4. Επίλυση Δοκών και Πλαισίων με τις Μεθόδους Ευκαμψίας (ή Δυνάμεων)

Εαρινό εξάμηνο 2023

Πέτρος Κωμοδρόμος

komodromos@ucy.ac.cy

http://www.eng.ucy.ac.cy/petros

Θέματα

- ***Μέθοδος δυνάμεων ή ευκαμψίας***
  - ***<u>Ανάλυση δικτυωμάτων</u>***
    - Ανάλυση ισοστατικών δικτυωμάτων
    - Ανάλυση υπερστατικών δικτυωμάτων
  - ***<u>Ανάλυση δοκών και πλαισίων</u>***
    - Ανάλυση ισοστατικών δοκών και πλαισίων
    - Ανάλυση υπερστατικών δοκών και πλαισίων
  - Χρήση συμπυκνωμένων μητρώων
  - Ανάλυση μικτών κατασκευών με τη μέθοδο ευκαμψίας

Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

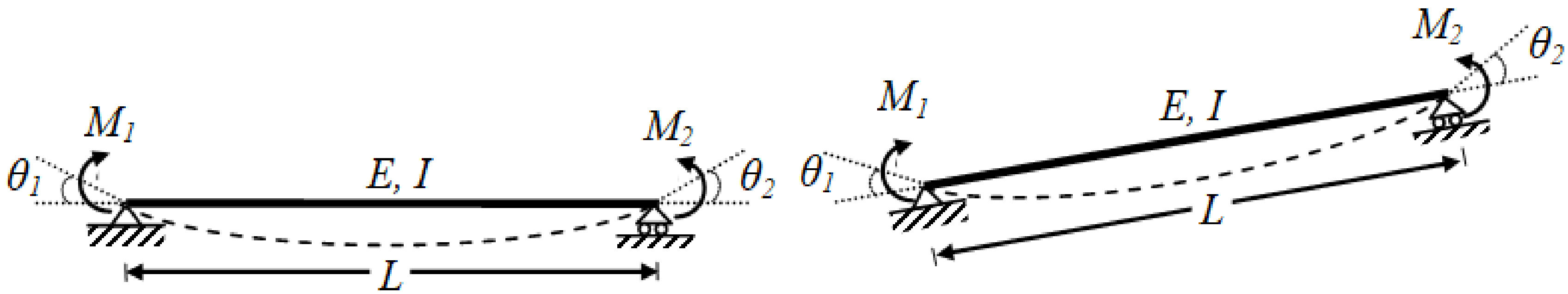
- *μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας*
    - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι δυνάμεις και ροπές
- *μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας*
    - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι μετακινήσεις

Γενικευμένη μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας

- βασίζεται στα μητρώα ευκαμψίας των επιμέρους μελών μιας κατασκευής τα οποία συνδυάζονται, χρησιμοποιώντας κατάλληλα μητρώα μετασχηματισμών, ώστε να σχηματιστεί το μητρώο ευκαμψίας ***F*** της κατασκευής
- χρήσιμη για επιλύσεις απλών προβλημάτων με το χέρι
- δύσκολη αυτοματοποίηση και προγραμματισμός της μεθόδου
  - ο τρόπος και η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα με τη μέθοδο ευκαμψίας διαφέρει ανάλογα με το αν ο φορέας είναι ισοστατικός ή υπερστατικός
  - μπορούν να γίνουν διαφορετικές επιλογές στον καθορισμό των υπερστατικών μεγεθών

Προσδιορισμός μητρώου ευκαμψίας δοκού

Μια δοκός στο επίπεδο, έχει 6 βαθμούς ελευθερίας αφού στηρίζεται σε δύο κόμβους οι οποίοι έχουν 3 βαθμούς ελευθερίας ο καθένας (Σχήμα 8.13). Θεωρώντας αμελητέες τις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις, οι οποίες είναι πολύ μικρότερες από τις καμπτικές παραμορφώσεις, μπορούμε να προσδιορίσουμε το μητρώο ευκαμψίας μιας επίπεδης ισοστατικής δοκού (η οποία δεν δέχεται φορτία κατά μήκος της αλλά μόνο στα άκρα), βάσει των σχετικών στροφών θ_1 και θ_2 των κόμβων στα άκρα της δοκού.



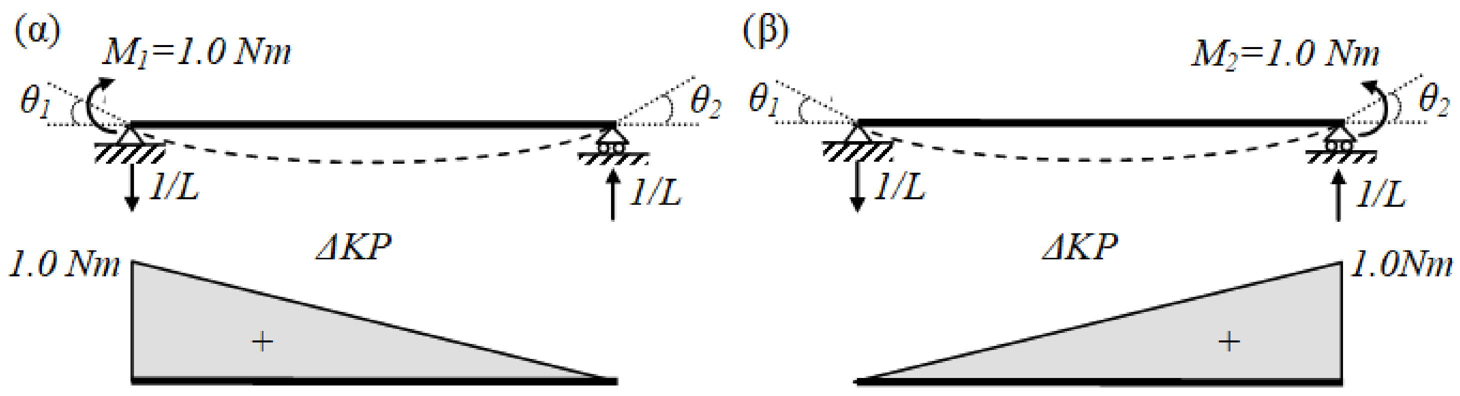
Σχήμα 8.13: Σχετικές στροφές κόμβων επίπεδης δοκού λόγω επιβολής επικόμβιων ροπών.

Για να προσδιοριστεί το μητρώο ευκαμψίας μιας ισοστατικής δοκού στο επίπεδο μπορούμε να επιβάλουμε εναλλάξ