους οποίους είναι μηδενικές, ή γνωστές οι μετακινήσεις, δηλαδή τις στηρίξεις (*supports*) και σαν $\underline{U}_f$ τους βαθμούς ελευθερίας στους οποίους είναι άγνωστες οι μετακινήσεις, μπορούν να εξασκηθούν επικόμβια φορτία και μπορούμε να χωρίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας σε 4 υπομητρώα, όπως πιο κάτω:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, το διάνυσμα των επικόμβιων φορτίων διαχωρίζεται σε 2 υποδιανύσματα, το $\underline{R}_f$, το οποίο αντιστοιχεί σε όλους τους ελεύθερους βαθμούς ελευθερίας και το $\underline{R}_s$, το οποίο αντιστοιχεί σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν σε συνοριακές συνθήκες.

Στους αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας είναι γνωστά τα εξωτερικά φορτία, τα οποία ενδεχομένως να είναι μηδενικά, και άγνωστες οι αντίστοιχες μετακινήσεις. Σε αντίθεση, στους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας είναι γνωστές οι μετακινήσεις τους, οι οποίες ενδεχομένως να είναι μηδενικές, και είναι άγνωστες οι αντίστοιχες αντιδράσεις.

Έτσι, με δεδομένες τις μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες στήριξης, $\underline{U}_s = \underline{U}_s^*$, δηλαδή τους δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας, μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας $\underline{U}_f$:

$$\underline{U}_s = \underline{U}_s^* \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{R}_f &= \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^* \\ \underline{U}_f &= \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \left(\underline{R}_f - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s \right) \end{aligned}$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι άγνωστες αντιδράσεις στους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις συνοριακές συνθήκες:

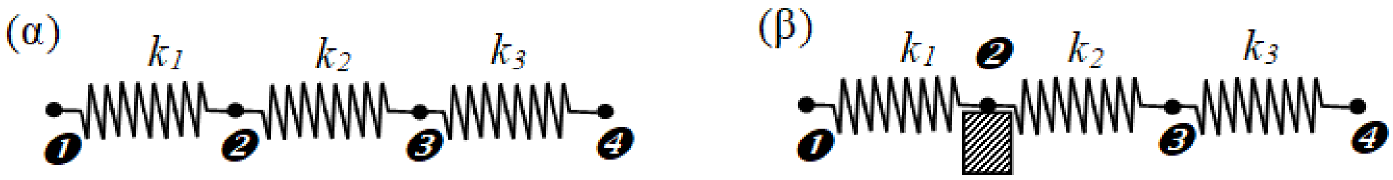
$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^*$$

Όταν οι συνοριακές συνθήκες είναι στηρίξεις με μηδενικές μετακινήσεις $\underline{U}_s = 0$, τότε οι μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις ισούνται με :

$$\underline{U}_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{R}_f &= \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f \\ \underline{R}_s &= \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f \end{aligned}$$

Οι δυνάμεις στα μέλη μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις εντατικών μεγεθών μετακινήσεων των μελών βάσει της αντιστοιχίας των μετακινήσεων των κόμβων $\underline{U}_f$ με τις μετακινήσεις στα άκρα του κάθε μέλους $\underline{u}_m$, από τη σχέση $\underline{s}_m = \underline{k}_m \cdot \underline{u}_m$.

Έτσι, εάν π.χ. ήταν στηριγμένος ο κόμβος 2 (Σχήμα 9.3.β), τότε δεν θα ήταν πλέον μηχανισμός, όπως ήταν αρχικά (Σχήμα 9.3.α), αλλά το σύστημα των ελατηρίων θα ήταν σταθερός φορέας.



Σχήμα 9.3: (α) μηχανισμός με ελατήρια χωρίς στήριξη (β) ελατήρια με στήριξη.

Ο βαθμός ελευθερίας του κόμβου 2, U_2, θα ήταν δεσμευμένος, ενώ οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στους άλλους 3 κόμβους, U_1, U_3 και U_4, θα είναι αδέσμευτοι.

$$\underline{U}_s = \left[U_2 \right]$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

Με το διαχωρισμό των βαθμών ελευθερίας σε αδέσμευτους ($\underline{R}_f$ και $\underline{U}_f$), και δεσμευμένους ($\underline{R}_s$ και $\underline{U}_s$) μπορούν το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{K}$, να επαναδιατυπωθεί αντίστοιχα:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \qquad \underline{U}_s = [U_2]$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2+k_3 & -k_3 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον πιο πάνω διαχωρισμό μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα 4 υπομητρώα του μητρώα δυσκαμψίας:

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

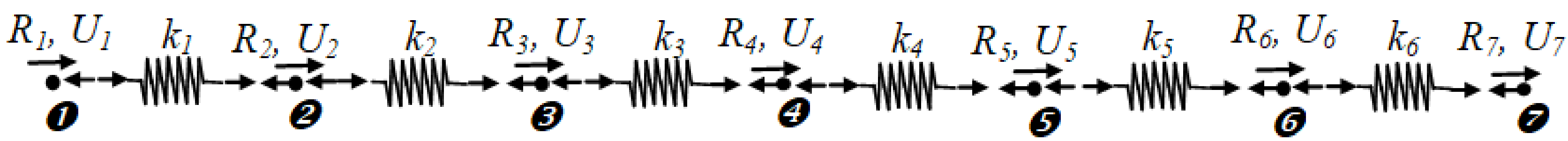
$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

Διαδικασία μεθόδου άμεσης δυσκαμψίας

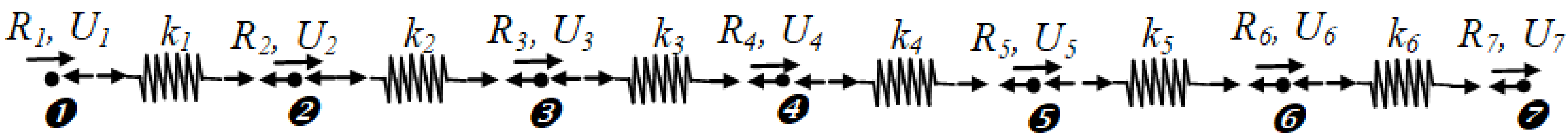
Αντί της πιο πάνω αναλυτικής διαδικασίας της μεθόδου δυσκαμψίας, με την εφαρμογή των εντατικών μεγεθών στους κόμβους και την επιβολή των εξισώσεων ισορροπίας στον κάθε κόμβο, το μητρώο δυσκαμψίας μπορεί να σχηματιστεί άμεσα με επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας των επιμέρους μελών της κατασκευής. Για να σχηματιστεί άμεσα το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής λαμβάνεται υπόψη η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των άκρων του κάθε μέλους με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\underline{U}$, ώστε να προστεθούν στη σωστή θέση τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του μέλους. Αυτή η διαδικασία άμεσου σχηματισμού του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ και των εξισώσεων ισορροπίας, $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, ονομάζεται *Μέθοδος Άμεσης Δυσκαμψίας* και είναι συστηματοποιημένη διαδικασία η οποία εύκολα μπορεί να προγραμματισθεί. Σε αυτή τη μέθοδο βασίζεται η πλειοψηφία των προγραμμάτων ανάλυσης κατασκευών.

Παράδειγμα 1: Εφαρμογή μεθόδου άμεσης δυσκαμψίας

Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας του πιο κάτω συστήματος 6 ελατηρίων (Σχήμα 9.3) σχηματίζεται ξεκινώντας με ένα μηδενικό μητρώο δυσκαμψίας K και για το κάθε μέλος, αφού προσδιοριστεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας στα άκρα του μέλους με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων, προσθέτουμε στις αντίστοιχες γραμμές και στήλες τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του κάθε μέλους μέχρι να σχηματιστεί τελικά, μετά από επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας όλων των μελών, το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{\mathrm{K}}$.



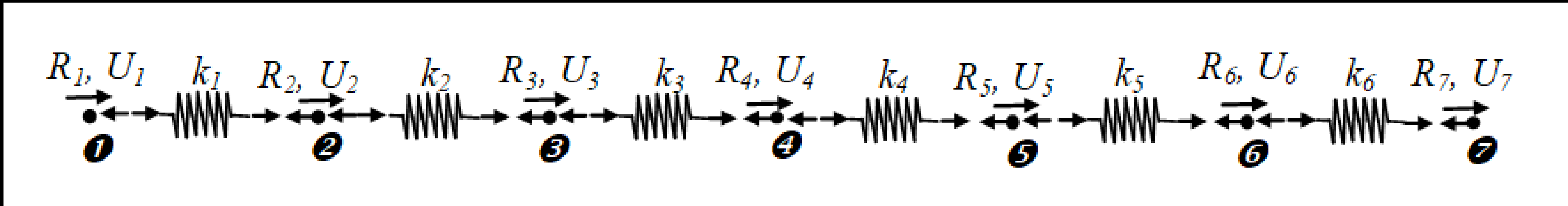
Σχήμα 9.3: Ελατήρια σε σειρά για την εφαρμογή της Μεθόδου Άμεσης Δυσκαμψίας.



Προσδιορίζοντας το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, μπορούν να γραφούν απευθείας οι εξισώσεις δυσκαμψίας, οι οποίες ουσιαστικά είναι οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής, προτού όμως εφαρμοσθούν οι συνοριακές συνθήκες.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & & & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & \\ & & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & & \\ & & & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 \\ 0 & & & & & -k_6 & k_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

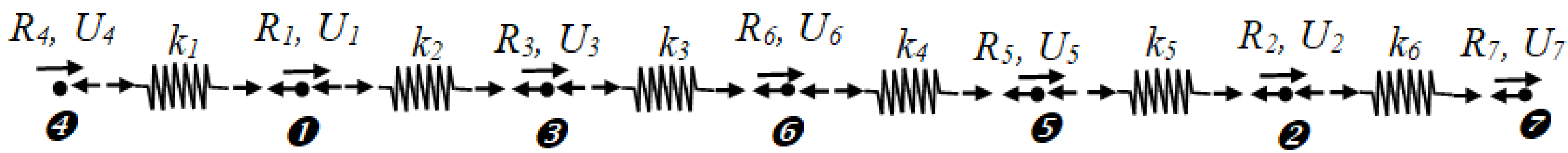
$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$



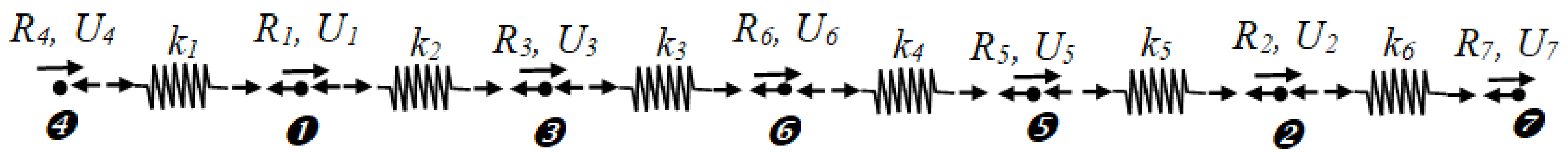
$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
k_1 & -k_1 & & & & & 0 \\
-k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & & & \ddots & \\
 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & & \\
 & & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & & \\
 & & & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & \\
 & \ddots & & & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 \\
0 & & & & & -k_6 & k_6
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}
$$

Το μητρώο δυσκαμψίας $\mathbf{K}$ είναι συμμετρικό και έχει αρκετά μηδενικά στοιχεία. Αν η αρίθμηση γίνει με κατάλληλο τρόπο τα μη μηδενικά στοιχεία περιορίζονται σε μια διαγώνιο λωρίδα. Έτσι μπορεί να εξοικονομηθεί μνήμη στον Η/Υ από την κατάλληλη αποθήκευση του μητρώου, αλλά και να ελαχιστοποιηθούν οι απαιτούμενες πράξεις κατά την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

Εάν η αρίθμηση των κόμβων, δηλαδή των βαθμών ελευθερίας (μετακινήσεων), του συστήματος 6 ελατηρίων γίνει διαφορετικά (Σχήμα 9.4), τότε θα έχει διαφορετική μορφή το μητρώο δυσκαμψίας K. Και σε αυτήν την περίπτωση, ξεκινώντας με ένα μητρώο δυσκαμψίας διαστάσεων 7×7, όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας, με μηδενικά, για το κάθε μέλος, αφού προσδιοριστεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας στα άκρα του μέλους με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων, προσθέτουμε στις αντίστοιχες γραμμές και στήλες τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του κάθε μέλους μέχρι να σχηματιστεί τελικά, μετά από επαλληλία των μητρώων δυσκαμψίας όλων των μελών, το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{\mathrm{K}}$.

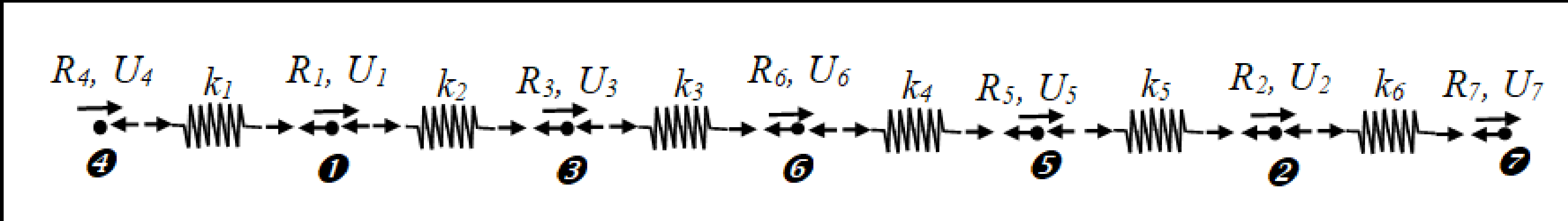


Σχήμα 9.4: Ελατήρια σε σειρά για την εφαρμογή της Μεθόδου Άμεσης Δυσκαμψίας.



Ξεκινώντας με το ελατήριο 1, το οποίο συνδέει τους βαθμούς ελευθερίας 4 και 1, προσθέτουμε τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας του μέλους 1, στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στις γραμμές και στήλες των βαθμών ελευθερίας 4 και 1:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

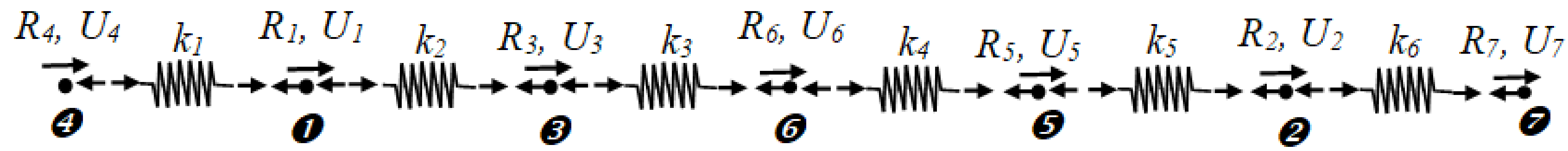


Συνεχίζοντας διαδοχικά με την προσθήκη των στοιχείων δυσκαμψίας όλων των μελών σχηματίζεται το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, το οποίο αντιπροσωπεύει ουσιαστικά τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής, προτού όμως εφαρμοσθούν οι συνοριακές συνθήκες.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 & -k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_6+k_5 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & -k_6 \\ -k_2 & 0 & k_2+k_3 & 0 & 0 & -k_3 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_5 & 0 & 0 & k_5+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & -k_4 & k_3+k_4 & 0 \\ 0 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών



$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες, οι οποίες καταστούν το φορέα σταθερό, το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζον (*singular*), δηλαδή η ορίζουσα του είναι μηδενική και ο βαθμός (*rank*) του είναι μικρότερος των διαστάσεων του, τα οποία εκφράζουν μαθηματικά τη χαλαρότητα του φορέα. Με την εφαρμογή κάποιων συνοριακών συνθηκών $\underline{U}_s$, ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία $\underline{R}_f$, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_s = \underline{U}_s^* \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{R}_f &= \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^* \\ \underline{U}_f &= \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \left(\underline{R}_f - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^*$$

Ανάλυση δικτυωμάτων με τη άμεση μέθοδο δυσκαμψίας

Η Μέθοδος Δυσκαμψίας για δικτυώματα είναι ανάλογη της διαδικασίας που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την επίλυση ελατηρίων. Η κύρια διαφορά είναι ότι οι εξισώσεις ισορροπίας για τον κάθε κόμβο θα είναι δύο, μια για τη X' και μια για την Y' διεύθυνση σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους. Επιπλέον, επειδή το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $X'Y'$ του κάθε μέλους, γενικά, θα διαφέρει από τα τοπικά συστήματα των άλλων μελών, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μετασχηματισμοί των δυνάμεων και μετακινήσεων από το τοπικό σε κάποιο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων XY, το οποίο θα είναι κοινό για όλα τα μέλη.

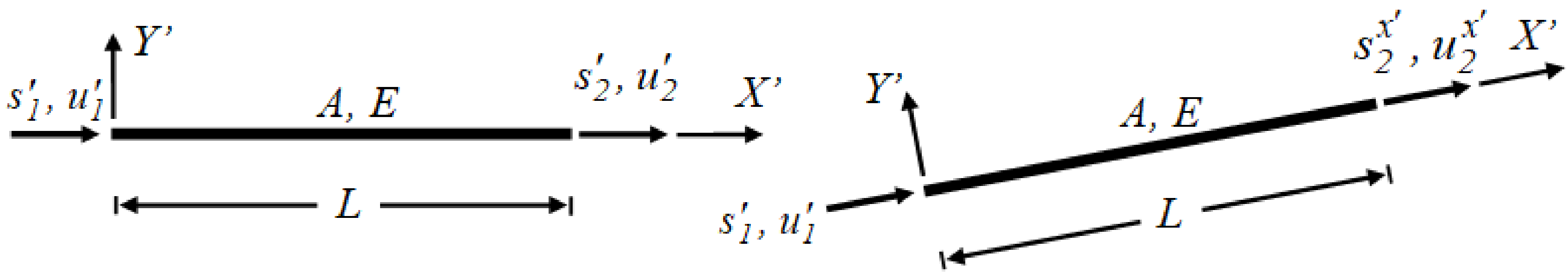
Η σχέση δυνάμεων-μετακινήσεων που χαρακτηρίζει μια ράβδο δικτυώματος συνδέει την αξονική δύναμη N, που ασκείται στα δύο άκρα της ράβδου με τη σχετική μετακίνηση των δύο άκρων, δηλαδή την επιμήκυνση ΔL, στη διεύθυνση της ράβδου:

$$\Delta L = \frac{L}{A \cdot E} \cdot N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = \frac{L}{A \cdot E} \cdot N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L$$

Έτσι, υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ της σταθερά k ενός ελατηρίου και του συντελεστή δυσκαμψίας μιας ράβδου $\frac{A \cdot E}{L}$:

$$k_m = \left(\frac{A \cdot E}{L}\right)_m$$

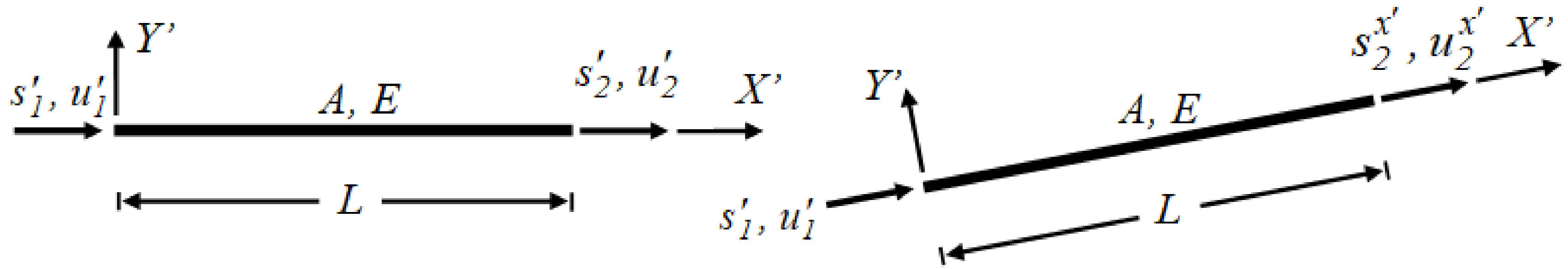


Σχήμα 9.5: Ράβδος δικτυώματος: εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα του μέλους.

Συνεπώς, το μητρώο δυσκαμψίας μιας ράβδου $\underline{k}'_m$, εκφρασμένο στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο συνδέει τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις (Σχήμα 9.5) ισούται με:

$$\underline{k}_m{}' = \begin{bmatrix} \frac{A\cdot E}{L} & -\frac{A\cdot E}{L} \\ -\frac{A\cdot E}{L} & \frac{A\cdot E}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A\cdot E}{L}$$

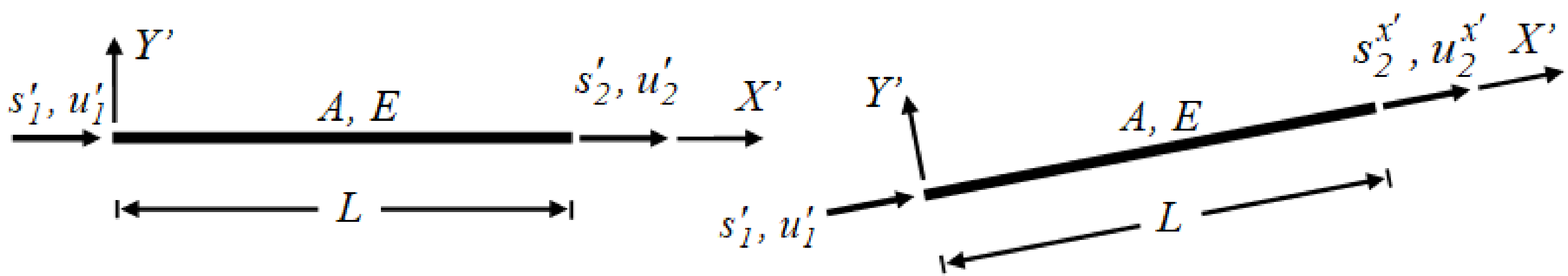
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A\cdot E}{L} & -\frac{A\cdot E}{L} \\ -\frac{A\cdot E}{L} & \frac{A\cdot E}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A\cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix}$$



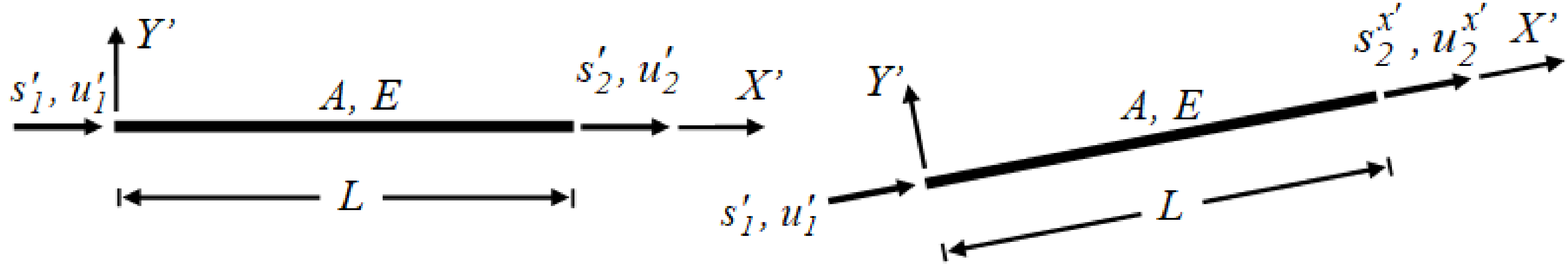
Σχήμα 9.5: Ράβδος δικτυώματος: εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα του μέλους.

Τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας μιας ράβδου μπορεί να προκύψουν, πέρα από την πιο πάνω άμεση αντιστοιχία ελατηρίου και ράβδου, με εφαρμογή μοναδιαίας μετακίνησης u_1^x ή u_2^x, κρατώντας την άλλη μετακίνηση μηδενική και υπολογίζοντας τις δυνάμεις s_1^x και s_2^x οι οποίες αντιστοιχούν στα στοιχεία της πρώτης ή της δεύτερης στήλης, αντίστοιχα, του μητρώου δυσκαμψίας.

$$\underline{k}_m' = \begin{bmatrix} \dfrac{A \cdot E}{L} & -\dfrac{A \cdot E}{L} \\ -\dfrac{A \cdot E}{L} & \dfrac{A \cdot E}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$



Σχήμα 9.5: Ράβδος δικτυώματος: εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα του μέλους.



Σχήμα 9.5: Ράβδος δικτυώματος: εντατικά μεγέθη και μετακινήσεις στα άκρα του μέλους.

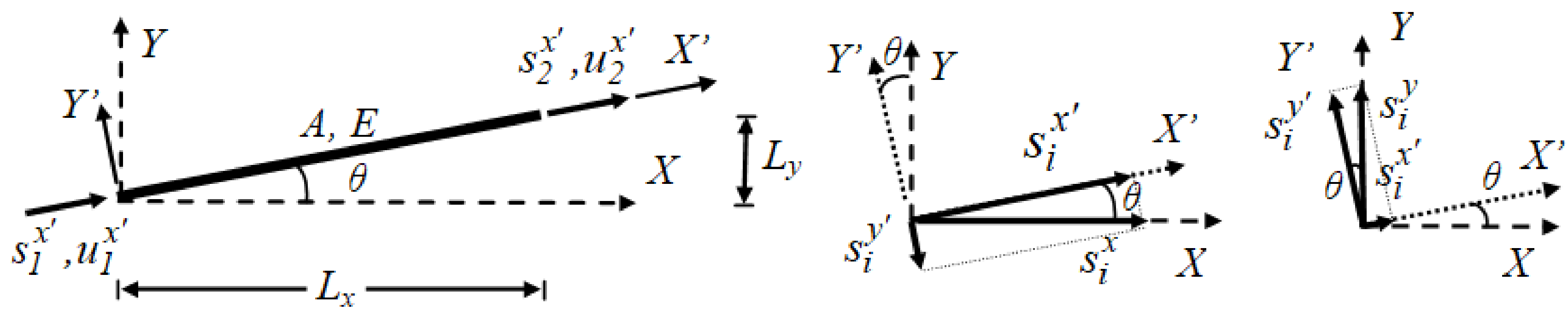
Συμπεριλαμβάνοντας τις μετακινήσεις στην Y' διεύθυνση, σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους, οι εξισώσεις που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις διαμορφώνονται ως ακολούθως:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A\cdot E}{L} & 0 & -\frac{A\cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A\cdot E}{L} & 0 & \frac{A\cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{A\cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m$$

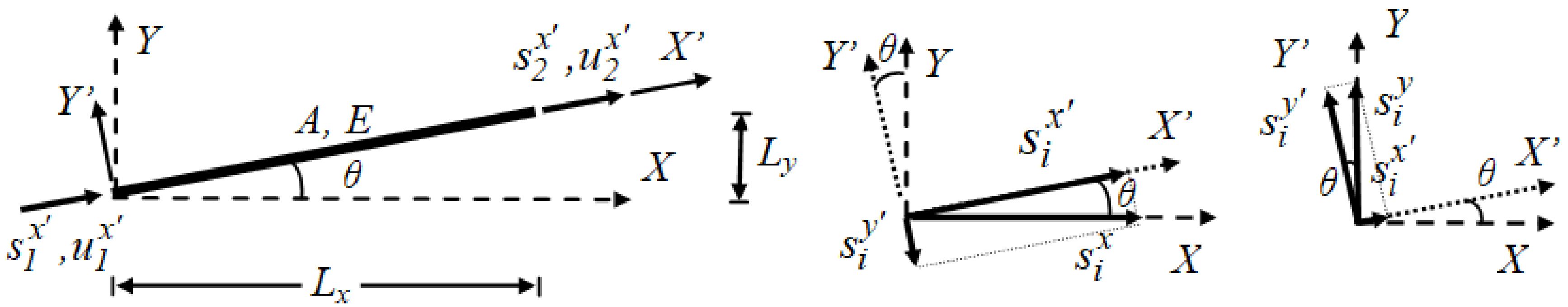
Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων

Για να είναι δυνατή η εφαρμογή της Μεθόδου Άμεσης Δυσκαμψίας πρέπει να μπορούν να προστεθούν με επαλληλία τα στοιχεία των μητρώων δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, ώστε να σχηματιστεί το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, το οποίο πρέπει να αναφέρεται σε ένα μοναδικό για όλα τα μέλη σύστημα συντεταγμένων, το *απόλυτο σύστημα συντεταγμένων*.



Σχήμα 9.6: Μετασχηματισμοί εντατικών μεγεθών και μετακινήσεων ράβδου δικτυώματος.

Έχοντας μια δύναμη s_1^x εκφρασμένη στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να την εκφράσουμε επίσης σε συνιστώσες $s_1^{x'}$ και $s_1^{y'}$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τη γωνία θ, η οποία είναι η γωνία μεταξύ του άξονα των X, σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, και του άξονα των X', σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 9.6).



Σχήμα 9.6: Μετασχηματισμοί εντατικών μεγεθών και μετακινήσεων ράβδου δικτυώματος.

Έχοντας μια δύναμη s_1^x εκφρασμένη στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να την εκφράσουμε επίσης σε συνιστώσες $s_1^{x'}$ και $s_1^{y'}$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τη γωνία θ, η οποία είναι η γωνία μεταξύ του άξονα των X, σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, και του άξονα των X', σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 9.6).

$$s_1^{x'} = \cos\theta \cdot s_1^x + \sin\theta \cdot s_1^y$$

$$s_1^{y'} = -\sin\theta \cdot s_1^x + \cos\theta \cdot s_1^y$$

Αντί των $\cos\theta$ και $\sin\theta$, τα οποία συμβολίζονται με c και s αντίστοιχα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα συνημίτονα κατευθύνσεως, τα οποία ορίζονται ως οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των απόλυτων και των τοπικών συστημάτων συντεταγμένων, ανάλογα με τη συνιστώσα στην οποία αναφερόμαστε.

Έτσι, σύμφωνα με το πιο πάνω σχήμα, τα συνημίτονα κατευθύνσεως ορίζονται:

$$\cos\theta = \cos\theta_{x'x} = \frac{L_x}{L} \qquad \sin\theta = \cos\theta_{x'y} = \frac{L_y}{L}$$

$$-\sin\theta = \cos\theta_{y'x} = -\frac{L_y}{L} \qquad \cos\theta = \cos\theta_{y'y} = \frac{L_x}{L}$$

Γράφοντας αυτές τις σχέσεις που προέκυψαν μεταξύ των συνιστωσών δυνάμεων στο τοπικό και στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων σε μητρωική μορφή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί δυνάμεων και μετακινήσεων

Με την επόμενη σχέση μπορούμε να μετασχηματίσουμε τα εντατικά μεγέθη στα δύο της άκρα της ράβδου, από το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο είναι εκφρασμένα, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \\ s_2^{x} \\ s_2^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^{x} \\ s_1^{y} \\ s_2^{x} \\ s_2^{y} \end{bmatrix}$$

Ακριβώς η ίδια σχέση ισχύει για τις μετακινήσεις και το μετασχηματισμό τους από το απόλυτο στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{T}_m$ έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

Ο πιο πάνω μετασχηματισμός θα μπορούσε να γραφτεί και βάσει των συνημίτονων κατευθύνσεως, τα οποία είναι χρησιμότερα στην περίπτωση χωρικών δικτυωμάτων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xx'} & \cos\theta_{yx'} & 0 & 0 \\ \cos\theta_{xy'} & \cos\theta_{yy'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_{xx'} & \cos\theta_{yx'} \\ 0 & 0 & \cos\theta_{xy'} & \cos\theta_{yy'} \end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε τις πιο κάτω σχέσεις σε μητρωική μορφή για το κάθε μέλος m :

$$\underline{s}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m \quad \text{και} \quad \underline{u}'_m = \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

Το μητρώο μετασχηματισμού έχει την ιδιότητα ο ανάστροφος του να ισούται με τον αντίστροφο του, το οποίο διευκολύνει τους υπολογισμούς:

$$\underline{T}_m^{-1} = \underline{T}_m^{T}$$

Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας για δικτυώματα

Με τους πιο πάνω μετασχηματισμούς, το μητρώο δυσκαμψίας της κάθε ράβδου μπορεί, αφού μετασχηματισθεί κατάλληλα στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, να αθροισθεί στο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής.

$$\underline{s}'_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{u}'_m \quad \Rightarrow \quad \underline{T}_m \cdot \underline{s}_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m \quad \Rightarrow \quad \underline{s}_m = \underline{T}_m^{-1} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s}_m = \underline{T}_m^{T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot \underline{u}_m = \underline{k}_m \cdot \underline{u}_m$$

Προσδιορίζοντας για το κάθε μέλος αντιστοιχία μεταξύ των δυνάμεων $\underline{s}_m$ και των μετακινήσεων $\underline{u}_m$, τα οποία είναι πλέον εκφρασμένα στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων και των επικόμβιων δυνάμεων $\underline{R}$ και μετακινήσεων $\underline{U}$, αντίστοιχα, μπορούν να προστεθούν για το κάθε μέλος τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{k}_m$, το οποίο είναι πλέον εκφρασμένο στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, στις αντίστοιχες θέσεις του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{k}$.

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^{T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

Μητρώο δυσκαμψίας στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m{}^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m{}^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{L} & 0 & -\frac{A \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A \cdot E}{L} & 0 & \frac{A \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_m = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

Υπομητρώα μητρώου δυσκαμψίας

$$\underline{k}_m = \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

Μπορούμε να διακρίνουμε 4 υπομητρώα τα οποία βασίζονται στο ίδιο κοινό υπομητρώο και να αξιοποιήσουμε αυτό το υπομητρώο κατά το σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας μιας ράβδου επίπεδου δικτυώματος στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, λαμβάνοντας υπόψη τους κόμβους αρχής και τέλους, i και j, αντίστοιχα, του κάθε μέλους m.

$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L} = -\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ji}$$

Υπομητρώα μητρώου δυσκαμψίας

$$\underline{k}_m = \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

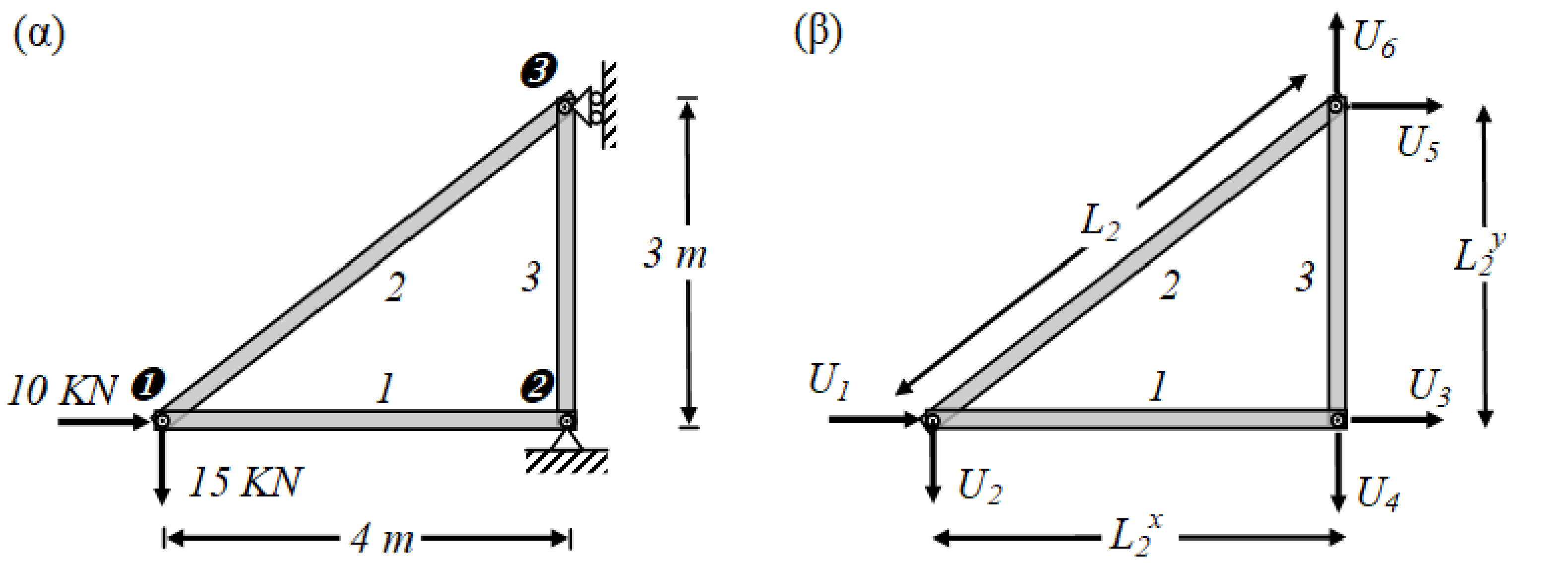
$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L} = -\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ji}$$

Δηλαδή, στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου i, καθώς και στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου j αντιστοιχούν τα υπομητρώα:

$$\underline{k}_m^{ii} = \underline{k}_m^{jj} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

Παράδειγμα-2

Το πιο κάτω απλό δικτύωμα (Σχήμα 9.7.α-β), το οποίο έχει επιλυθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη Μέθοδο Ευκαμψίας, θα λυθεί με Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται με: $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{GPA}$ και το εμβαδόν διατομής όλων των ράβδων ισούται με $\mathrm{A} = 0.001\mathrm{m}^2$.



Σχήμα 9.7: Επίλυση δικτυώματος με τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας: (α) μέλη, κόμβοι και στηρίξεις (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

Ράβδος	L	AE/L
1	4	$5{\cdot}10^7$
2	5	$4{\cdot}10^7$
3	3	$6.667{\cdot}10^7$

$$\underline{k}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7$$

$$\underline{s}_m' = \underline{k}_m' \cdot \underline{u}_m' \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \underline{k}_m' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

Τα μητρώα δυσκαμψίας των ράβδων συνδέουν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

Στη συνέχεια, από τη γεωμετρία και συνδεσμολογία του κάθε μέλους, μπορούν να προσδιορισθούν οι γωνίες που χρειάζονται για σχηματισμό των μητρώων μετασχηματισμού:

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1

Έχοντας υπολογίσει τους πιο πάνω τριγωνομετρικούς αριθμούς, μπορούν να υπολογισθούν τα μητρώα μετασχηματισμού, $\underline{T}_m$, για το κάθε μέλος:

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, με τη βοήθεια των πιο πάνω μητρώων μετασχηματισμού, τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών μπορούν να εκφρασθούν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων:

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m{}^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_1 = \underline{T}_1{}^T \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_2 = \underline{T}_2{}^T \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.92 & -1.44 \\ -2.56 & -1.92 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_3 = \underline{T}_3{}^T \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.667 & 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Για να μπορέσουν να προστεθούν τα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών στο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, πρέπει να προσδιορισθεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους u_m με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής, $\underline{U}$.

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\
\hline
U_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
U_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
U_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
U_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
U_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

- Προσθήκη μέλους –1 :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

- Επιπλέον προσθήκη μέλους –2 :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & 0 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6

- Επιπλέον προσθήκη μέλους –3 :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Μητρώο δυσκαμψίας κατασκευής

Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής σε μητρωική μορφή, είναι:

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί γιατί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζον (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζον φαίνεται από το βαθμό (*rank*) του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3 αντί με 6, που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και συνεπώς και οι διαστάσεις του μητρώου.

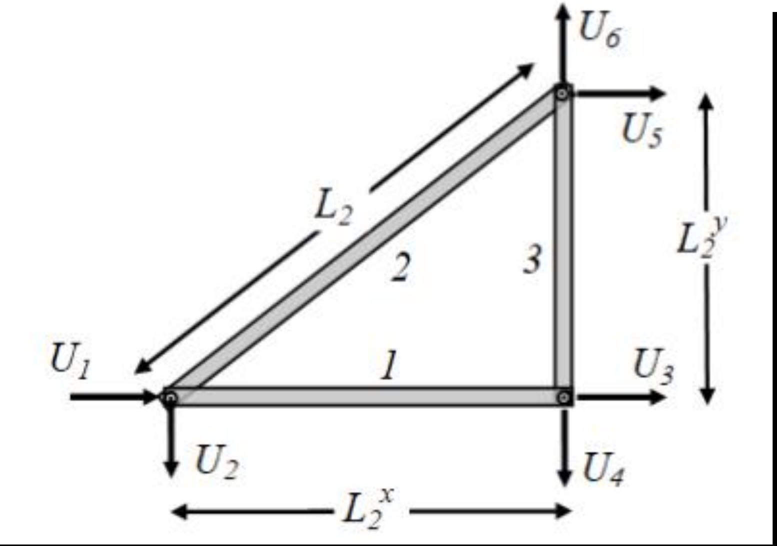
Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

Με την εφαρμογή κάποιων κατάλληλων συνοριακών συνθηκών, $\underline{U}_s$, ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία, $\underline{R}_f$:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

Οι συνοριακές συνθήκες $\underline{U}_s$ και οι άγνωστες μετακινήσεις $\underline{U}_f$, έχουν ως εξής:

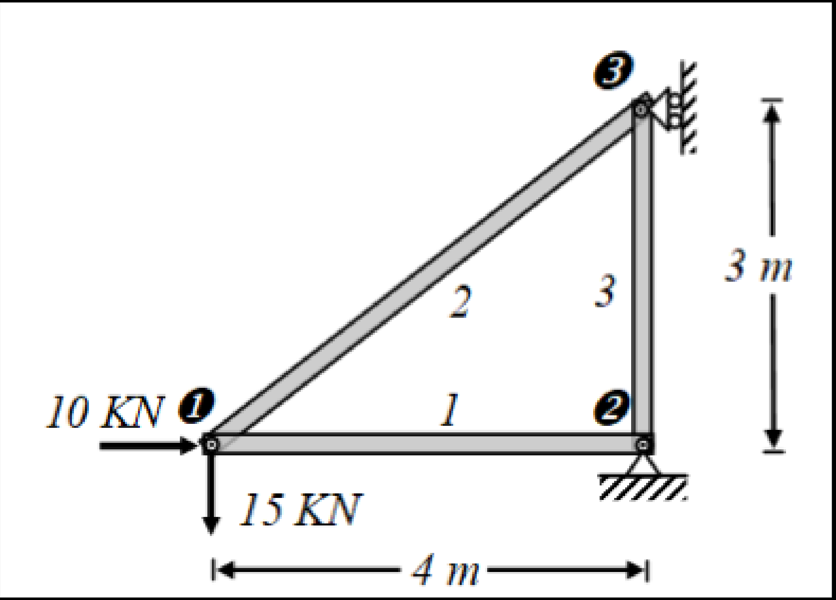
$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

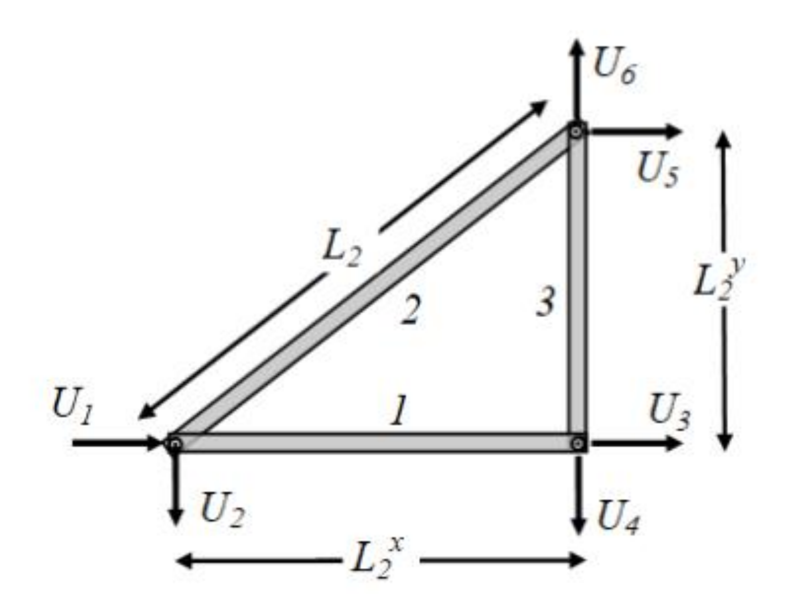


$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, τα επικόμβια φορτία , ισούνται με:

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$





Τα υπομητρώα του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$, τα οποία αντιστοιχούν σε ελευθέρους και δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας είναι τα εξής:

$$\underline{K} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} f & f & s & s & s & f \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ f \\ s \\ s \\ s \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \quad \underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & -1.44 \\ -1.92 & -1.44 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 \\ 0 & 0 & -1.92 \\ 0 & -6.667 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7,$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

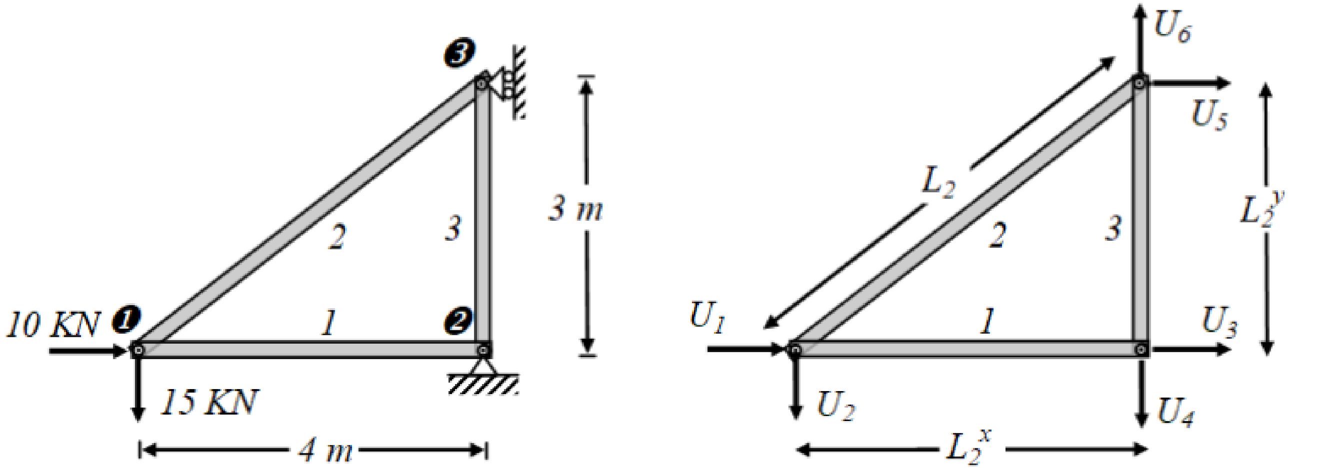
Έτσι, με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}_f$:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.600 \\ -2.067 \\ -0.225 \end{bmatrix} mm$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις:

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

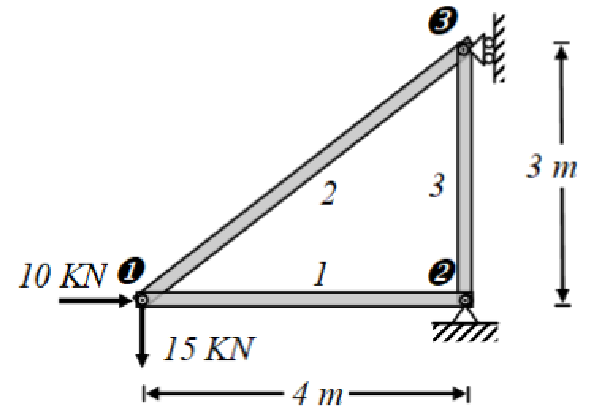
$$\Rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 1.92 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.002067 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30{,}000 \\ 15{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} KN$$



Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

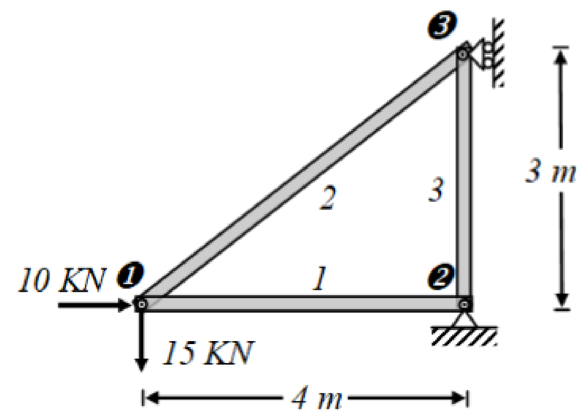
Οι δυνάμεις στα μέλη μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις εντατικών μεγεθών-μετακινήσεων των μελών βάσει της αντιστοιχίας των μετακινήσεων των κόμβων $\underline{U}$, με τις μετακινήσεις στα άκρα του κάθε μέλους $\underline{u}$:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}'_1 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 \cdot \underline{U}_1$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} \text{KN}$$

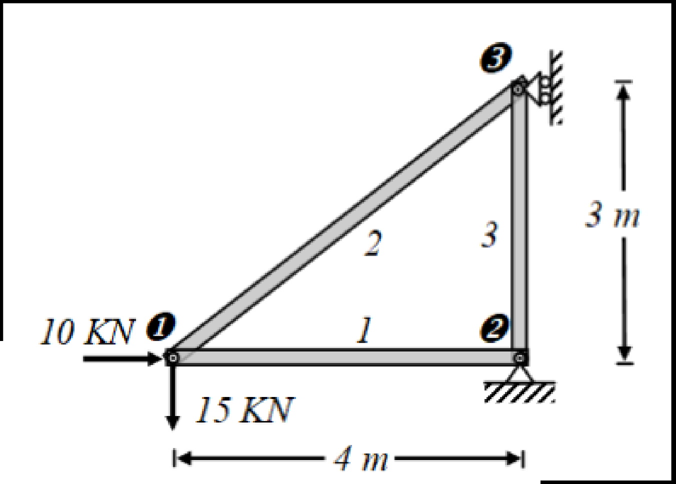
Υπολογισμός εντατικών μεγεθών



$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}'_2 \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 \cdot \underline{U}_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \text{KN}$$

Υπολογισμός εντατικών μεγεθών



$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_3' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \underline{k}_3' \cdot \underline{T}_3 \cdot \underline{U}_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{KN}$$

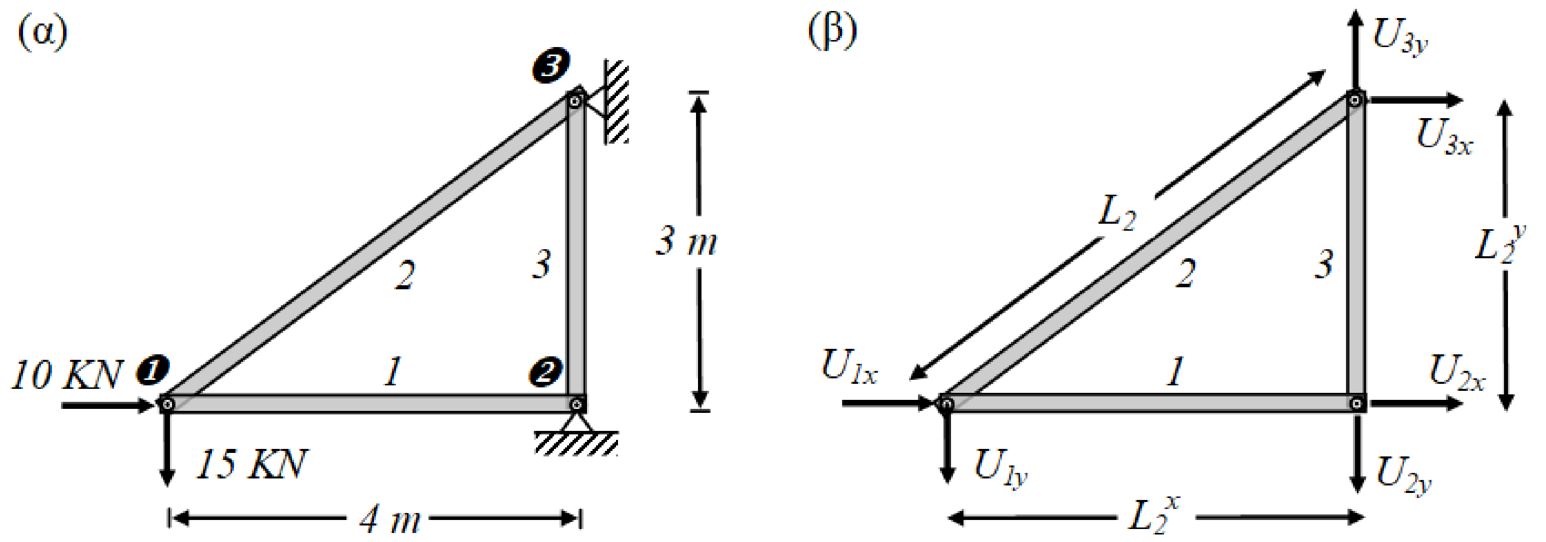
Εντολές *GT-Strudl*

```
STRUDL 'ASKISI_1 PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS                    $typos kataskevis
UNITS M N CENTIGRADE                $kathorismos monadwn
JOINT COORDINATES                   $sintetagmenes kombwn
1 0 0
2 4 0
3 4 3
STATUS SUPPORT JOINTS 2 3           $kathorismos stiriksewn
MEMBER INCIDENCE  $kathorismos sundesmologias melwn
1 1 2
2 1 3
3 2 3
JOINT RELEASES                 $kathorismos eleftheriwn
3 FORCE Y
```

```
CONSTANTS                           $kathorismos E
E 200E9 ALL
MEMBER PROPERTIES                   $kathorismos embadou diatomis
1 TO 3 AX 0.001
LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS
JOINT LOADS                         $epikombia fortia
1 FORCE Y -15000
1 FORCE X  10000
QUERY
STIFFNESS ANALYSIS
OUTPUT DEMICAL 5
LIST FORCES
LIST DISPLACEMENTS
LIST REACTIONS
```

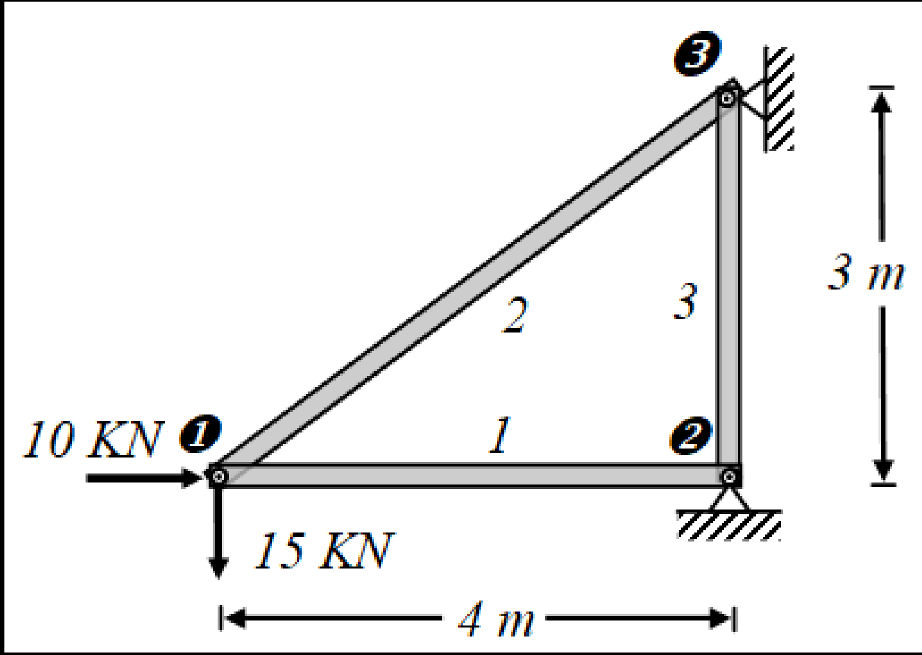
Παράδειγμα-3

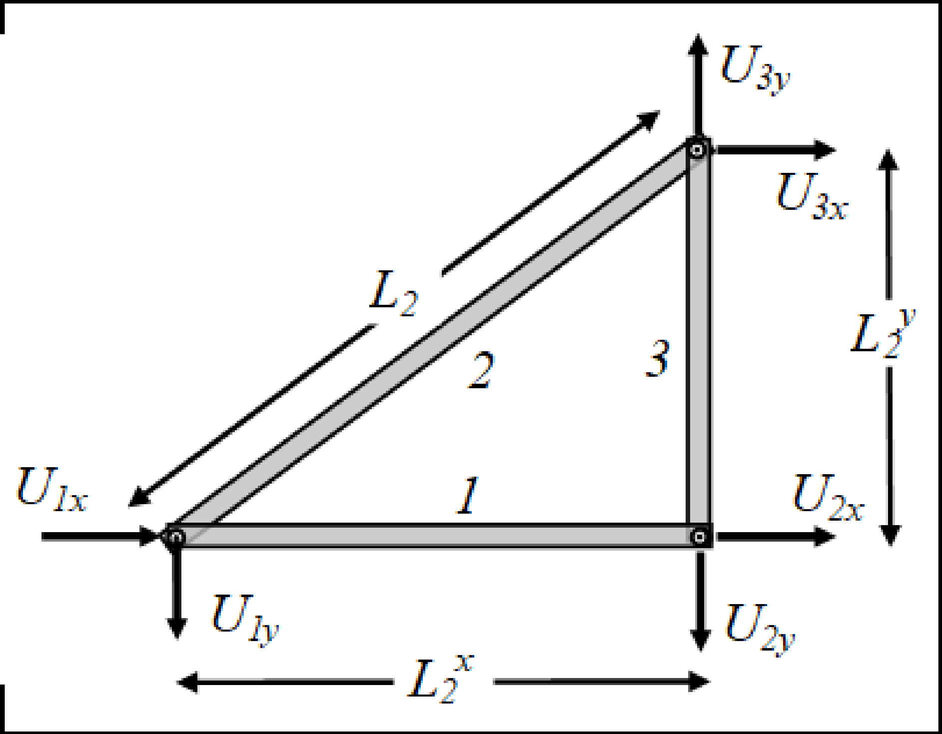
Σε αυτό το παράδειγμα θα επιλύσουμε το πιο κάτω δικτύωμα (Σχήμα 9.8.α-β), με τη *Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας*. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται με $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{GPA}$ και το εμβαδόν διατομής όλων των ράβδων ισούται με $\mathrm{A} = 0.001\ \mathrm{m}^2$. Θα χρησιμοποιηθούν κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα από το προηγούμενο παράδειγμα, αλλά θα γίνουν σκόπιμα κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις για να παρουσιαστεί διαφορετικός τρόπος επίλυσης του προβλήματος.

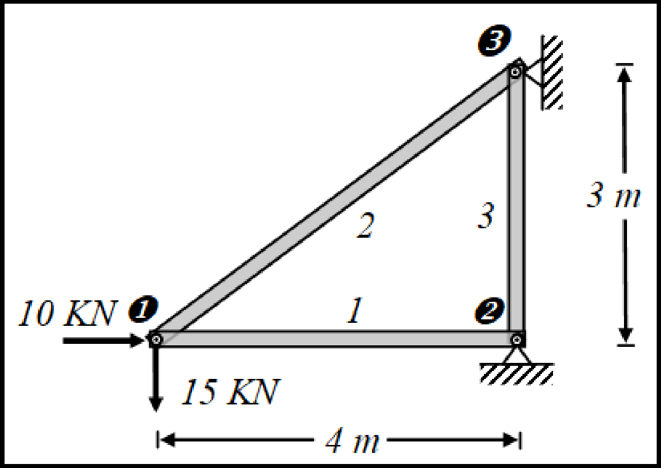


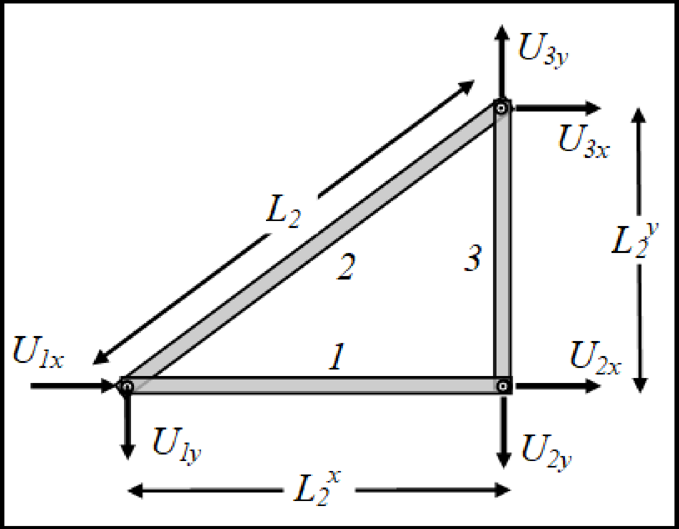
Σχήμα 9.8: Επίλυση υπερστατικού δικτυώματος με τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας: (α) μέλη, κόμβοι και στηρίξεις (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

Οι βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο της κατασκευής αριθμούνται σαν U_{ix} και U_{iy} για να δηλώσουν μετακινήσεις στους άξονες X και Y, αντίστοιχα, αντί συνεχόμενης αρίθμησης των βαθμών ελευθερίας χωρίς διαχωρισμό σε X και Y διεύθυνση. Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία, στους ελεύθερους κόμβους, ή αντιδράσεις, στις στηρίξεις, R_{ix} και R_{iy}, αντίστοιχα. Και οι δύο τρόποι αρίθμησης είναι λογικοί και είναι στην ευχέρεια του μηχανικού ποιο από τους δύο τρόπους αρίθμησης θα προτιμήσει.





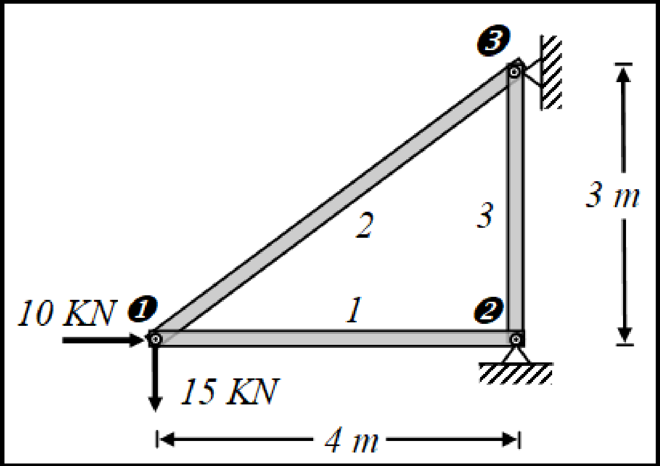


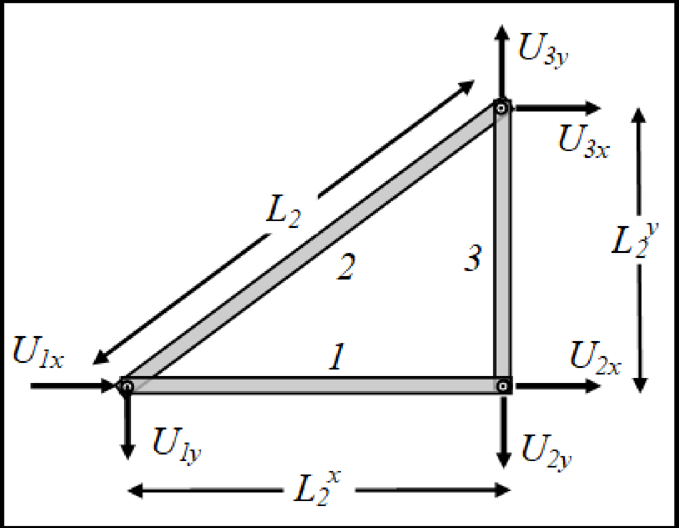


Επιπλέον, αντί του σχηματισμού των μητρώων δυσκαμψίας των μελών στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων και του μετέπειτα μετασχηματισμού τους στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων θα κατασκευαστούν κατευθείαν τα υπομητρώα δυσκαμψίας $\underline{k}_m^{ii}$ για το κάθε μέλος στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

Το υπομητρώο δυσκαμψίας $\underline{k}_m^{ii}$ ισούται με:

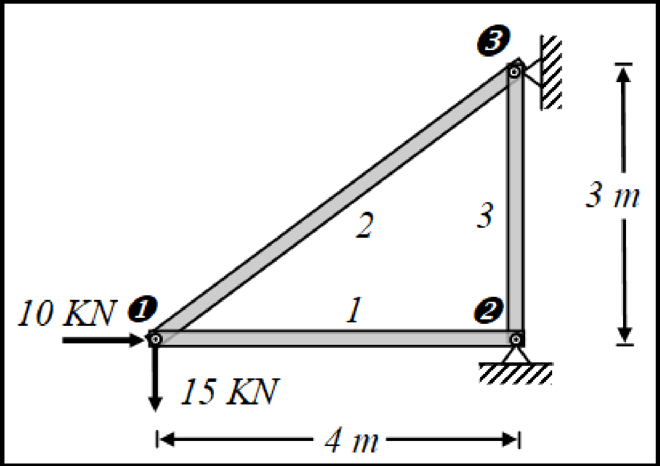
$$\underline{k}_m^{ii} = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

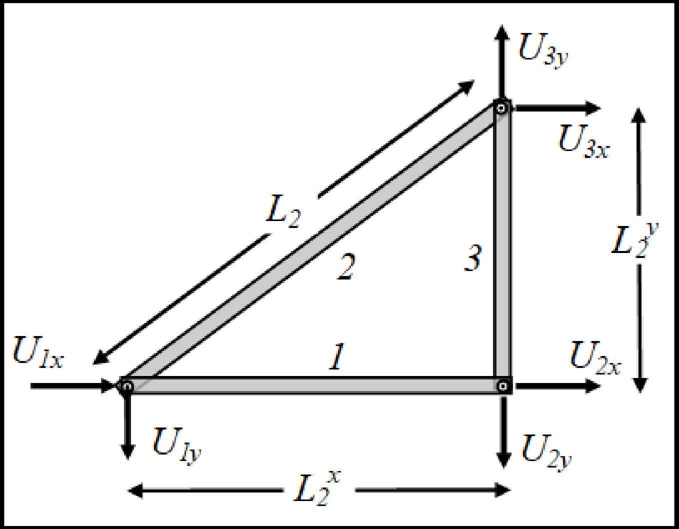




Τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της κάθε ράβδου έχουν υπολογιστεί προηγουμένως και είναι τα εξής:

Ράβδος	L [m]	$\frac{A \cdot E}{L}\left[Nm^{-1}\right]$	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	4	$5 \cdot 10^7$	1	0
2	5	$4 \cdot 10^7$	0.8	0.6
3	3	$6.667 \cdot 10^7$	0	1





Έτσι για την κάθε ράβδο μπορούμε να υπολογίσουμε τα σχετικά υπομητρώα:

$$\underline{k}_1^{ii} = \underline{k}_1^{jj} = -\underline{k}_1^{ij} = -\underline{k}_1^{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2^{ii} = \underline{k}_2^{jj} = -\underline{k}_2^{ij} = -\underline{k}_2^{ji} = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3^{ii} = \underline{k}_3^{jj} = -\underline{k}_3^{ij} = -\underline{k}_3^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Αντιστοιχία βαθμών ελευθερίας μελών και κόμβων

Προσδιορίζοντας τα πιο πάνω υπομητρώα, τα οποία είναι εκφρασμένα στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να σχηματίσουμε άμεσα το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής με προσθήκη των υπομητρώων στις κατάλληλες θέσεις.

Όμως, πρέπει πρώτα να προσδιορισθεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους u_m με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\underline{U}$, σύμφωνα με την πιο πάνω αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας:

Ράβδος	Κόμβος αρχής - i		Κόμβος τέλους - j	
	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	1		2	
	U_{1x}	U_{1y}	U_{2x}	U_{2y}
2	1		3	
	U_{1x}	U_{1y}	U_{3x}	U_{3y}
3	2		3	
	U_{2x}	U_{2y}	U_{3x}	U_{3y}

Στη συνέχεια, για το κάθε μέλος πρέπει να προστεθούν:

- το μητρώο $\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
- το μητρώο $\underline{k}_m^{ij} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j
- το μητρώο $\underline{k}_m^{ji} = -\underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j και στις στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου αρχής i
- το μητρώο $\underline{k}_m^{jj} = \underline{k}_m^{ii}$ στις γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου τέλους j

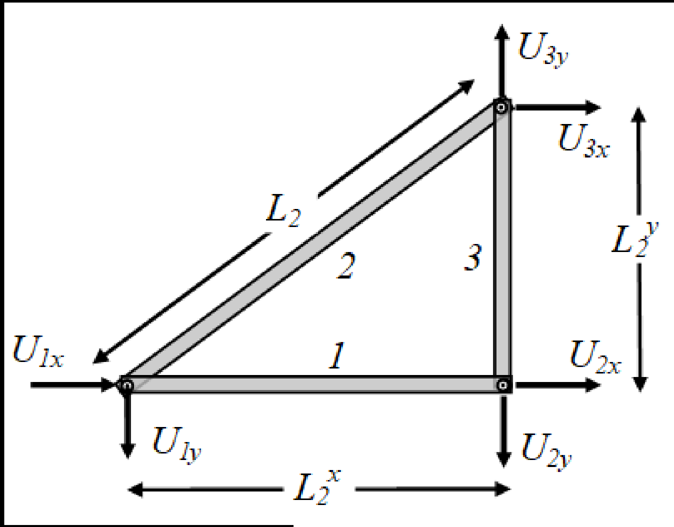
$$\underline{k}_1^{ii} = \underline{k}_1^{jj} = -\underline{k}_1^{ij} = -\underline{k}_1^{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_2^{ii} = \underline{k}_2^{jj} = -\underline{k}_2^{ij} = -\underline{k}_2^{ji} = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{k}_3^{ii} = \underline{k}_3^{jj} = -\underline{k}_3^{ij} = -\underline{k}_3^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής:

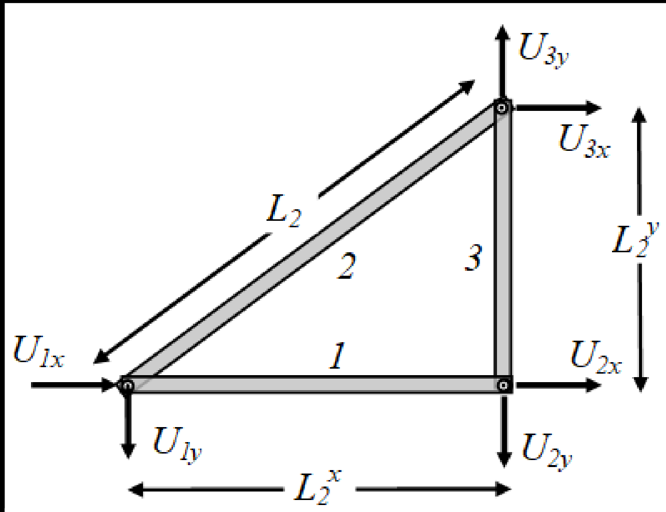
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} U_1^x & U_1^y & U_2^x & U_2^y & U_3^x & U_3^y \end{array} \\
\begin{array}{c} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



$$\underline{k}_1^{ii} = \underline{k}_1^{jj} = -\underline{k}_1^{ij} = -\underline{k}_1^{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

- Προσθήκη μέλους –1 :

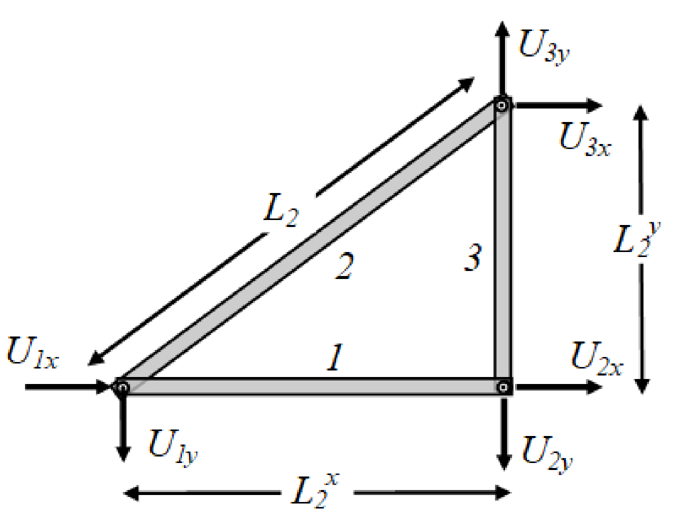
$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$



$$\underline{k}_2^{ii} = \underline{k}_2^{jj} = -\underline{k}_2^{ij} = -\underline{k}_2^{ji} = \begin{bmatrix} 2.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

- Επιπλέον προσθήκη μέλους –2 :

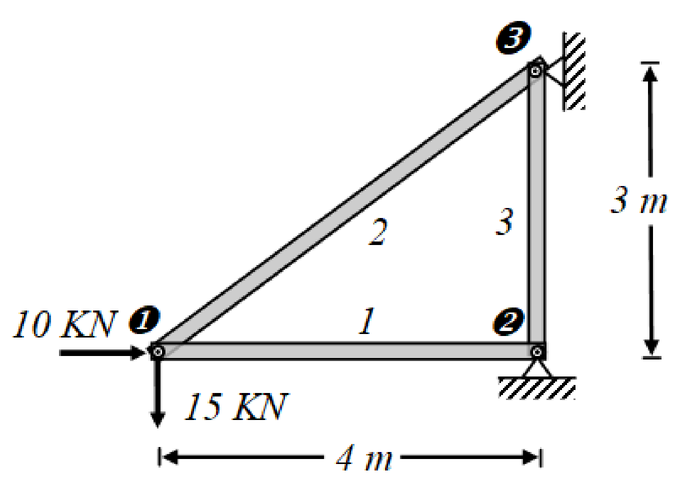
$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & 0 & 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$



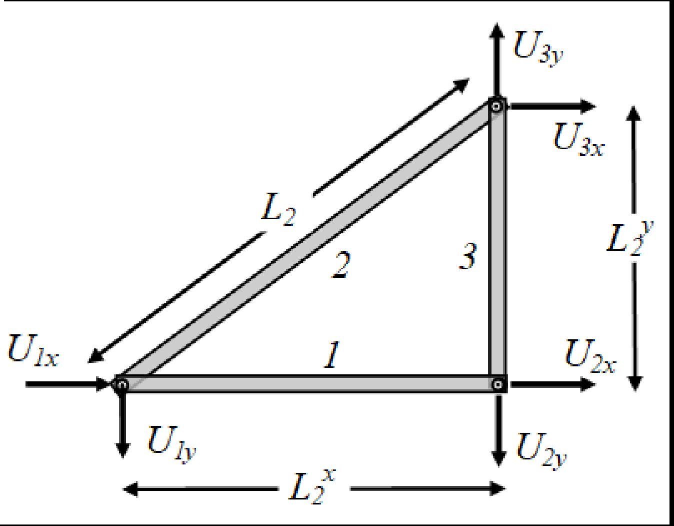
$$\underline{k}_3^{ii} = \underline{k}_3^{jj} = -\underline{k}_3^{ij} = -\underline{k}_3^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$



$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$



$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

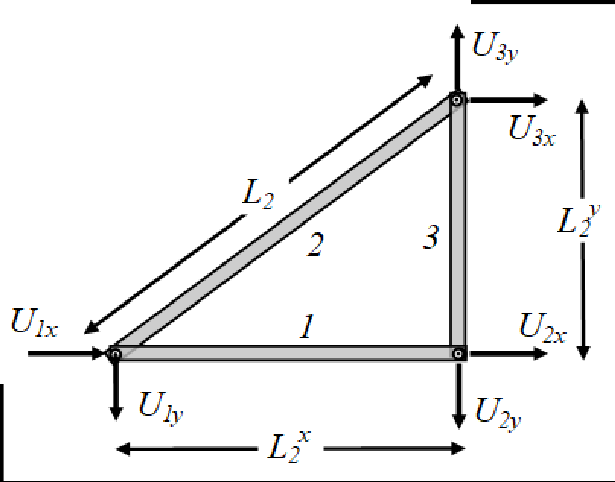
Το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζον (*singular*), αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Το γεγονός ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι ιδιάζον φαίνεται από το βαθμό του μητρώου, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 3 αντί με 6, που είναι ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας και, συνεπώς, οι διαστάσεις του μητρώου.

Με την εφαρμογή κάποιων κατάλληλων συνοριακών συνθηκών $\underline{U}_s$, ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία, $\underline{R}_f$:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

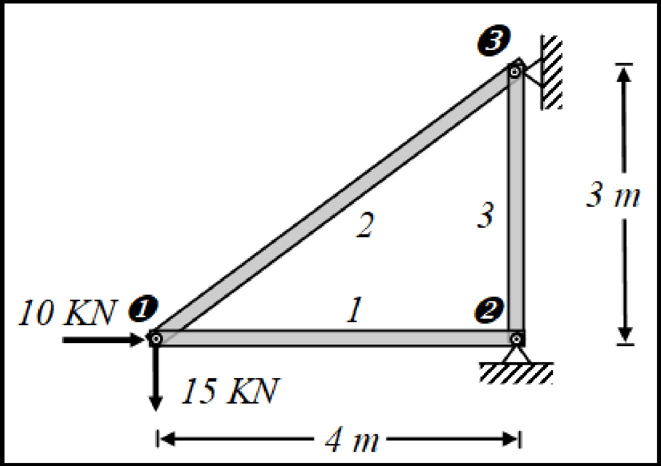
Οι συνοριακές συνθήκες, $\underline{U}_s$, και οι άγνωστες μετακινήσεις, $\underline{U}_f$, είναι οι εξής:

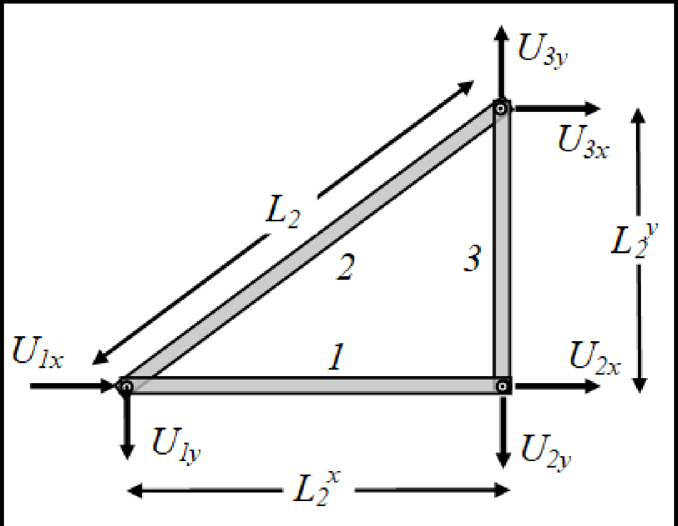
$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix}$$



Αντίστοιχα, τα επικόμβια φορτία R_f, ισούνται με:

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} KN \qquad \Rightarrow \qquad \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix}$$





$$
\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix}
$$

Τα υπομητρώα του μητρώου δυσκαμψίας K τα οποία αντιστοιχούν σε ελευθέρους και δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας είναι τα εξής:

$$
\Rightarrow \underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 \\ 1.92 & 1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \ \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7,
$$

$$
\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \ \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ 0 & 0 & 2.56 & -6.667 \\ 0 & -6.667 & -6.667 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7
$$

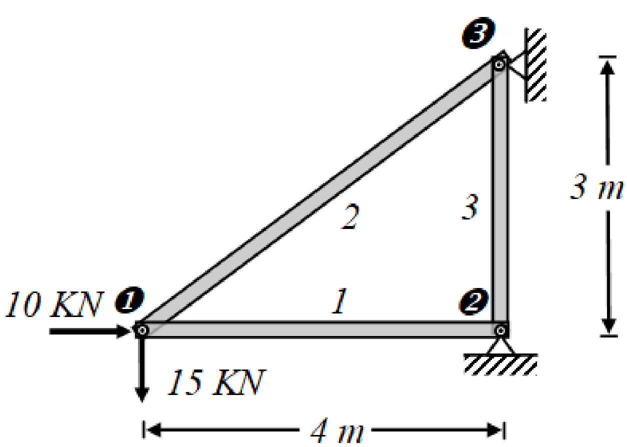
Έτσι, με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων U_f :

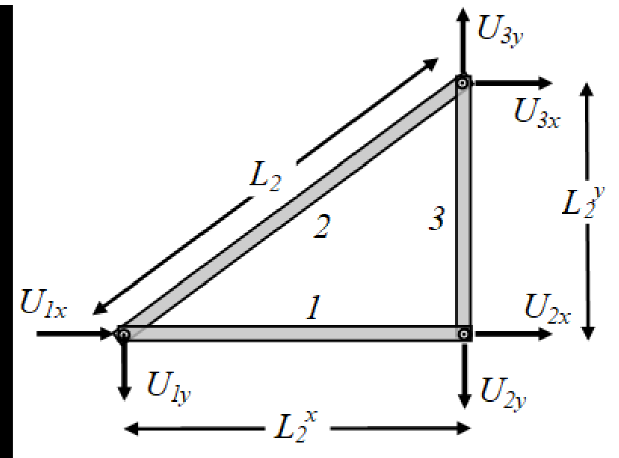
$$\begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.00184 \end{bmatrix} \text{m} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -1.84 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις:

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.00060 \\ -0.00184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30{,}000 \\ 0 \\ 20{,}000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix} \text{N} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} \text{KN}$$



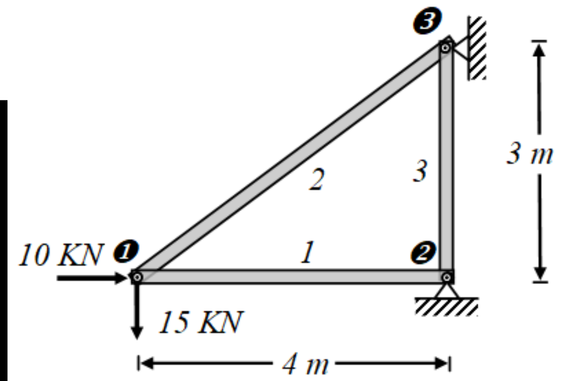


Οι αξονικές δυνάμεις στα μέλη μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις εντατικών μεγεθών και μετακινήσεων των μελών βάσει της αντιστοιχίας των μετακινήσεων των κόμβων U με τις μετακινήσεις στα άκρα του κάθε μέλους, u_m

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_2^{x'} \end{bmatrix}_m$$

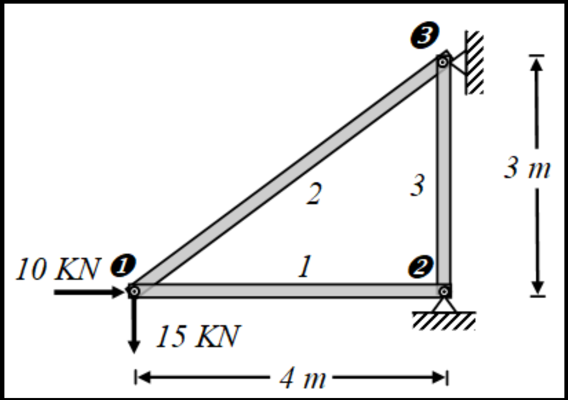
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_2^x \\ u_2^y \end{bmatrix}_m$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} KN$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \end{bmatrix} \text{KN}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_2^{x'} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 6.667 \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{KN}$$



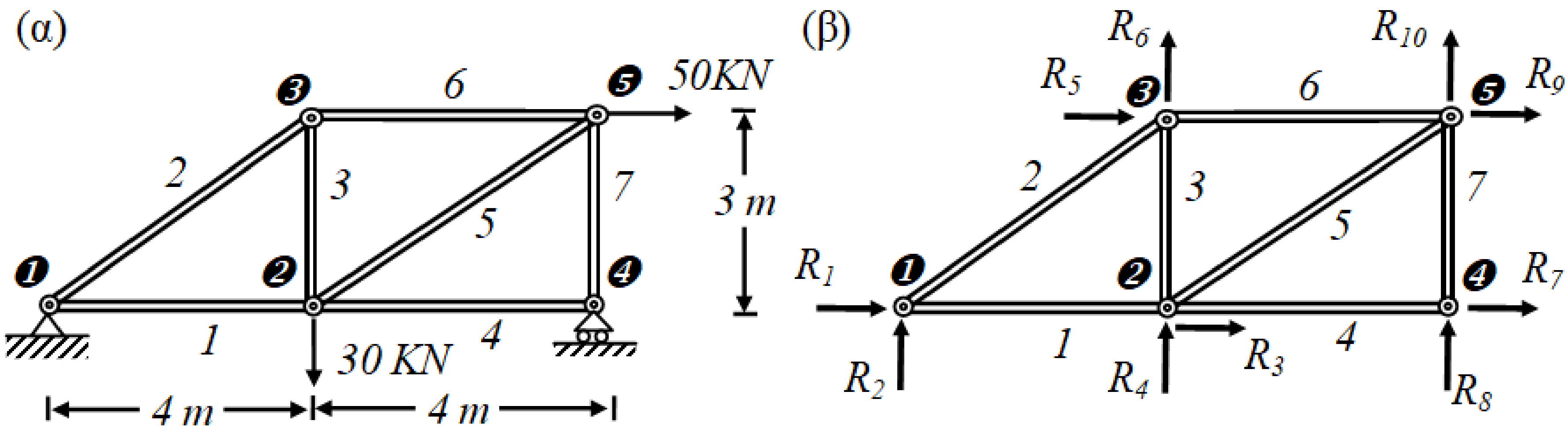
Εντολές GT-Strudl

```
STRUDL 'Example-2' 'PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS                    $ τύπος κατασκευής

UNITS M N CENTIGRADE                $ καθορισμός μονάδων

JOINT COORDINATES                   $ συντεταγμένες κόμβων
1 0 0
2 4 0
3 4 3
STATUS SUPPORT JOINTS 2 3           $ καθορισμός στηρίξεων
MEMBER INCIDENCE   $ καθορισμός συνδεσμολογίας μελών
1 1 2
2 1 3
3 2 3

CONSTANTS                           $ καθορισμός E
E 200E9 ALL
```

```
MEMBER PROPERTIES        $ καθορισμός εμβαδού διατομής
1 TO 3 AX 0.001

LOADING 1 'APPLIED JOINT LOADS
JOINT LOADS                     $ καθορισμός επικόμβιων φορτίων
1 FORCE Y -15000
1 FORCE X  10000
QUERY
STIFFNESS ANALYSIS     $ Πραγματοποίηση ανάλυσης

OUTPUT DECIMAL  5
LIST FORCES                     $ εντατικά μεγέθη
LIST DISPLACEMENTS     $ μετακινήσεις
LIST REACTIONS              $ αντιδράσεις στις στηρίξεις
```

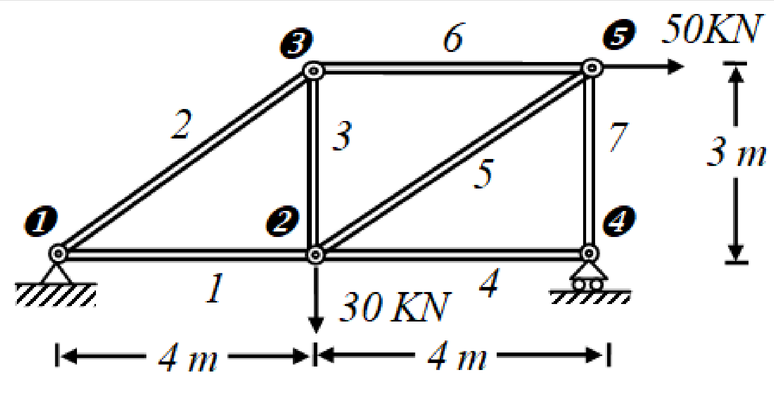
Παράδειγμα-4

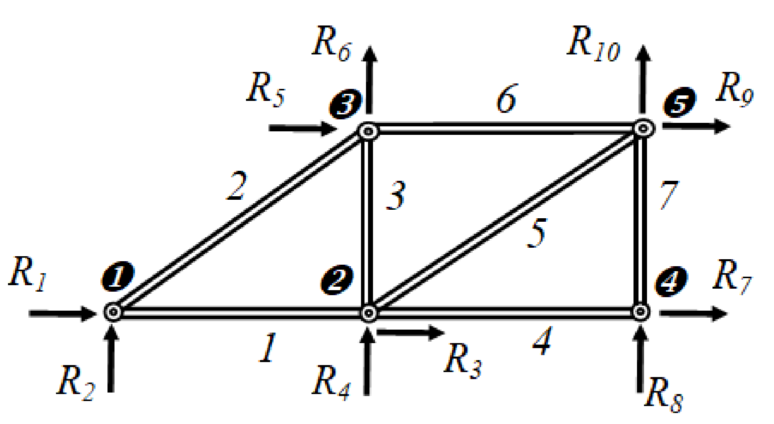
Το πιο κάτω δικτύωμα (Σχήμα 9.8.α) θα επιλυθεί με τη *Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας*, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται με: $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{GPA}$ και το εμβαδόν διατομής όλων των ράβδων ισούται με $\mathrm{A} = 0.002\,\mathrm{m}^2$.



Σχήμα 9.9: Επίλυση δικτυώματος με τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας: (α) μέλη, κόμβοι, στηρίξεις και φορτία (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

Βάσει των γεωμετρικών και μηχανικών χαρακτηριστικών της κάθε ράβδου υπολογίζονται οι συντελεστές δυσκαμψίας των μελών:





Ράβδος	L [m]	$\frac{A \cdot E}{L}\left[\mathrm{Nm}^{-1}\right]$
1	4	$1 \cdot 10^8$
2	5	$8 \cdot 10^7$
3	3	$1.33 \cdot 10^8$
4	4	$1 \cdot 10^8$
5	5	$8 \cdot 10^7$
6	4	$1 \cdot 10^8$
7	3	$1.33 \cdot 10^8$

Έτσι, τα μητρώα δυσκαμψίας των ράβδων, εκφρασμένα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε μέλους, είναι τα εξής:

$$\underline{k}_1' = \underline{k}_4' = \underline{k}_6' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8 , \qquad \underline{k}_2' = \underline{k}_5' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 8 \cdot 10^7$$

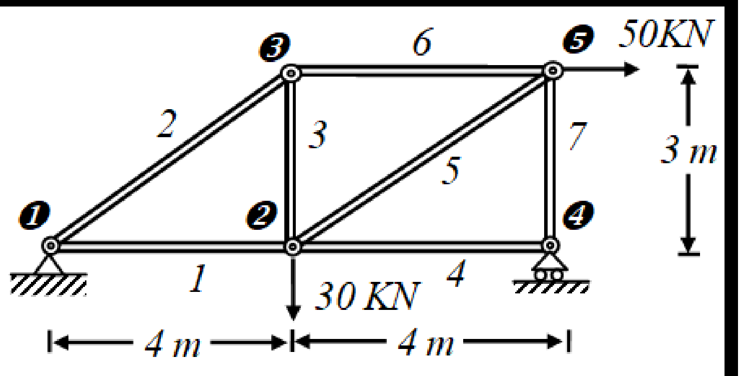
$$\underline{k}_3' = \underline{k}_7' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 1.33 \cdot 10^8$$

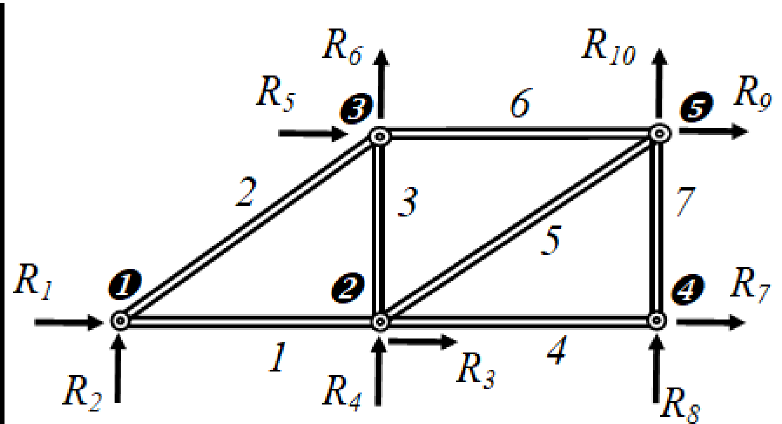
Τα μητρώα δυσκαμψίας των ράβδων συνδέουν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα της ράβδου με τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

$$\underline{s}_m' = \underline{k}_m' \cdot \underline{u}_m' \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix} = \underline{k}_m' \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, από τη γεωμετρία και συνδεσμολογία του κάθε μέλους μπορούν να προσδιορισθούν οι γωνίες που χρειάζονται για σχηματισμό των μητρώων μετασχηματισμού:

Ράβδος	Κόμβος αρχής	Κόμβος τέλους	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	1	2	0°	1	0
2	1	3	36.87°	0.8	0.6
3	2	3	90°	0	1
4	2	4	0°	1	0
5	2	5	36.87°	0.8	0.6
6	3	5	0°	1	0
7	4	5	90°	0	1





Έχοντας υπολογίσει τους πιο πάνω τριγωνομετρικούς αριθμούς, μπορούν να υπολογισθούν τα μητρώα μετασχηματισμού, $\underline{T}_m$, για το κάθε μέλος:

$$\underline{T}_m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T}_1 = \underline{T}_4 = \underline{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T}_2 = \underline{T}_5 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \underline{T}_3 = \underline{T}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, με τη βοήθεια των πιο πάνω μητρώων μετασχηματισμού, τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών μπορούν να εκφρασθούν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων:

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m{}^T \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

$$\underline{k}_m = \underline{T}_m^{\,T} \cdot \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m$$

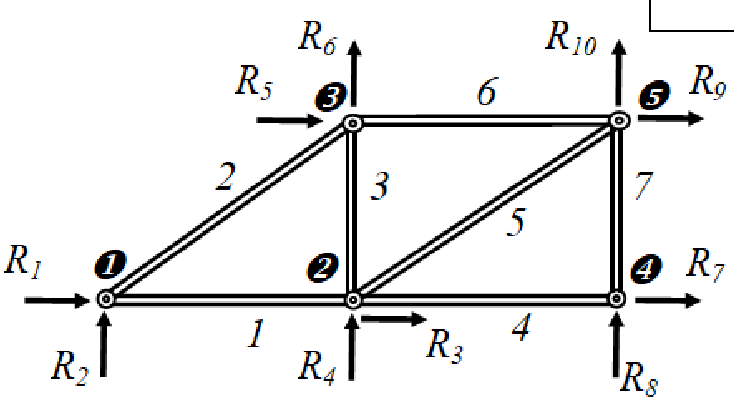
$$\Rightarrow \quad \underline{k}_1 = \underline{T}_1^{\,T} \cdot \underline{k}'_1 \cdot \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8 = \underline{k}_4 = \underline{k}_6$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_2 = \underline{T}_2^{\,T} \cdot \underline{k}'_2 \cdot \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 5.12 & 3.84 & -5.12 & -3.84 \\ 3.84 & 2.88 & -3.84 & -2.88 \\ -5.12 & -3.84 & 5.12 & 3.84 \\ -3.84 & -2.88 & 3.84 & 2.88 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \underline{k}_5$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k}_3 = \underline{T}_3^{\,T} \cdot \underline{k}'_3 \cdot \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1.33 \cdot 10^8 = \underline{k}_7$$

Για να μπορέσουν να προστεθούν τα μητρώα δυσκαμψίας των επιμέρους μελών στο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, πρέπει να προσδιορισθεί η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους $\underline{u}_m$ με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής, $\underline{U}$.

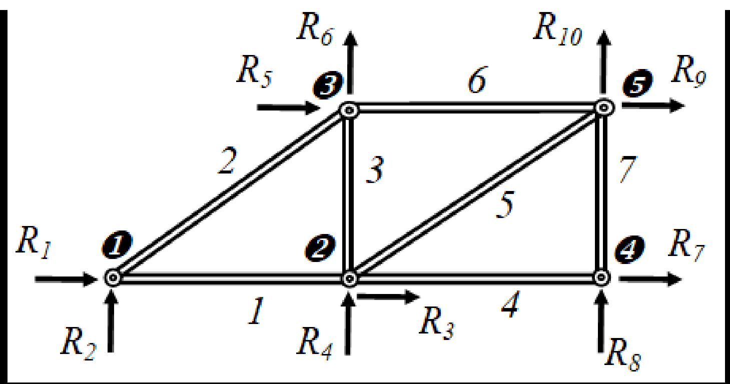
Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1	U_2	U_3	U_4
2	U_1	U_2	U_5	U_6
3	U_3	U_4	U_5	U_6
4	U_3	U_4	U_7	U_8
5	U_3	U_4	U_9	U_{10}
6	U_5	U_6	U_9	U_{10}
7	U_7	U_8	U_9	U_{10}



Ξεκινώντας από ένα μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $\underline{K}$, με μηδενικά όλα του τα στοιχεία, αθροίζονται διαδοχικά τα μητρώα δυσκαμψίας όλων των επιμέρους μελών, λαμβάνοντας υπόψη την πιο πάνω αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας των μελών και της κατασκευής, όπως ακριβώς έγινε και στα προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ της κατασκευής είναι:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1.512 & 0.384 & -1.000 & 0 & -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.384 & 0.288 & 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.000 & 0 & 2.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.512 & 0.384 \\ 0 & 0 & 0.384 & 1.621 & 0 & -1.333 & 0 & 0 & -0.384 & 0.28 \\ -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.000 & 0 \\ 0.384 & -0.288 & 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.333 & 0 & -1.333 \\ 0 & 0 & -0.512 & -0.384 & -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 \\ 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

$$\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

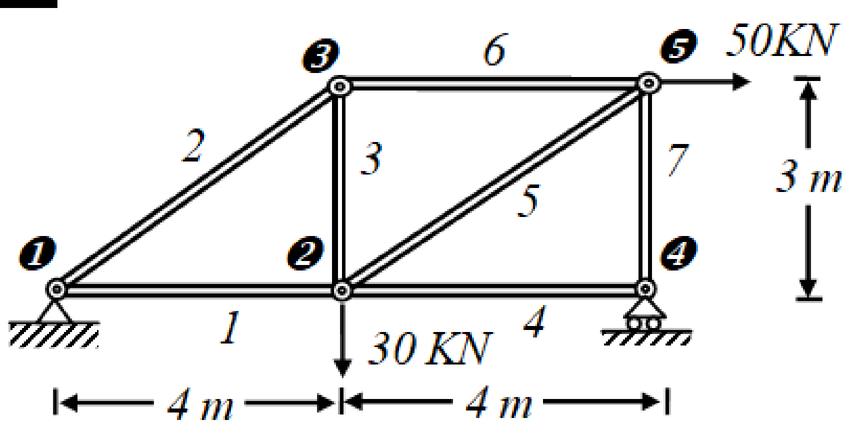


Το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ είναι ιδιάζον, αφού δεν έχουν ορισθεί συνοριακές συνθήκες για να καταστεί ο φορέας σταθερός. Με την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών $\underline{U}_s$, ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία, $\underline{R}_f$:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

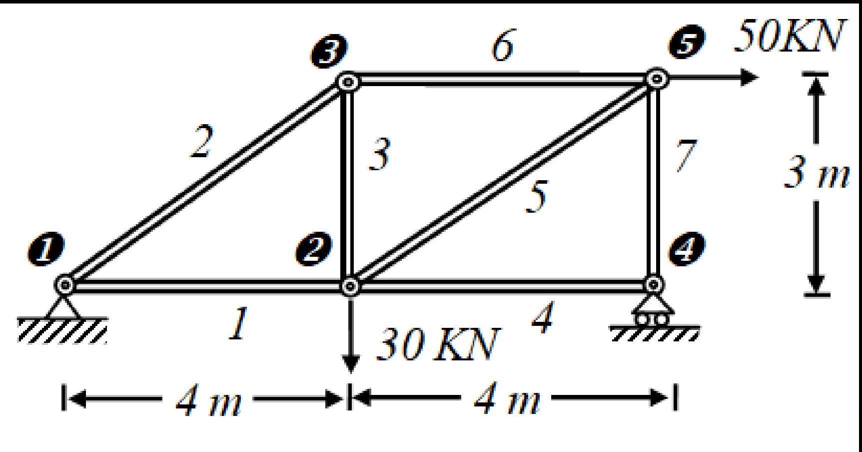
Οι συνοριακές συνθήκες $\underline{U}_s$, και οι άγνωστες μετακινήσεις $\underline{U}_f$, είναι οι εξής:

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix}$$



Αντίστοιχα, τα επικόμβια φορτία R_f , ισούνται με:

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_9 \\ R_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} KN \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_8 \end{bmatrix}$$



Τα υπομητρώα του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ τα οποία αντιστοιχούν σε ελευθέρους και δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας και θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του δικτυώματος (δεν χρειάζονται τα $\underline{K}_{fs}$ και $\underline{K}_{ss}$ αφού $\underline{U}_s = \underline{0}$) είναι τα εξής:

$$\underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 2.512 & 0.384 & 0 & 0 & -1.000 & -0.512 & -0.384 \\ 0.384 & 1.621 & 0 & -1.333 & 0 & -0.384 & -0.288 \\ 0 & 0 & 1.512 & -0.384 & 0 & -1.000 & 0 \\ 0 & -1.333 & 0.384 & 1.621 & 0 & 0 & 0 \\ -1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ -0.512 & -0.384 & -1.000 & 0 & 0 & 1.512 & 0.384 \\ -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 & 0.384 & 1.621 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -1.000 & 0 & -0.512 & -0.384 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.384 & -0.288 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.333 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Έτσι, με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}_f$:

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.45 \\ -0.9 \\ 0.794 \\ -0.928 \\ 0.45 \\ 0.844 \\ -0.253 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις:

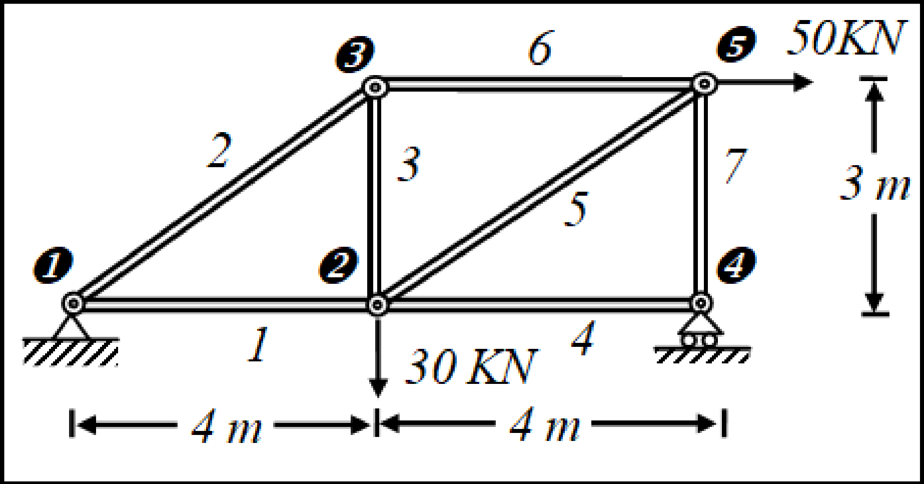
$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

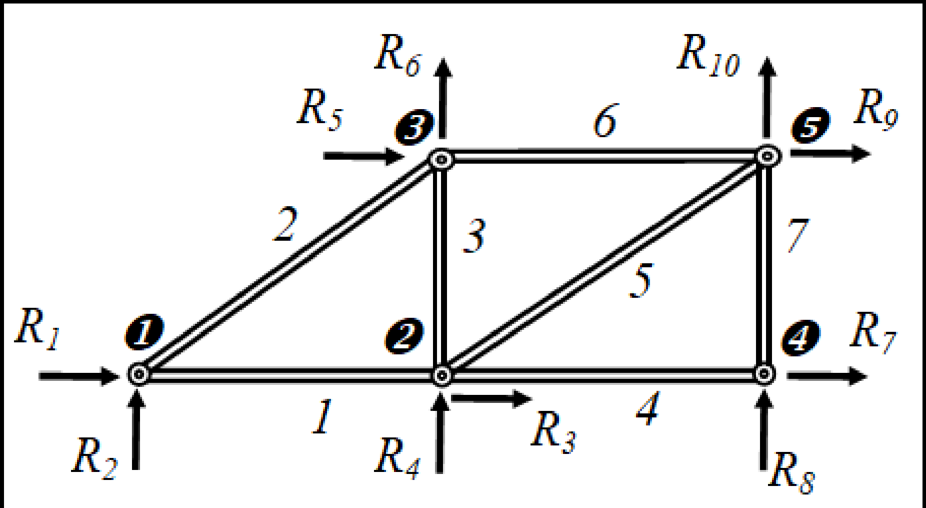
$$\Rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -3.75 \\ 33.75 \end{bmatrix} \text{KN}$$

Οι αξονικές δυνάμεις στα μέλη μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις εντατικών μεγεθών και μετακινήσεων των μελών βάσει της αντιστοιχίας των μετακινήσεων των κόμβων $\underline{U}$, με τις μετακινήσεις στα άκρα του κάθε μέλους $\underline{u}_m$:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \end{bmatrix}_m = \underline{k}'_m \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \end{bmatrix}_m = \underline{k}'_m \cdot \underline{T}_m \cdot u_m$$

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	*0*	*0*	*0.45*	*-0.9*
2	*0*	*0*	*0.794*	*-0.928*
3	*0.45*	*-0.9*	*0.794*	*-0.928*
4	*0.45*	*-0.9*	*0.45*	*0*
5	*0.45*	*-0.9*	*0.844*	*-0.253*
6	*0.794*	*-0.928*	*0.844*	*-0.253*
7	*0.45*	*0*	*0.844*	*-0.253*

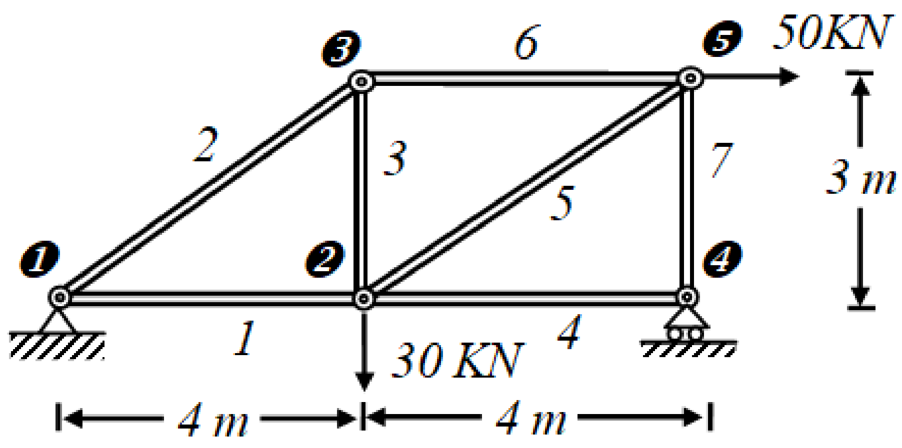




$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.00 \\ 6.25 \\ -3.75 \\ 0.00 \\ 56.25 \\ 5.00 \\ -33.75 \end{bmatrix} \mathrm{KN}$$

Για επαλήθευση των απαντήσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα ανάλυσης κατασκευών *GT-Strudl*:

```
STRUDL 'Example-3' 'PLANE TRUSS STRUCTURE'
TYPE PLANE TRUSS              $ επίπεδο δικτύωμα
UNITS M N CENTIGRADE          $ καθορισμός μονάδων

JOINT COORDINATES             $ συντεταγμένες κόμβων
1 0 0
2 4 0
3 4 3
4 8 0
5 8 3

STATUS SUPPORT JOINTS 1 4     $ στηρίξεις
JOINT RELEASES                $ καθορισμός ελευθεριών
4 FORCE X
```



MEMBER INCIDENCES $ συνδεσμολογία μελών

1 1 2

2 1 3

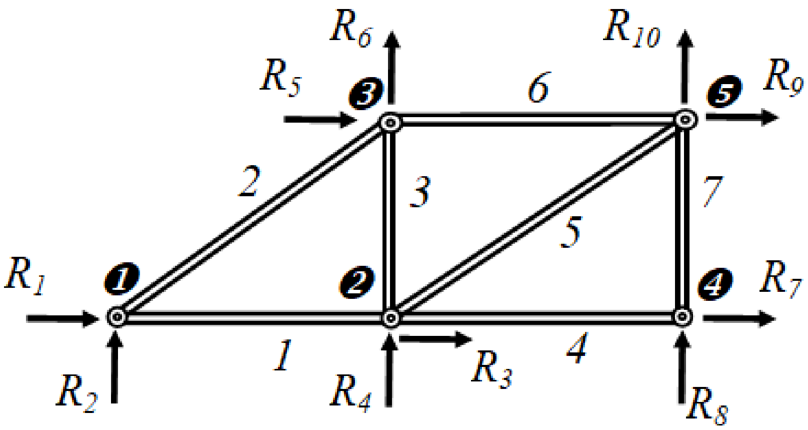
3 2 3

4 2 4

5 2 5

6 3 5

7 4 5



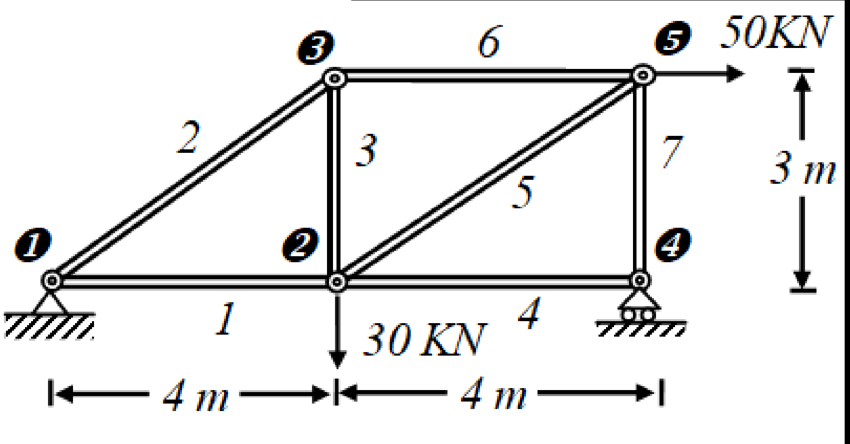
CONSTANTS $ καθορισμός σταθερών

E 200E9 ALL $ μέτρο ελαστικότητας

MEMBER PROPERTIES $ ιδιότητες μελών

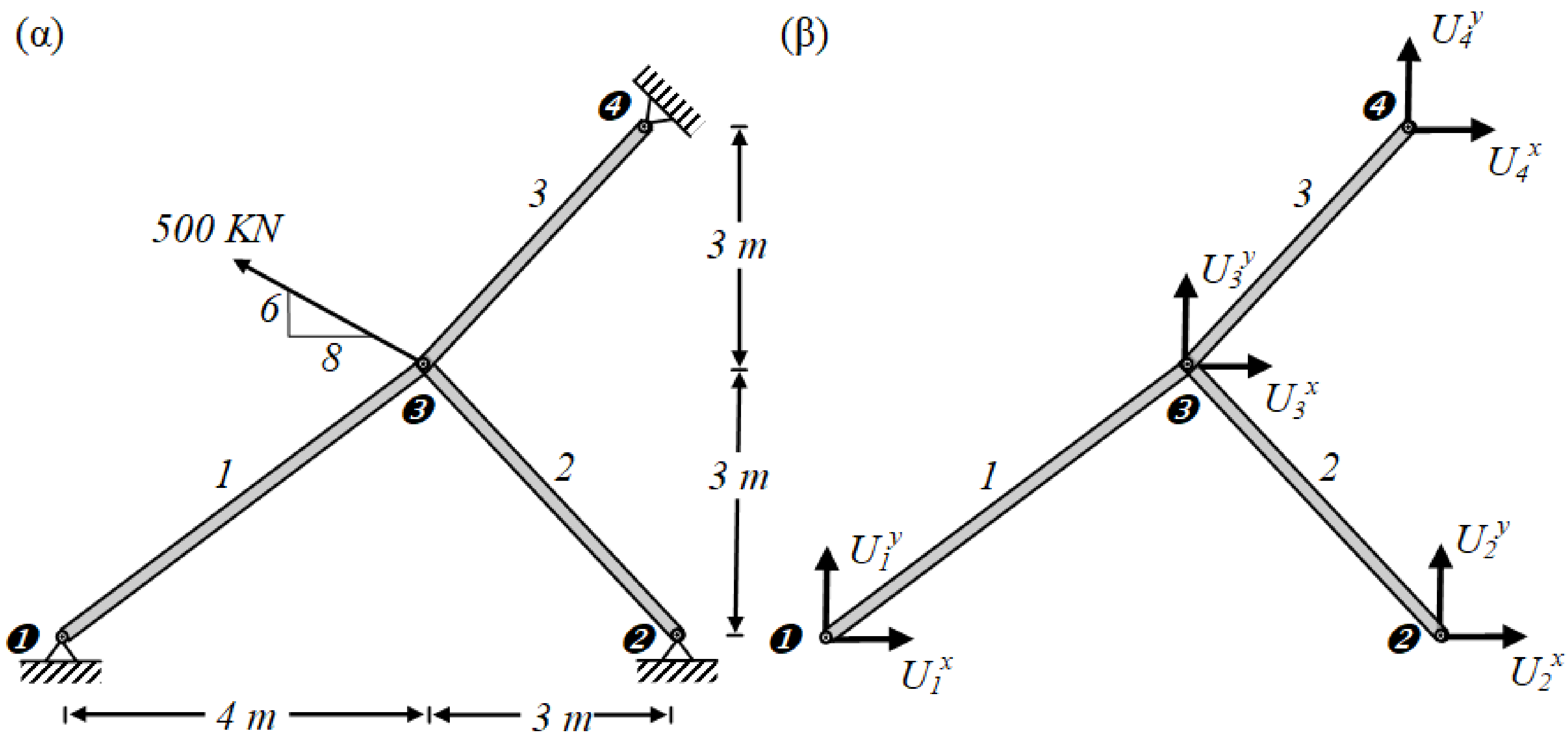
1 TO 7 AX 0.002 $ εμβαδόν διατομής

```
LOADING 1 'APPLIED LOADS - 1'   $ καθορισμός φόρτισης 1
JOINT LOADS                     $ επικόμβια φορτία
2 FORCE Y -30000
5 FORCE X  50000

QUERY

STIFFNESS ANALYSIS              $ πραγματοποίηση ανάλυσης

OUTPUT DECIMAL 5                $ καθορισμός δεκαδικών

LIST FORCES                     $ εντατικά μεγέθη
LIST DISPLACEMENTS              $ μετακινήσεις
CINPUT
```



Παράδειγμα-5

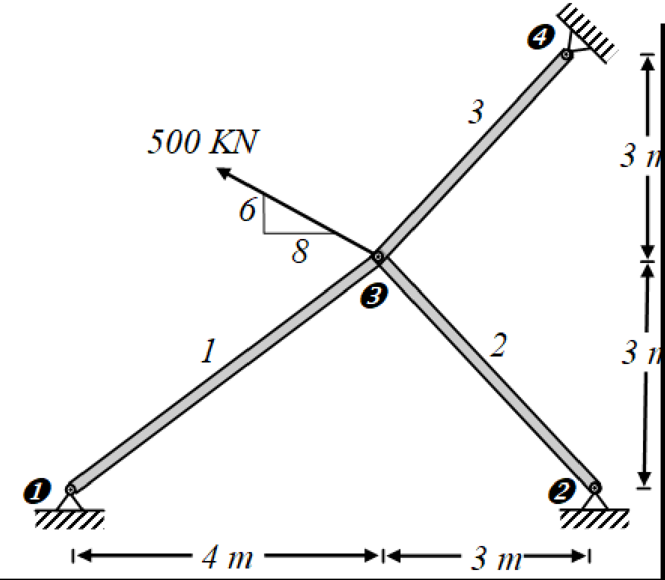
Να προσδιοριστούν οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 9.9.α), με τη Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται και για τις τρεις ράβδους με: $E = 200$ GPA και το εμβαδόν διατομής των τριών ράβδων ισούται αντίστοιχα με: $A_1 = 0.002\,m^2$, $A_2 = 0.001 m^2$ και $A_3 = 0.0015 m^2$.



Σχήμα 9.10: Επίλυση δικτυώματος με τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας: (α) μέλη, κόμβοι, στηρίξεις και φορτία (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

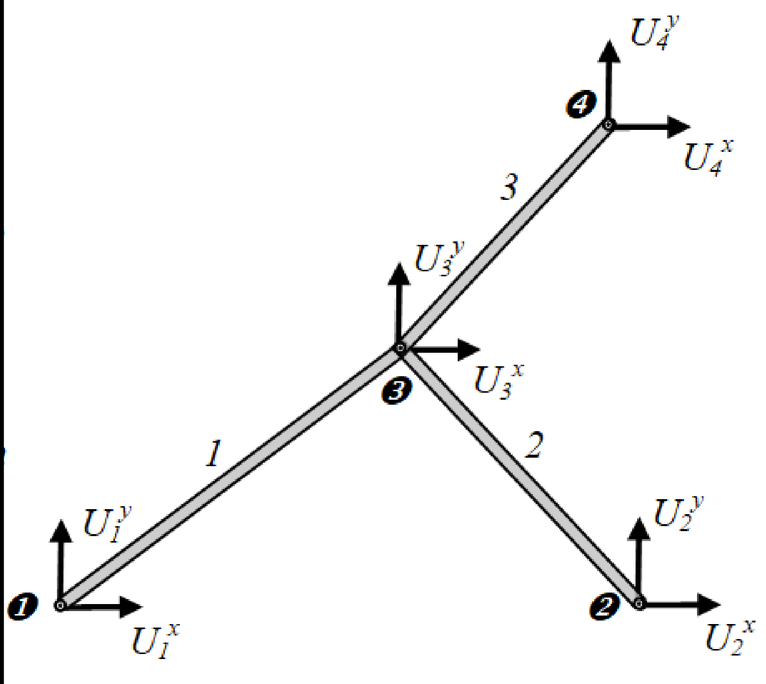
Βάσει των γεωμετρικών και μηχανικών χαρακτηριστικών της κάθε ράβδου υπολογίζονται οι συντελεστές δυσκαμψίας των μελών καθώς και οι τριγωνομετρικές γωνίες:

Ράβδος	$L\,[m]$	$\frac{A \cdot E}{L}\left[Nm^{-1}\right]$	θ_m	$\cos\theta_m$	$\sin\theta_m$
1	*5*	$8 \cdot 10^7$	*36.87°*	*0.8*	*0.6*
2	$\sqrt{18}$	$4.71 \cdot 10^7$	*135°*	*-0.707*	*0.707*
3	$\sqrt{18}$	$7.07 \cdot 10^7$	*45°*	*0.707*	*0.707*



Η αντιστοιχία των βαθμών ελευθερίας του κάθε μέλους $\underline{u}_m$ με τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\underline{U}$:

Ράβδος	u_1^x	u_1^y	u_2^x	u_2^y
1	U_1^x	U_1^y	U_3^x	U_3^y
2	U_2^x	U_2^y	U_3^x	U_3^y
3	U_3^x	U_3^y	U_4^x	U_4^y



Ακολούθως, με τη βοήθεια της πιο κάτω σχέσης, τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών $\underline{k}_m$ μπορούν να εκφρασθούν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Επίσης, εάν ζητούνται μόνο οι μετακινήσεις των κόμβων δηλαδή το $\underline{U}_f$, αρκεί ο υπολογισμός μόνο του $\underline{K}_{ff}$, δηλαδή από κάθε μητρώο δυσκαμψίας μέλους $\underline{k}_m$ παίρνουμε τα στοιχεία που αντιστοιχούν στις μετακινήσεις U_3^x και U_3^y:

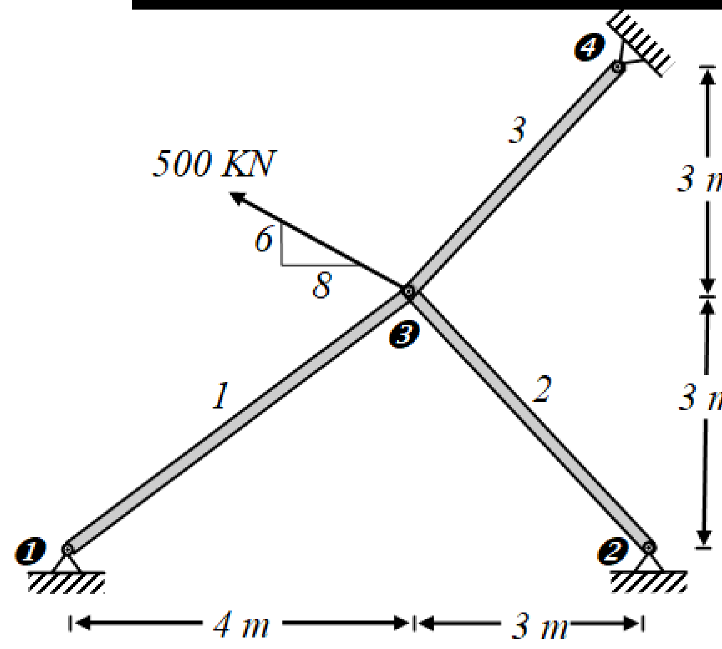
$$\underline{k}_m = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$\underline{k}_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & U_3^x & U_3^y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5.12 & 3.84 & -5.12 & -3.84 \\ 3.84 & 2.88 & -3.84 & -2.88 \\ -5.12 & -3.84 & \boldsymbol{5.12} & \boldsymbol{3.84} \\ -3.84 & -2.88 & \boldsymbol{3.84} & \boldsymbol{2.88} \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^7$$

$$
\underline{k}_2 = \begin{array}{c} \\ \\ U_3^x \\ U_3^y \end{array}
\overset{\begin{array}{cccc} & & U_3^x & U_3^y \end{array}}{\begin{bmatrix} 2.355 & -2.355 & -2.355 & 2.355 \\ -2.355 & 2.355 & 2.355 & -2.355 \\ -2.355 & 2.355 & \boldsymbol{2.355} & \boldsymbol{-2.355} \\ 2.355 & -2.355 & \boldsymbol{-2.355} & \boldsymbol{2.355} \end{bmatrix}} \cdot 10^7
$$

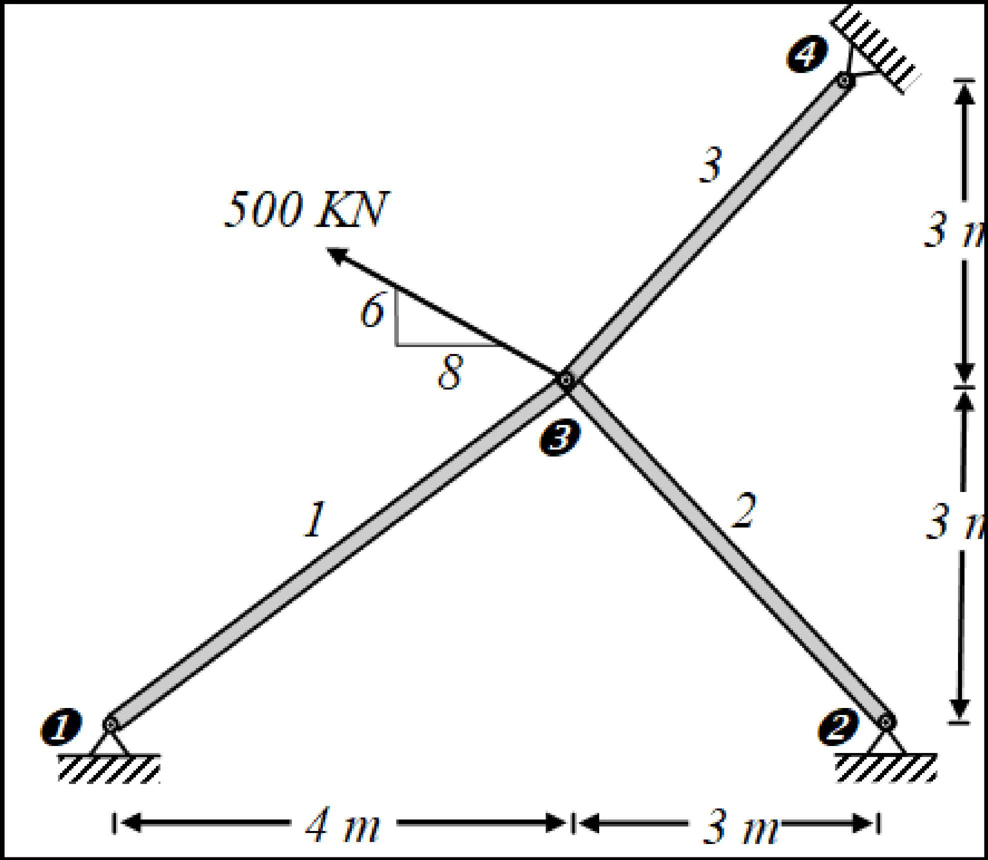
$$
\underline{k}_3 = \begin{array}{c} U_3^x \\ U_3^y \\ \\ \\ \end{array}
\overset{\begin{array}{cccc} U_3^x & U_3^y & & \end{array}}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{3.535} & \boldsymbol{3.535} & -3.535 & -3.535 \\ \boldsymbol{3.535} & \boldsymbol{3.535} & -3.535 & -3.535 \\ -3.535 & -3.535 & 3.535 & 3.535 \\ -3.535 & -3.535 & 3.535 & 3.535 \end{bmatrix}} \cdot 10^7
$$

$$
\Rightarrow \quad \underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 11.01 & 5.02 \\ 5.02 & 8.77 \end{bmatrix} \cdot 10^7
$$

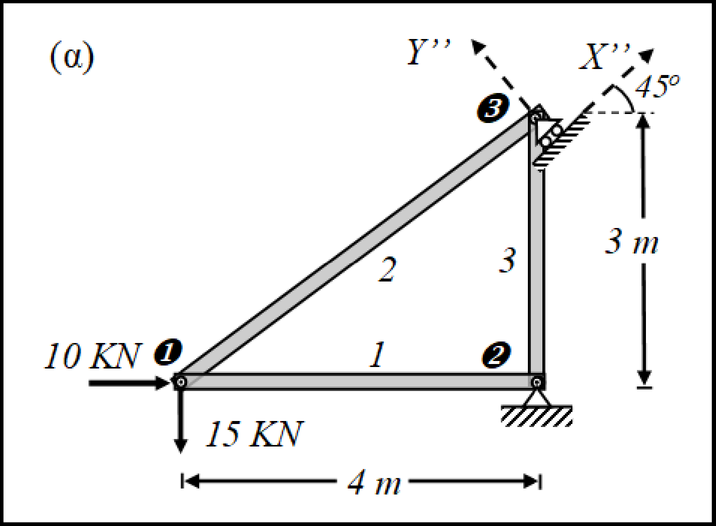


Έτσι, οι μετακινήσεις του κόμβου 3 λόγω του εξωτερικού φορτίου ισούνται με:

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 12.29 & -7.03 \\ -7.03 & 15.43 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -400,000 \\ 300,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.0\,\text{mm} \\ 7.4\,\text{mm} \end{bmatrix}$$

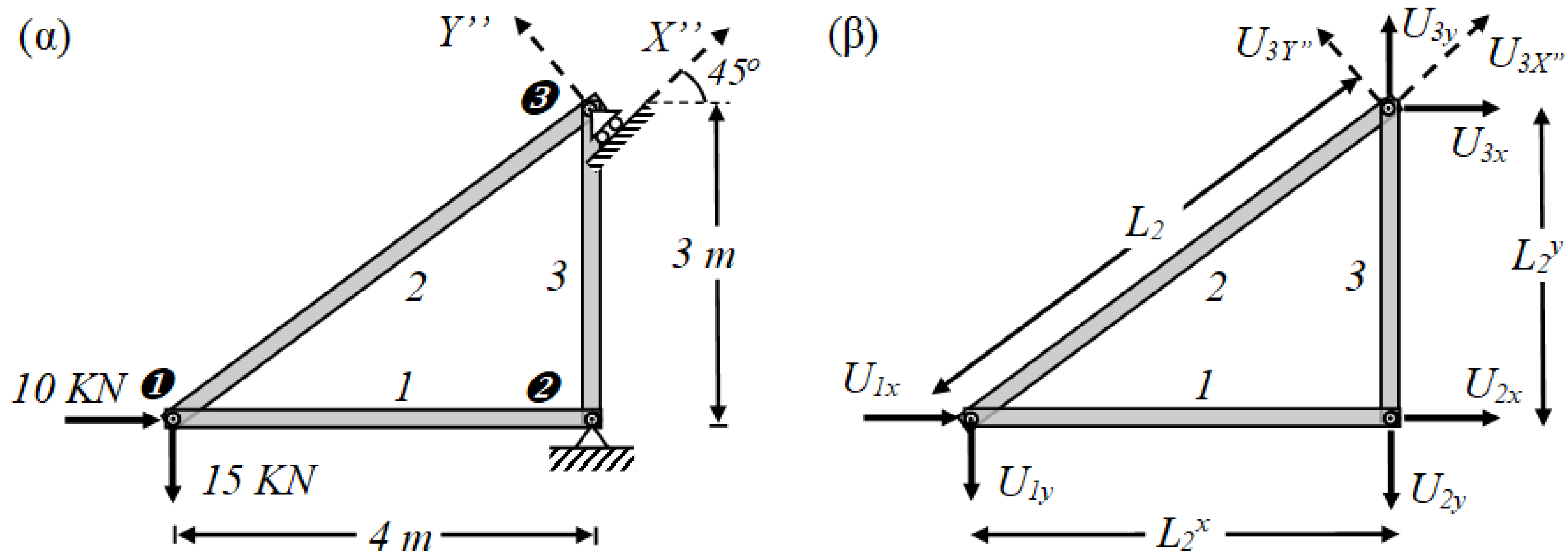


Κεκλιμένες συνοριακές συνθήκες

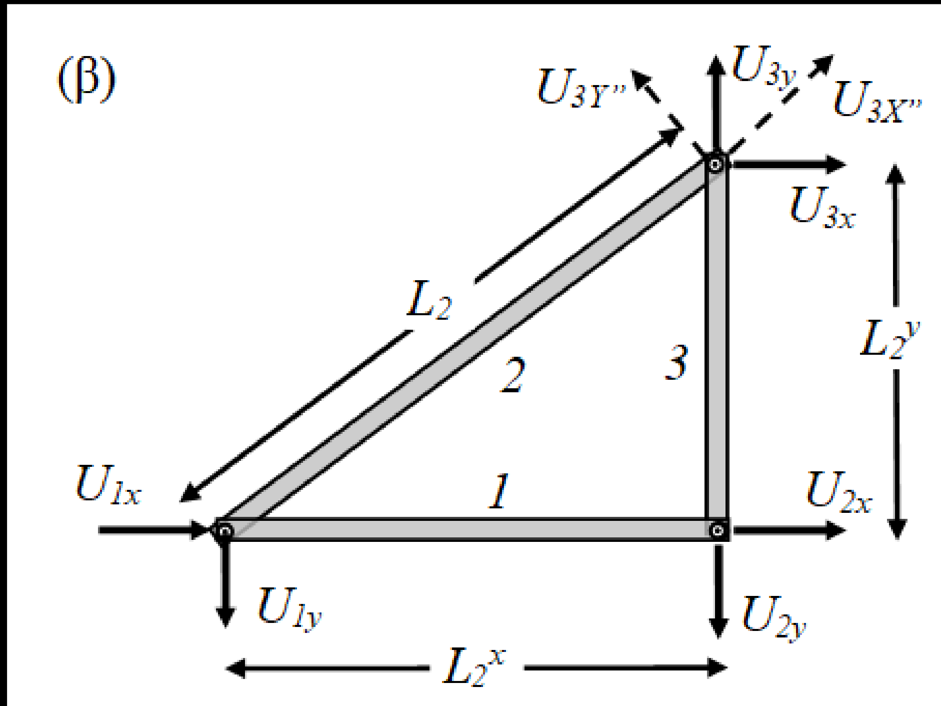


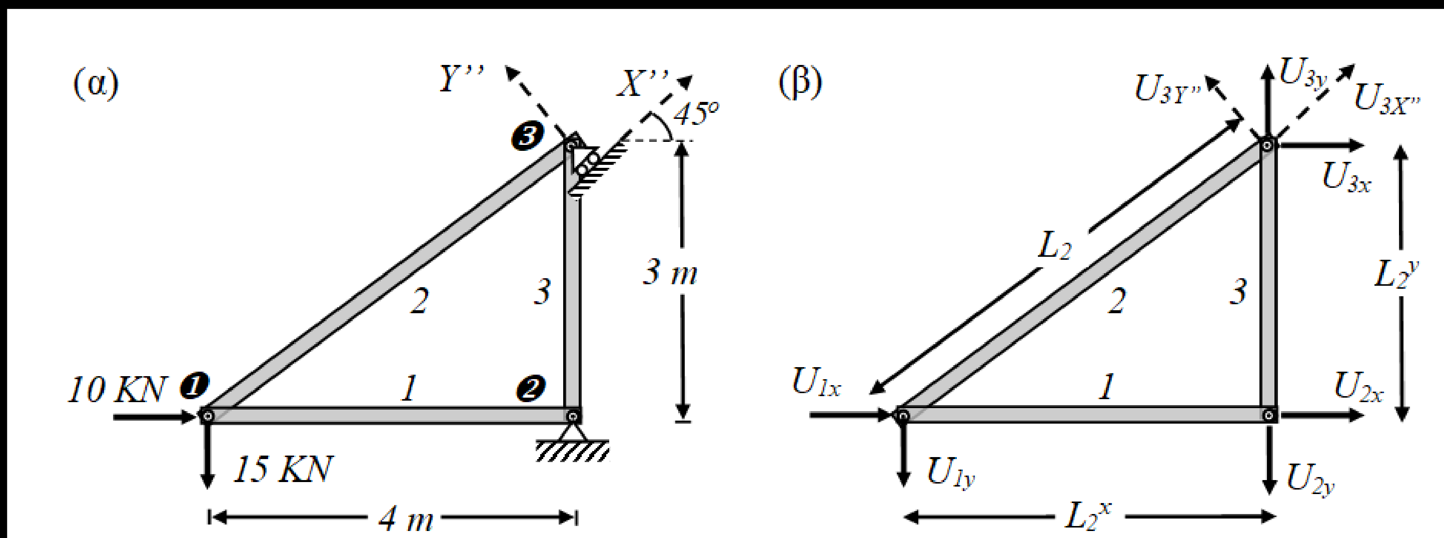
Σε περιπτώσεις όπου μια συνοριακή συνθήκη, π.χ. μια κύλιση σε ένα επίπεδο φορέα (Σχήμα 9.11.α), είναι υπό γωνία σε σχέση με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, δεν είναι δυνατή η απλή αφαίρεση των αντίστοιχων γραμμών και στηλών από το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας για να προκύψει το υπομητρώο $\underline{K}_{ff}$, καθώς και τα άλλα υπομητρώα. Ο διαχωρισμός των βαθμών ελευθερίας ενός φορέα σε αυτούς που έχουν άγνωστες μετακινήσεις και γνωστά επικόμβια φορτία, από αυτούς που έχουν γνωστές μετακινήσεις, οι οποίες είναι συνήθως μηδενικές και άγνωστες τις αντίστοιχες αντιδράσεις, δεν είναι δυνατός γιατί οι συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να εκφρασθούν στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

Η δεδομένη συνοριακή συνθήκη για μια κεκλιμένη κύλιση (Σχήμα 9.11.α) μπορεί να εκφρασθεί σε κάποιο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$, το οποίο ορίζεται να είναι παράλληλο με τη δεδομένη μετακίνηση στη στήριξη. Έτσι, οι αντιδράσεις καθώς και οι μετακινήσεις κατά τη συγκεκριμένη ελευθερία θα μπορούν να εκφρασθούν βάσει του βοηθητικού συστήματος συντεταγμένων.



Σχήμα 9.11: Επίλυση δικτυώματος με κεκλιμένη κύλιση: (α) μέλη, κόμβοι και στηρίξεις (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.



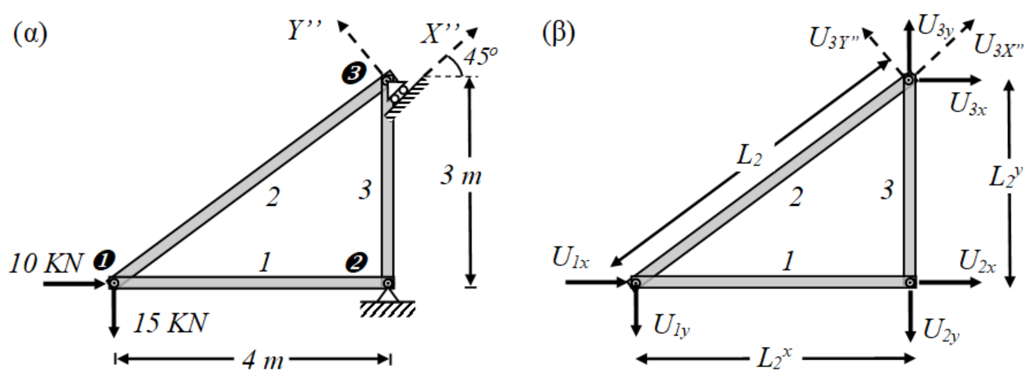


Σχήμα 9.11: Επίλυση δικτυώματος με κεκλιμένη κύλιση: (α) μέλη, κόμβοι και στηρίξεις (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

Συνεπώς, αφού σχηματιστεί το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$, στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, θα πρέπει οι αντίστοιχες με τους κεκλιμένους βαθμούς ελευθερίας γραμμές του μητρώου να μετασχηματισθούν, ώστε να είναι παράλληλος ο άξονας των βαθμών ελευθερίας με τη δεδομένη μετακίνηση. Έτσι, θα είναι δυνατή η αφαίρεση της συγκεκριμένης γραμμής από το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$ κατά το σχηματισμό του υπομητρώου $\underline{K}_{ff}$, καθώς και η συμπερίληψη της γραμμής εκείνης στο σχηματισμό του υπομητρώου $\underline{K}_{sf}$.

Για το μετασχηματισμό των εξισώσεων ισορροπίας ενός κόμβου n από το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων XY (R_n^x και R_n^y) στο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$ ($R_n^{x''}$ και $R_n^{y''}$) μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού και τα σχετικά συνημίτονα κατευθύνσεως.

$$\begin{bmatrix} R_n^{x''} \\ R_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x''x} & \cos\theta_{x''y} \\ \cos\theta_{y''x} & \cos\theta_{y''y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_n^{x} \\ R_n^{y} \end{bmatrix}$$

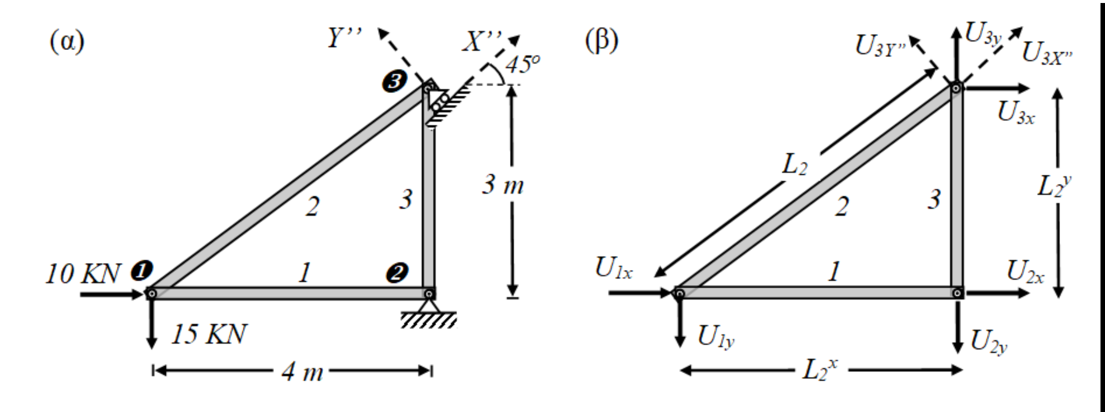


Ταυτοχρόνως, πρέπει επίσης να μετασχηματιστούν οι μετακινήσεις που αντιστοιχούν στην κεκλιμένη στήριξη στο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$, αφού σε αυτό είναι δεδομένη η μηδενική μετακίνηση. Για αυτόν το μετασχηματισμό πρέπει οι αντίστοιχες στήλες του μητρώου δυσκαμψίας να πολλαπλασιαστούν από τα δεξιά με το μητρώο μετασχηματισμού αφού οι μετακινήσεις ορίζονται ως:

$$\begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x''x} & \cos\theta_{x''y} \\ \cos\theta_{y''x} & \cos\theta_{y''y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix}$$

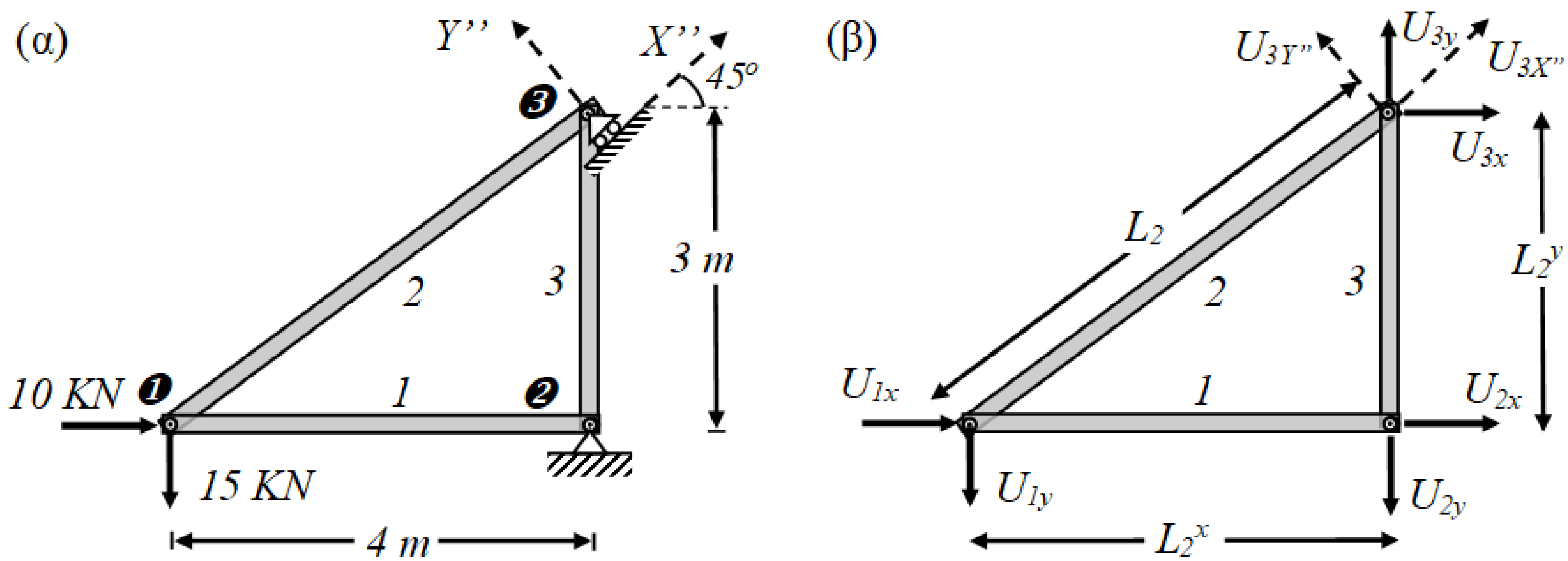
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_n^{x} \\ U_n^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & -\sin\theta'' \\ \sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_n^{x''} \\ U_n^{y''} \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, είναι πολύ απλό να αφαιρεθεί η εξίσωση που καθορίζει τη δεδομένη μετακίνηση (π.χ. $U_n^{y''} = 0$) στο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων για το σχηματισμό του υπομητρώου $\underline{K}_{ff}$ και τον εν συνεχεία υπολογισμό των αγνώστων μετακινήσεων των κόμβων της κατασκευής.



Παράδειγμα-6

Το πιο κάτω απλό δικτύωμα (Σχήμα 9.11.α), με μέτρο ελαστικότητας του υλικού $E = 200$ GPA και εμβαδόν διατομής όλων των ράβδων $A = 0.001\text{m}^2$, έχει μια κεκλιμένη κύλιση στον κόμβο ❸ υπό γωνία $45°$. Το δικτύωμα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί και στα προηγούμενα δύο παραδείγματα, αλλά με διαφορετικές συνθήκες στήριξης.



Σχήμα 9.11: Επίλυση δικτυώματος με κεκλιμένη κύλιση: (α) μέλη, κόμβοι και στηρίξεις (β) βαθμοί ελευθερίας κόμβων.

Το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας του δικτυώματος, το οποίο συνδέει τα επικόμβια φορτία με τις μετακινήσεις των κόμβων στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 9.11.β), ισούται με:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{U}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις ισορροπίας εκφρασμένες στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, ενώ οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε κύλιση η οποία είναι κεκλιμένη κατά $\theta = 45°$, σε σχέση με τον απόλυτο άξονα των X.

Συνεπώς, για να είναι δυνατό να επιβληθούν οι συνοριακές συνθήκες στον κόμβο ❸ πρέπει οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας να μετασχηματιστούν στο κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $X''Y''$.

$$\begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

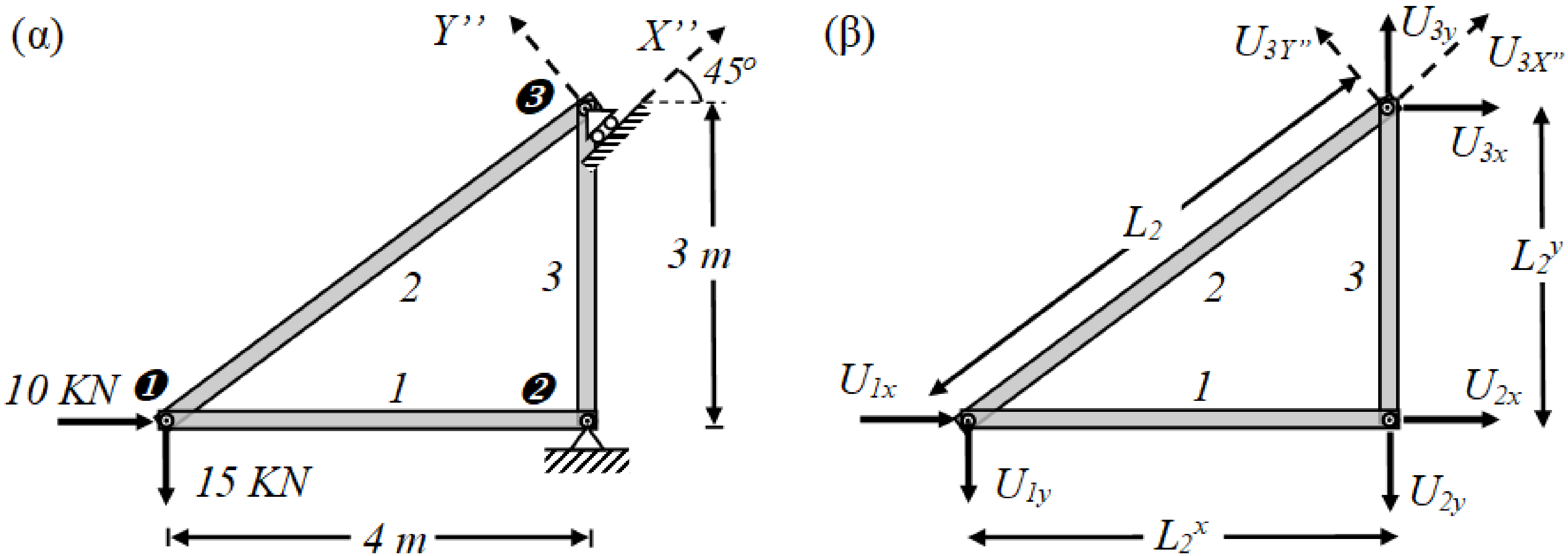
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} R_3^{x''} \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \underline{T}'' \cdot \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_3^{x''} \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 & 0 & 0 & 2.56 & 1.92 \\ -1.92 & -1.44 & 0 & -6.667 & 1.92 & 8.107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_3^{x''} \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 3.1678 & 7.0902 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & -0.4525 & 4.3749 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$

Έτσι, οι δύο τελευταίες γραμμές του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$, οι οποίες αντιστοιχούν στην κεκλιμένη στήριξη μετασχηματίζονται. Συνεπώς, το μετασχηματισμένο μητρώο δυσκαμψίας έχει ως εξής:

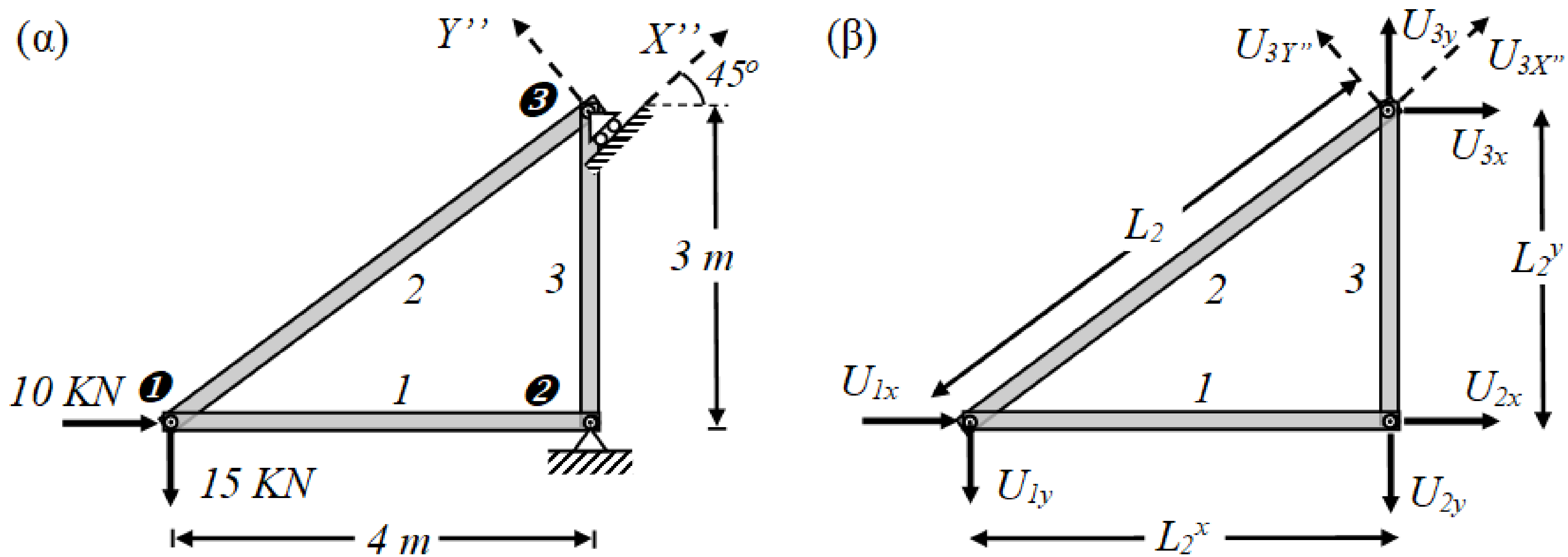
$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -2.56 & -1.92 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -1.92 & -1.44 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & 0 & -6.667 \\ -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 3.1678 & 7.0902 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & -0.4525 & 4.3749 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$



Παρομοίως, οι αντίστοιχες μετακινήσεις του κόμβου ❸, οι οποίες ενδεχομένως να είναι δεδομένες αλλά μη μηδενικές, μπορούν να μετασχηματιστούν από το κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων στο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τον πιο κάτω μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix} = \underline{T}'' \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_3^{x} \\ U_3^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta'' & \sin\theta'' \\ -\sin\theta'' & \cos\theta'' \end{bmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} U_3^{x''} \\ U_3^{y''} \end{bmatrix}$$



Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$, το οποίο εξακολουθεί να παραμένει ιδιάζον έχει την πιο κάτω μορφή μετά το μετασχηματισμό των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στη κεκλιμένη κύλιση:

$$\begin{bmatrix} -2.56 & -1.92 \\ -1.92 & -1.44 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.667 \\ 3.1678 & 7.0902 \\ -0.4525 & 4.3749 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1678 & 0.4525 \\ -2.3759 & 0.3394 \\ 0 & 0 \\ -4.714 & -4.714 \\ 7.2535 & 2.7736 \\ 2.7736 & 3.4135 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Με αυτούς τους μετασχηματισμούς των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στη κεκλιμένη κύλιση, το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}$, το οποίο εξακολουθεί να παραμένει ιδιάζον παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -3.1678 & 0.4525 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -2.3759 & 0.3394 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & -4.7140 & -4.7140 \\ -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 7.2535 & 2.7736 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & 2.7736 & 3.4135 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -5 & 0 & -3.1678 & 0.4525 \\ 1.92 & 1.44 & 0 & 0 & -2.3759 & 0.3394 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.667 & -4.7140 & -4.7140 \\ -3.1678 & -2.3759 & 0 & -4.7140 & 7.2535 & 2.7736 \\ 0.4525 & 0.3394 & 0 & -4.7140 & 2.7736 & 3.4135 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Με την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών $\underline{U}_s$, ο φορέας μπορεί να γίνει σταθερός και να επιλυθεί για τα επικόμβια φορτία $\underline{R}_f$:

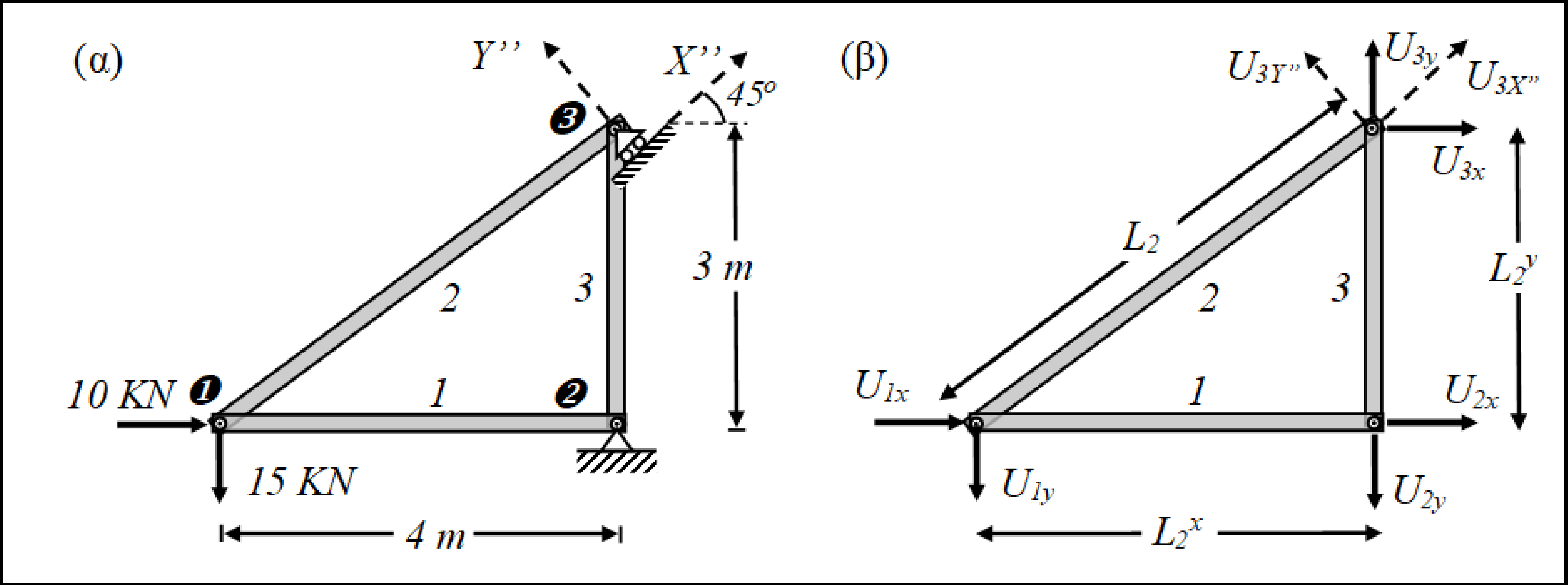
$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

Οι συνοριακές συνθήκες $\underline{U}_s$ και οι άγνωστες μετακινήσεις $\underline{U}_f$, είναι οι εξής:

$$\underline{U}_s = \begin{bmatrix} U_2^x \\ U_2^y \\ U_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{U}_f = \begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^{x''} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, τα επικόμβια φορτία, $\underline{R}_f$, ισούνται με:

$$\underline{R}_f = \begin{bmatrix} R^x_1 \\ R^y_1 \\ R^{x''}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \\ 0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} KN \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R^x_2 \\ R^y_2 \\ R^{y''}_3 \end{bmatrix}$$



Τα υπομητρώα του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}$ τα οποία αντιστοιχούν σε ελευθέρους και δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας είναι τα εξής:

$$\Rightarrow \quad \underline{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 7.56 & 1.92 & -3.1678 \\ 1.92 & 1.44 & -2.3759 \\ -3.1678 & -2.3759 & 7.2535 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{fs} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0.4525 \\ 0 & 0 & 0.3394 \\ 0 & -4.7140 & 2.7736 \end{bmatrix} \cdot 10^7,$$

$$\underline{K}_{sf} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.7140 \\ 0.4525 & 0.3394 & 2.7736 \end{bmatrix} \cdot 10^7, \quad \underline{K}_{ss} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & -4.7140 \\ 0 & -4.7140 & 3.4135 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

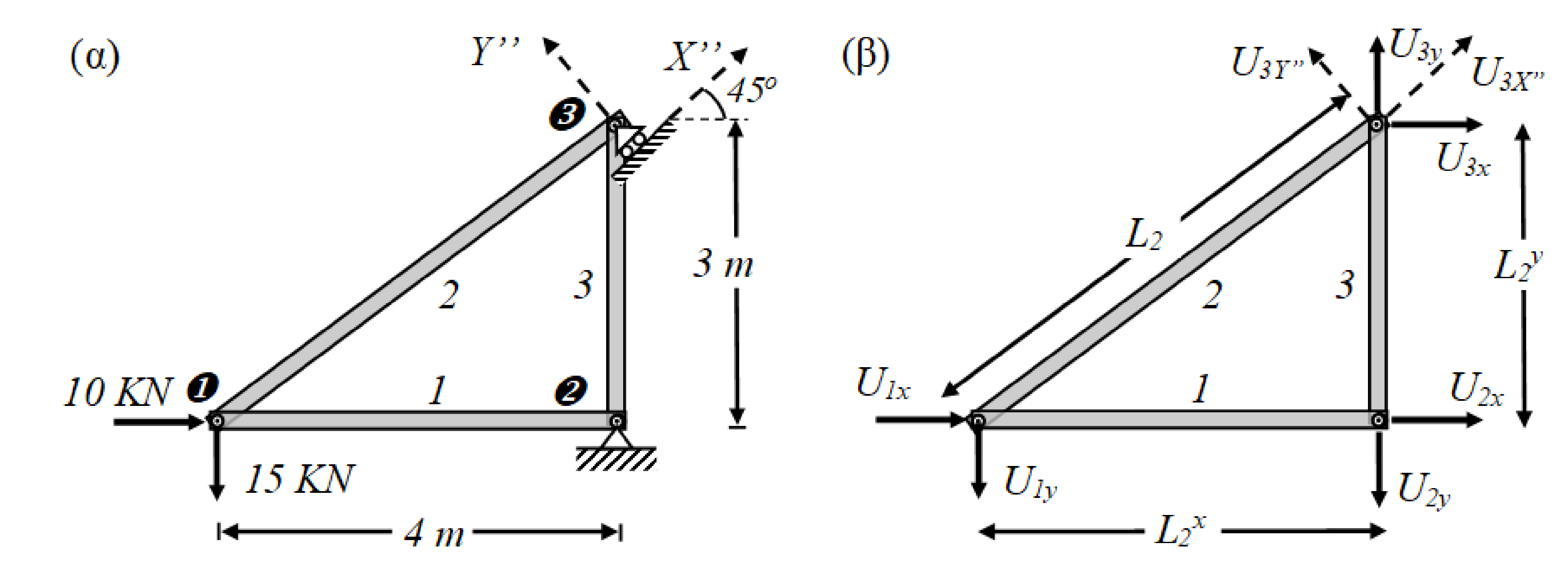
Έτσι, με δεδομένες μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}_f$:

$$\begin{bmatrix} U_1^x \\ U_1^y \\ U_3^{x''} \end{bmatrix} = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \underline{R}_f = \begin{bmatrix} 0.00060 \\ 0.00307 \\ -0.00074 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 3.07 \\ -0.742 \end{bmatrix} mm$$

Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες μετακινήσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις:

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f$$

$$\Rightarrow \underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_2^x \\ R_2^y \\ R_3^{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30{,}000 \\ 35{,}000 \\ -28{,}284 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30 \\ 35 \\ -28.3 \end{bmatrix} KN$$



Υποχωρήσεις στηρίξεων

Τυχόν υποχωρήσεις στηρίξεων, και γενικότερα εκ των προτέρων γνωστές μετακινήσεις στηρίξεων, αντιμετωπίζονται πολύ απλά με τη μέθοδο δυσκαμψίας, αφού έχει ήδη ληφθεί υπόψη ότι οι μετακινήσεις στηρίξεων, $\underline{U}_s$, μπορεί να είναι μη μηδενικές.

Έτσι, με δεδομένες μη μηδενικές μετακινήσεις στις συνοριακές συνθήκες $\underline{U}_s = \underline{U}_s^*$ μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες μετακινήσεις των κόμβων $\underline{U}_f$:

$$\underline{U}_f = \underline{K}_{ff}^{-1} \cdot \left(\underline{R}_f - \underline{K}_{fs} \cdot \underline{U}_s^* \right)$$

Ενώ οι αντίστοιχες αντιδράσεις ισούνται με:

$$\underline{R}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{U}_f + \underline{K}_{ss} \cdot \underline{U}_s^*$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_s \end{bmatrix}$$

Ανάλυση χωρικών δικτυωμάτων

Η διαδικασία ανάλυσης χωρικών δικτυωμάτων είναι ίδια με τη διαδικασία επίλυσης επίπεδων δικτυωμάτων, όπως έχει παρουσιαστεί στις προηγούμενες παραγράφους. Οι μόνες διαφορές είναι ότι σε κάθε κόμβο υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας και τα μητρώα δυσκαμψίας και μετασχηματισμού έχουν αντίστοιχες διαστάσεις.

Τα μητρώα μετασχηματισμού έχουν τη πιο κάτω μορφή, χρησιμοποιώντας συνημίτονα κατευθύνσεως, όπου η γωνία $\theta_{zx'}$ ορίζεται σαν η γωνία από τον απόλυτο άξονα Z στον τοπικό άξονα X' :

$$\begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{x'x} & \cos\theta_{x'y} & \cos\theta_{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{y'x} & \cos\theta_{y'y} & \cos\theta_{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{z'x} & \cos\theta_{z'y} & \cos\theta_{z'z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x} \\ u_1^{y} \\ u_1^{z} \\ u_2^{x} \\ u_2^{y} \\ u_2^{z} \end{bmatrix}$$

Τα μητρώα δυσκαμψίας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι απλά διευρυμένα με άλλες 2 γραμμές και στήλες και έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} s_1^{x'} \\ s_1^{y'} \\ s_1^{z'} \\ s_2^{x'} \\ s_2^{y'} \\ s_2^{z'} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{x'} \\ u_1^{y'} \\ u_1^{z'} \\ u_2^{x'} \\ u_2^{y'} \\ u_2^{z'} \end{bmatrix}_m$$

Γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

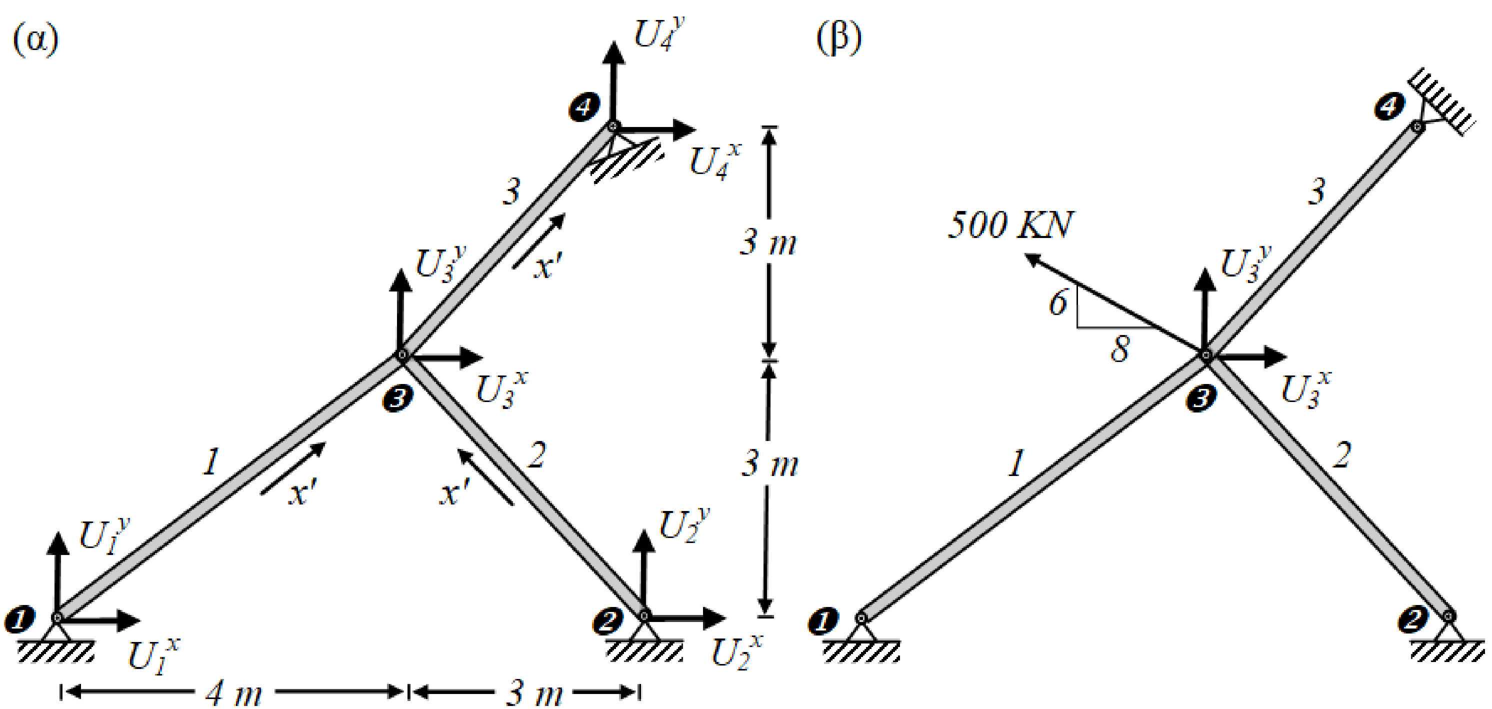
Με τη γραφική μέθοδο μπορεί να επιλυθεί πρακτικά ένα δικτύωμα ή γενικότερα ένας φορέας, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι δεν είναι δεσμευμένοι. Για αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας σχηματίζεται κατευθείαν το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, το οποίο χρησιμοποιείται, μαζί με τα αντίστοιχα επικόμβια φορτία $\underline{R}_{f}$, για να υπολογιστούν οι άγνωστες μετακινήσεις $\underline{U}_{f}$.

Για να σχηματιστεί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, αφού καθοριστούν και αριθμηθούν όλοι οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας, παραλείποντας δηλαδή όλους τους βαθμούς ελευθερίας των οποίων οι μετακινήσεις είναι δεδομένες, επιβάλλεται διαδοχικά μοναδιαία μετακίνηση στον κάθε ένα από αυτούς τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, διατηρώντας τους υπόλοιπους με μηδενικές μετακινήσεις. Έτσι, υπολογίζεται η αντίστοιχη στήλη του μητρώου δυσκαμψίας, τα στοιχεία της οποία ισούνται εξ’ ορισμού με τις επικόμβιες δυνάμεις οι οποίες πρέπει να επιβληθούν για να προκύψει η συγκεκριμένη μοναδιαία μετακίνηση.

Αφού προσδιορισθεί το μητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, επιβάλλοντας τα επικόμβια φορτία $\underline{R}_{f}$ και αφού υπολογιστούν οι μετακινήσεις $\underline{U}_{f}$, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη των μελών αξιοποιώντας τα εντατικά μεγέθη τα οποία προέκυψαν για μοναδιαίες μετακινήσεις κατά τη διαδικασία εύρεσης του μητρώου δυσκαμψίας.

Παράδειγμα-7: γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

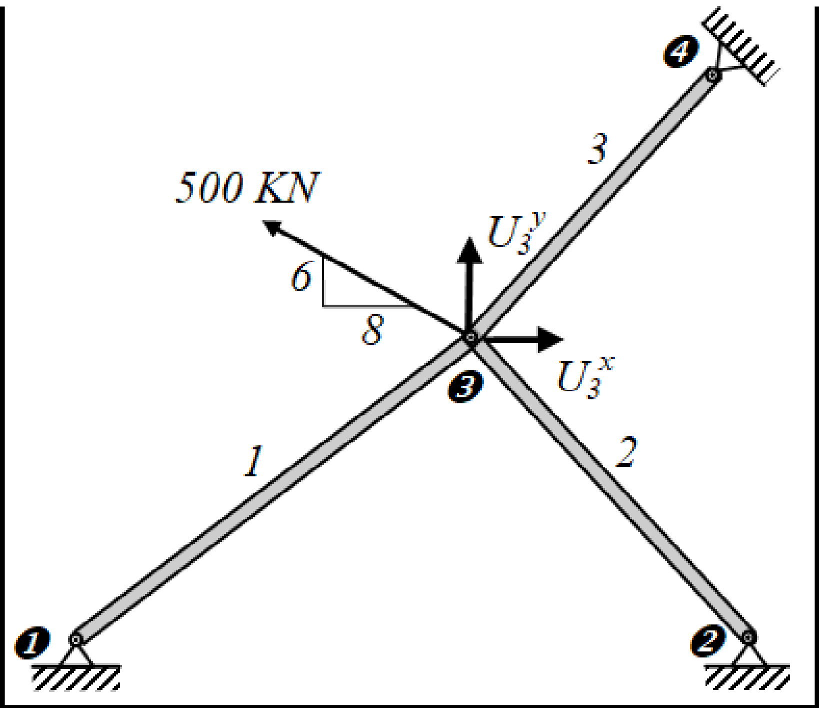
Οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 9.12.α) για το κεκλιμένο φορτίο των $500\,\mathrm{KN}$, το οποίο επιλύθηκε με τη Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας στο Παράδειγμα-9.4, μπορούν να προσδιορισθούν με τη Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται και για τις τρεις ράβδους με $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{GPA}$ και το εμβαδόν διατομής των τριών ράβδων ισούται αντίστοιχα με $\mathrm{A}_1 = 0.002\,\mathrm{m}^2$, $\mathrm{A}_2 = 0.001\,\mathrm{m}^2$ και $\mathrm{A}_3 = 0.0015\,\mathrm{m}^2$.

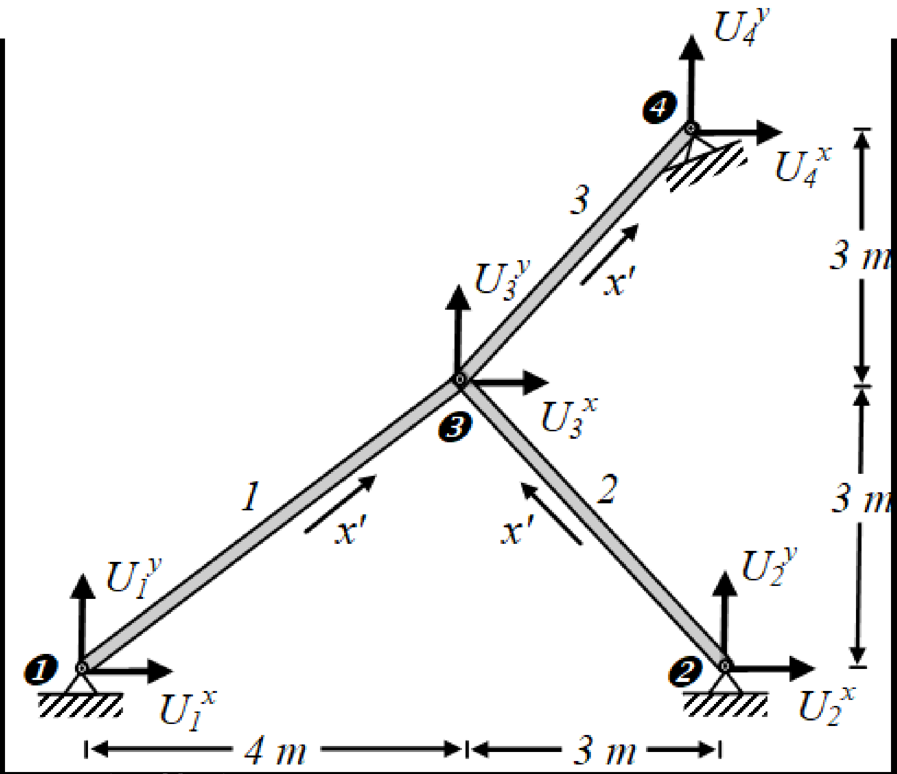


Σχήμα 9.12: Επίλυση δικτυώματος με τη γραφική μέθοδο δυσκαμψίας: (α) δικτύωμα με όλους τους βαθμούς ελευθερίας (β) αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας, $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{f}}$.

Με τη Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας, αντί της χρήσης του συνολικού αριθμού των βαθμών ελευθερίας (Σχήμα 9.12.α), ο οποίος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 8, μπορεί να κατασκευασθεί το υπομητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, το οποίο αντιστοιχεί στους αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή στους βαθμούς ελευθερίας $\underline{U}_{f}$ για τους οποίους δεν είναι δεδομένες οι μετακινήσεις (Σχήμα 9.12.β).

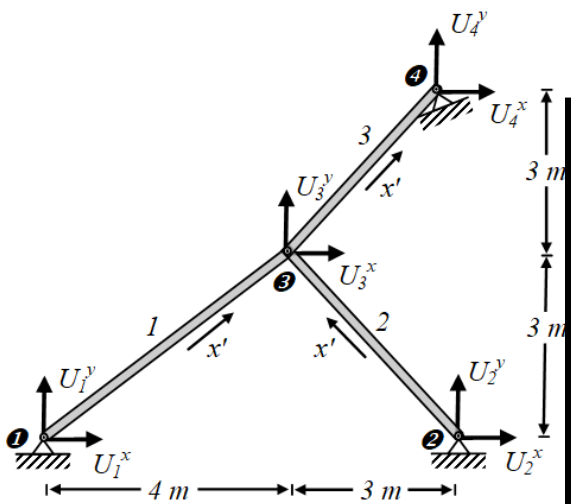
$$\underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} R_3^x \\ R_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ff} & K_{12}^{ff} \\ K_{21}^{ff} & K_{22}^{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3^x \\ U_3^y \end{bmatrix}$$



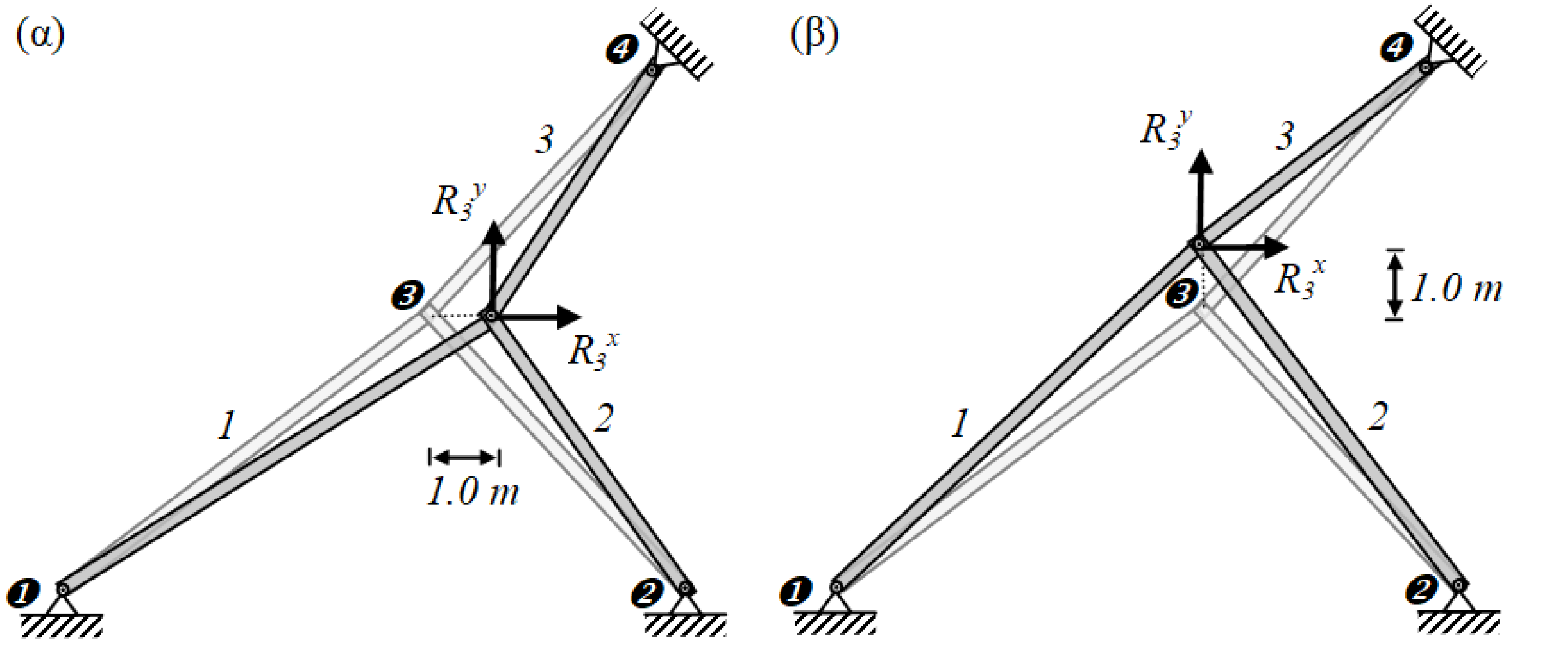


Για τον υπολογισμό των στοιχείων της 1ης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, μπορούμε να επιβάλουμε μοναδιαία μετακίνηση U_3^x, διατηρώντας τη μετακίνηση U_3^y μηδενική. Ακολούθως, χρησιμοποιώντας την παραμορφωμένη μορφή του δικτυώματος να προσδιορίσουμε τις επικόμβιες δυνάμεις R_3^x και R_3^y που πρέπει να επιβληθούν στο δικτύωμα ώστε να ισορροπεί κάτω από τη συγκεκριμένη μορφή παραμόρφωσης. Οι δυνάμεις αυτές θα ισούνται, προφανώς, με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$.

Αντίστοιχα, τα στοιχεία της 2ης στήλης του μητρώου δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, ισούνται με τις επικόμβιες δυνάμεις που πρέπει να επιβληθούν στο δικτύωμα ώστε να προκύψει μοναδιαία μετακίνηση U_3^y και μηδενική μετακίνηση U_3^x. Οι μετακινήσεις συνήθως θεωρούνται μικρές που σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αρχική γεωμετρία του φορέα και οι μεταβολές των γωνιών κατά την επιβολή των μοναδιαίων μετακινήσεων να θεωρηθούν αμελητέες.



Επιβάλλοντας μοναδιαία μετακίνηση U_3^x και μηδενική μετακίνηση U_3^y (Σχήμα 9.13.α) μπορούμε από τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη στα μέλη, δηλαδή τις αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους λόγω των αντίστοιχων επιμηκύνσεων και βραχύνσεων.



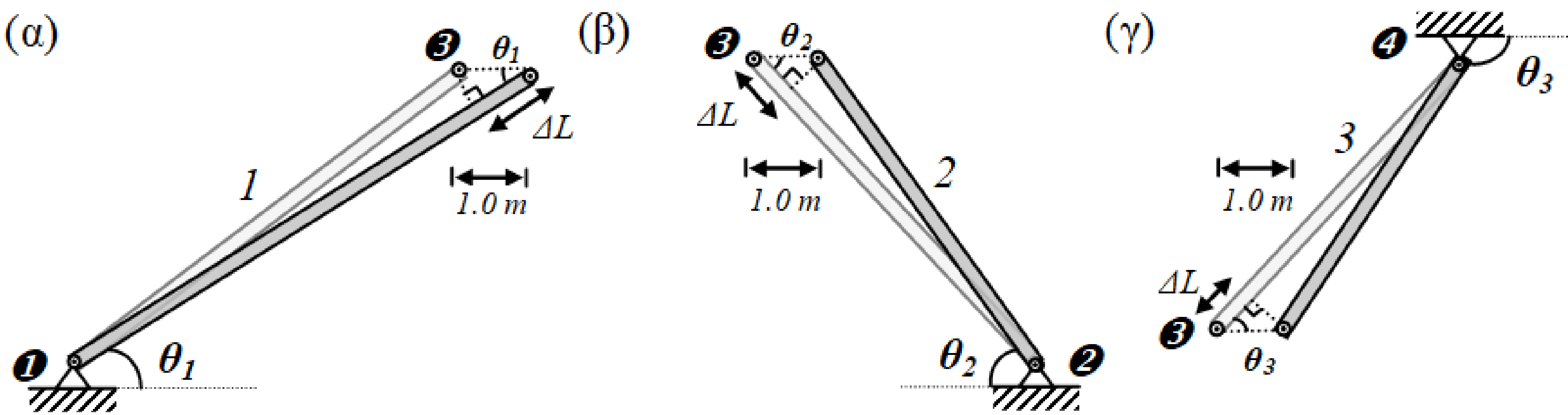
Σχήμα 9.13: Παραμορφωμένος φορέας: (α) επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης U_3^x *και μηδενικής μετακίνησης* U_3^y *(β) επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης* U_3^y *και μηδενικής μετακίνησης* U_3^x.

Συγκεκριμένα, η ράβδος 1 επιμηκύνεται κατά $\cos\theta_1 = \dfrac{\Delta L}{1.0\,\mathrm{m}} = 0.8$ (Σχήμα 9.14.α),

ενώ οι ράβδοι 2 και 3 βραχύνονται κατά $\cos\theta_2 = \cos\theta_3 = \dfrac{\Delta L}{1.0\,\mathrm{m}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Σχήμα 9.14.β-γ).

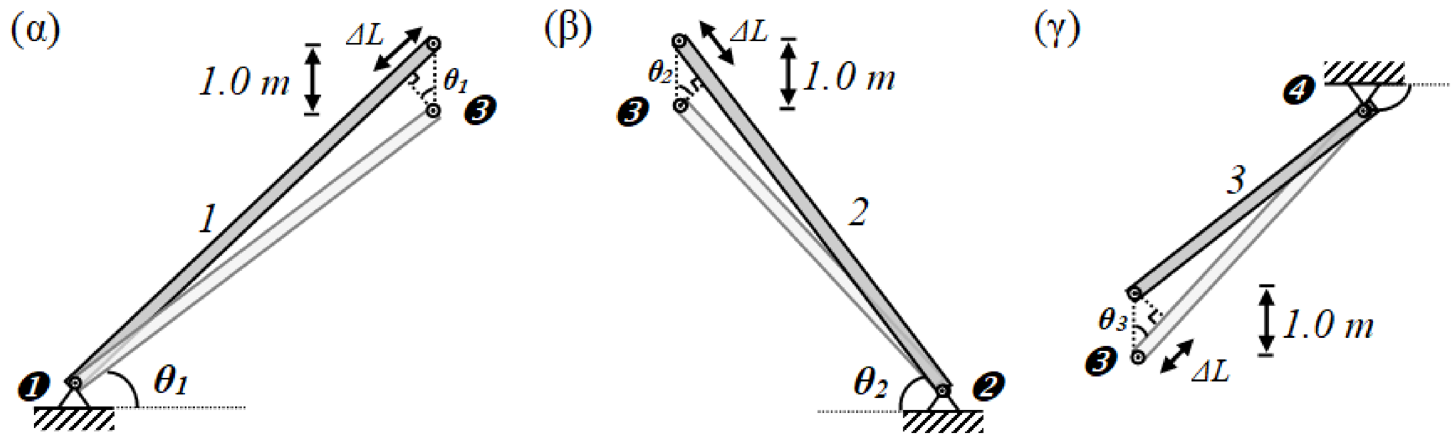
Με δεδομένες τις επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων μπορούν να υπολογισθούν οι αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις:

$$N_m = \Delta L_m \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m}$$



Σχήμα 9.14: Παραμορφωμένες ράβδοι κατά την επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης U_3^x *και μηδενικής μετακίνησης* U_3^y *: (α) ράβδος 1 (β) ράβδος 2 (γ) ράβδος 3.*

Παρομοίως, επιβάλλοντας μοναδιαία μετακίνηση U_3^y και μηδενική μετακίνηση U_3^x (Σχήμα 9.15.β) μπορούμε από τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη στα μέλη, δηλαδή τις αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους λόγω των αντίστοιχων επιμηκύνσεων και βραχύνσεων.



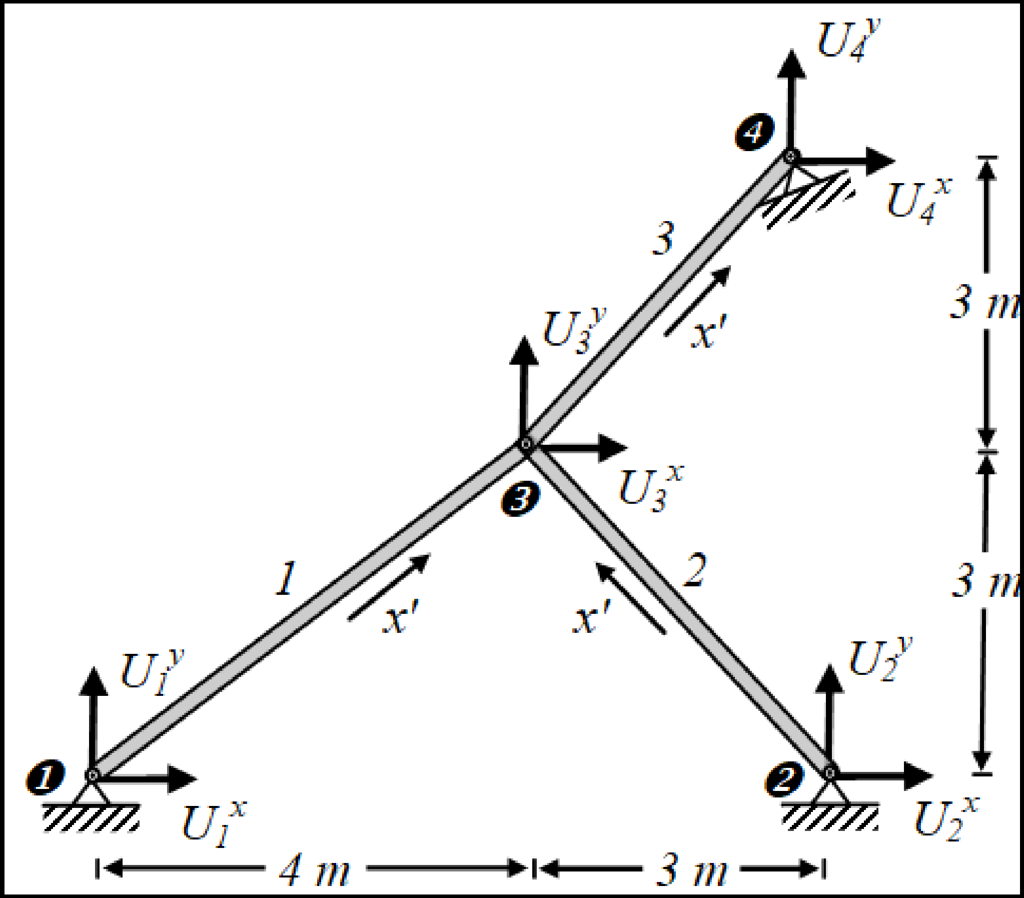
Συγκεκριμένα, η ράβδος 1 επιμηκύνεται κατά $\sin\theta_1 = \dfrac{\Delta L}{1.0\,\mathrm{m}} = 0.6$ (Σχήμα 9.15.α), η ράβδος 2 επιμηκύνεται κατά $\sin\theta_2 = \dfrac{\Delta L}{1.0\,\mathrm{m}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Σχήμα 9.15.β) και η ράβδος 3 βραχύνεται κατά $\sin\theta_3 = \dfrac{\Delta L}{1.0\,\mathrm{m}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Σχήμα 9.14.γ). Με δεδομένες τις επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων μπορούν να υπολογισθούν οι αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις:

$$N_m = \Delta L_m \cdot \frac{A_m \cdot E_m}{L_m}$$

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της κάθε ράβδου και για την κάθε μια περίπτωση παραμόρφωσης τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων και τις αντίστοιχες αξονικές τους δυνάμεις.

Ράβδος	$\frac{A_m \cdot E_m}{L_m}\ \left[Nm^{-1}\right]$	$U_3^x = 1.0\,m,\ U_3^y = 0$		$U_3^x = 0,\ U_3^y = 1.0\,m$	
		$\Delta L_m\,[m]$	$N_m\,[N]$	$\Delta L_m\,[m]$	$N_m\,[N]$
1	$8 \cdot 10^7$	0.8	$6.4 \cdot 10^7$	0.6	$4.8 \cdot 10^7$
2	$4.714 \cdot 10^7$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-3.333 \cdot 10^7$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$3.333 \cdot 10^7$
3	$7.071 \cdot 10^7$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-5 \cdot 10^7$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-5 \cdot 10^7$

Ακολούθως, επιβάλλοντας τις αξονικές δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα των ράβδων για να τις παραμορφώσουν, με αντίθετη φορά (δράση-αντίδραση) πάνω στον ελεύθερο κόμβο 3 και παίρνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να υπολογισθούν οι απαραίτητες για την ισορροπία επικόμβιες δυνάμεις R_3^x και R_3^y για τις δύο περιπτώσεις.



Έτσι, οι απαραίτητες, για να ισορροπεί ο κόμβος με τη δράση των δυνάμεων από τις ράβδους, επικόμβιες δυνάμεις μπορούν να υπολογισθούν:

$$U_3^x = 1.0\,\mathrm{m},\ U_3^y = 0:$$

$$\Rightarrow \quad R_3^x = 6.4\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot 0.8 + 3.33\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 11.01\cdot 10^7\,\mathrm{N}$$

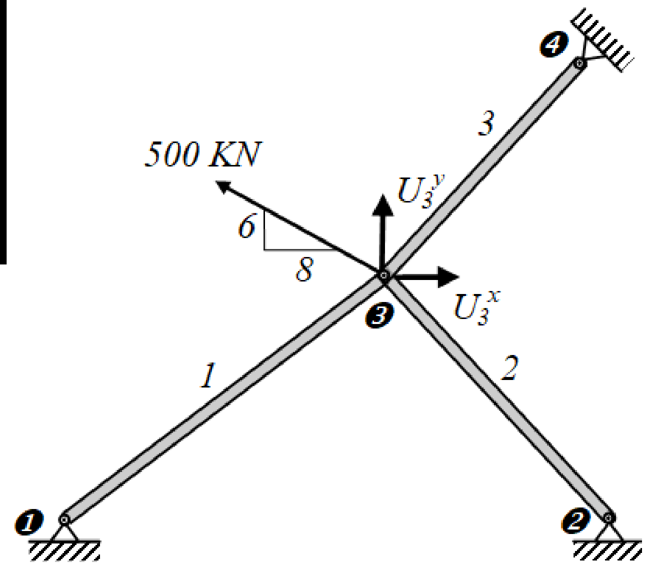
$$\Rightarrow \quad R_3^y = 6.4\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot 0.6 - 3.33\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5.02\cdot 10^7\,\mathrm{N}$$

$$U_3^x = 0,\ U_3^y = 1.0\,\mathrm{m}:$$

$$\Rightarrow \quad R_3^x = 4.8\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot 0.8 - 3.333\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5.02\cdot 10^7\,\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \quad R_3^y = 4.8\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot 0.6 + 3.33\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot 10^7\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 8.77\cdot 10^7\,\mathrm{N}$$

Συνεπώς, το μητρώο δυσκαμψίας, $\underline{\mathrm{K}}_{\mathrm{ff}}$, ισούται με:



$$\underline{\mathrm{K}}_{\mathrm{ff}} = \begin{bmatrix} 11.01 & 5.02 \\ 5.02 & 8.77 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Έτσι, οι μετακινήσεις του κόμβου 3 λόγω του εξωτερικού φορτίου ισούνται με:

$$\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{f}} = \underline{\mathrm{K}}_{\mathrm{ff}}{}^{-1} \cdot \underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} 12.29 & -7.03 \\ -7.03 & 15.43 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -400,000 \\ 300,000 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{m} = \begin{bmatrix} -7.0\,\mathrm{mm} \\ 7.4\,\mathrm{mm} \end{bmatrix}$$

Τέλος, οι αξονικές δυνάμεις μπορούν πολύ εύκολα να υπολογιστούν, βάσει της αρχής της επαλληλίας, από τις μετακινήσεις και τις αξονικές δυνάμεις που έχουν ήδη υπολογιστεί θεωρώντας μοναδιαίες τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

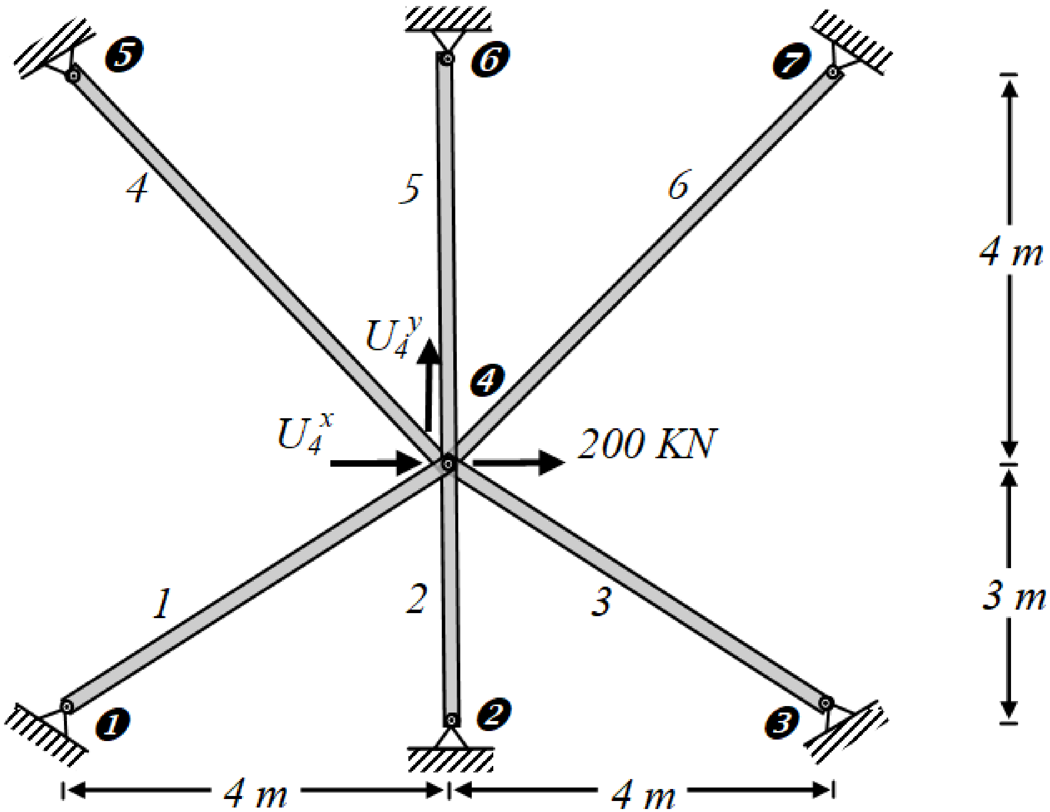
$$\mathrm{N}_1 = 6.4 \cdot 10^7 \cdot (-0.007) + 4.8 \cdot 10^7 \cdot 0.0074 = -92.8\,\mathrm{KN}$$

$$\mathrm{N}_2 = -3.333 \cdot 10^7 \cdot (-0.007) + 3.333 \cdot 10^7 \cdot 0.0074 = 479.95\,\mathrm{KN}$$

$$\mathrm{N}_3 = -5 \cdot 10^7 \cdot (-0.007) - 5 \cdot 10^7 \cdot 0.0074 = -20\,\mathrm{KN}$$

Παράδειγμα-8: γραφική επίλυση με τη μέθοδο δυσκαμψίας

Οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 9.16) για το φορτίο των 200 KN καθώς και τα εντατικά μεγέθη, μπορούν να προσδιορισθούν με τη Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται και για τις τρεις ράβδους με $E = 200$ GPA και το εμβαδόν διατομής των τριών ράβδων ισούται με $A = 0.001\text{m}^2$.



Σχήμα 9.16: Δικτύωμα με τους αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας και την εξωτερική φόρτιση.

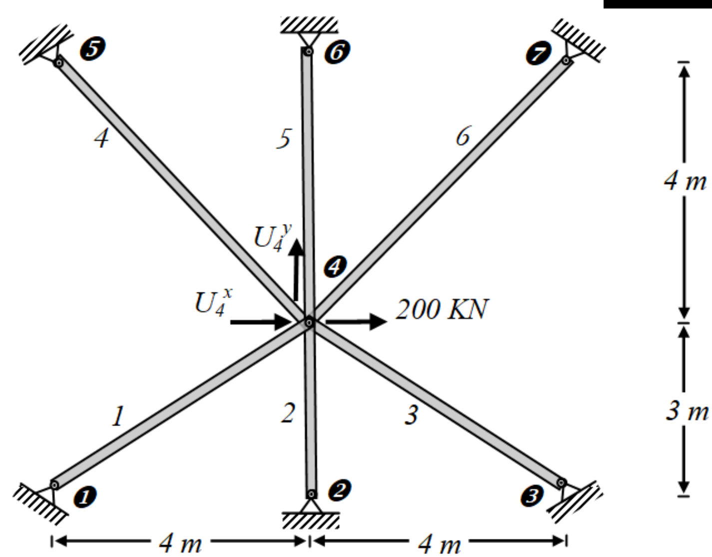
Με τη *Γραφική Μέθοδο Δυσκαμψίας* μπορεί να σχηματιστεί το υπομητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{ff}$, το οποίο αντιστοιχεί στους αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή στους βαθμούς ελευθερίας $\underline{U}_f$ για τους οποίους δεν είναι δεδομένες οι μετακινήσεις.

$$\underline{R}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{U}_f \;\Rightarrow \begin{bmatrix} R_4^x \\ R_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ff} & K_{12}^{ff} \\ K_{21}^{ff} & K_{22}^{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix}$$

Αφού η φόρτιση είναι συμμετρική, σε συμμετρική κατασκευή:

$$K_{21}^{ff} = K_{12}^{ff} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{K_{11}^{ff}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{K_{22}^{ff}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

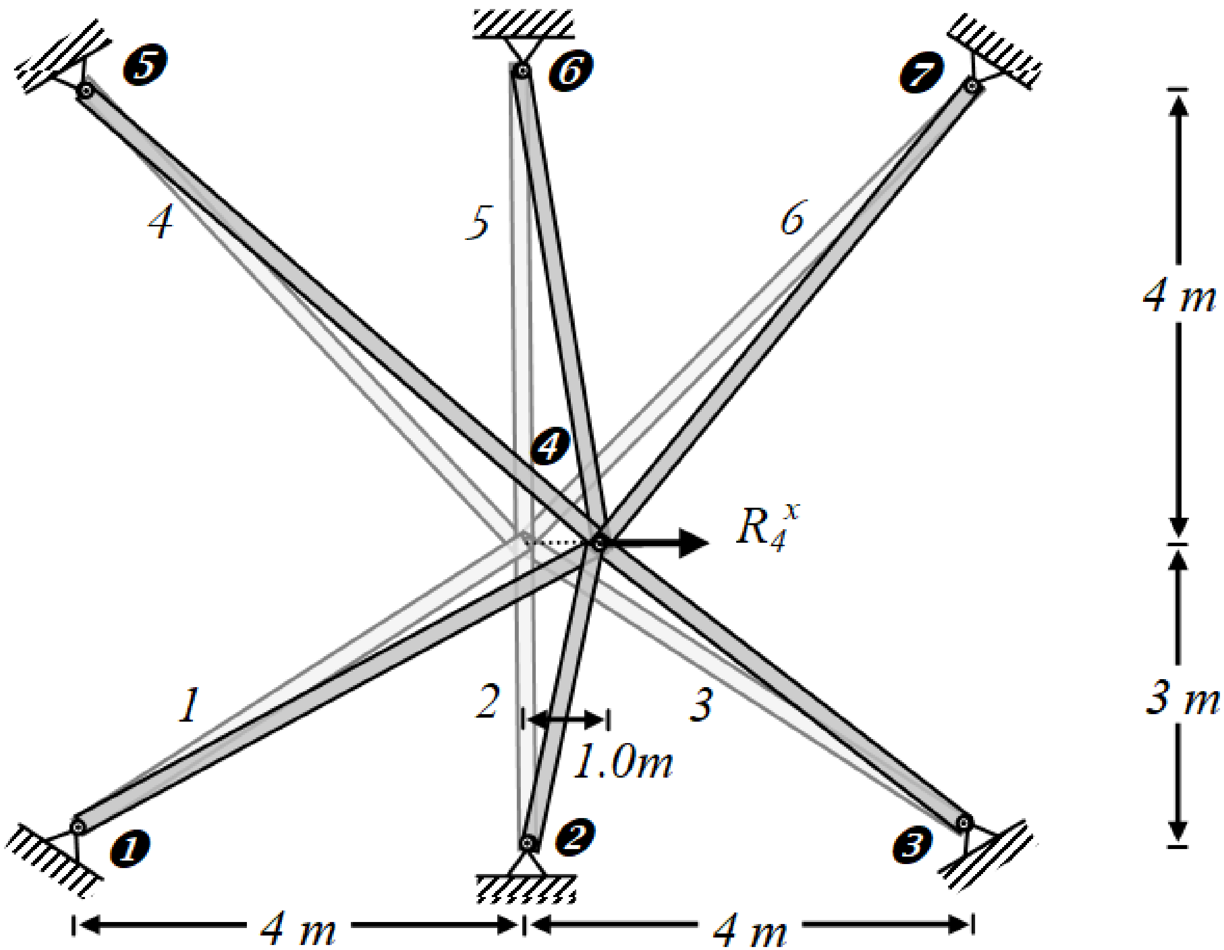


$$\begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{K_{11}^{ff}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{K_{22}^{ff}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

Άρα, το μόνο στοιχείο που χρειαζόμαστε είναι το K_{11}^{ff}. Για τον υπολογισμό του, μπορούμε να επιβάλλουμε μοναδιαία μετακίνηση U_4^x, διατηρώντας τη μετακίνηση U_4^y μηδενική. Ακολούθως, χρησιμοποιώντας την παραμορφωμένη μορφή του δικτυώματος θα προσδιορίσουμε την επικόμβια δύναμη R_4^x που πρέπει να επιβληθεί στο δικτύωμα ώστε να ισορροπεί κάτω από τη συγκεκριμένη μορφή παραμόρφωσης.

Επιβάλλοντας μοναδιαία μετακίνηση U_4^x και μηδενική μετακίνηση U_4^y (Σχήμα 9.17) μπορούμε από τη γεωμετρία του παραμορφωμένου φορέα να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη στα μέλη, δηλαδή τις αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στις ράβδους λόγω των αντίστοιχων επιμηκύνσεων και βραχύνσεων.

Οι μετακινήσεις συνήθως θεωρούνται μικρές, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αρχική γεωμετρία του φορέα και οι μεταβολές των γωνιών κατά την επιβολή των μοναδιαίων μετακινήσεων να θεωρηθούν αμελητέες.



Σχήμα 9.17: Παραμορφωμένος φορέας: επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης U_4^x *και μηδενικής μετακίνησης* U_4^y.

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της κάθε ράβδου για την πιο πάνω περίπτωση παραμόρφωσης, τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις και βραχύνσεις των ράβδων και τις αντίστοιχες αξονικές τους δυνάμεις.

Ράβδος	$\frac{A_m \cdot E_m}{L_m} \left[Nm^{-1}\right]$	$U_4^x = 1.0m, U_4^y = 0$	
		$\Delta L_m [m]$	$N_m [N]$
1	$4 \cdot 10^7$	0.8	$3.2 \cdot 10^7$
2	$6.667 \cdot 10^7$	0	0
3	$4 \cdot 10^7$	-0.8	$-3.2 \cdot 10^7$
4	$3.536 \cdot 10^7$	$\sqrt{2}/2$	$2.5 \cdot 10^7$
5	$5 \cdot 10^7$	0	0
6	$3.536 \cdot 10^7$	$-\sqrt{2}/2$	$-2.5 \cdot 10^7$

Ακολούθως, επιβάλλοντας τις αξονικές δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα των ράβδων για να τις παραμορφώσουν, με αντίθετη φορά (δράση-αντίδραση) πάνω στον ελεύθερο κόμβο 4 και παίρνοντας ισορροπία $\Sigma F_x = 0$ στον κόμβο αυτό, υπολογίζεται η R_4^x.

Έτσι, οι απαραίτητες, για να ισορροπεί ο κόμβος με τη δράση των δυνάμεων από τις ράβδους, επικόμβιες δυνάμεις μπορούν να υπολογισθούν:

$U_4^x = 1.0\,m,\ U_4^y = 0:$

$$\Rightarrow \quad R_4^x = 3.2\cdot 10^7\,N\cdot 0.8 + 3.2\cdot 10^7\,N\cdot 0.8 + 2.5\cdot 10^7\,N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2.5\cdot 10^7\,N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad R_4^x = 8.656\cdot 10^7\,N$$

Συνεπώς, οι μετακινήσεις του κόμβου 4 λόγω του εξωτερικού φορτίου ισούνται με:

$$\begin{bmatrix} U_4^x \\ U_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{8.656\cdot 10^7} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{K_{22}^{ff}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} KN = \begin{bmatrix} 2.31 \\ 0 \end{bmatrix} mm$$

Για υπολογισμό των εντατικών μεγεθών θα χρησιμοποιηθεί η αρχή της επαλληλίας, αφού γνωρίζοντας τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν σε μοναδιαία μετακίνηση $(\Delta_x = 1.0\,\mathrm{m})$, μπορούν να υπολογιστούν τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν σε μετακίνηση $\Delta_x = 2.31\,\mathrm{mm}$.

Ράβδος	1	2	3	4	5	6
$\Delta_x = 1.0\ \mathrm{m}, S_i\ [\mathrm{N}]$	$3.2 \cdot 10^7$	0	$-3.2 \cdot 10^7$	$2.5 \cdot 10^7$	0	$-2.5 \cdot 10^7$
$\Delta_x = 2.31\,\mathrm{mm}, S_i\ [\mathrm{KN}]$	73.92	0	-73.92	57.75	0	-57.75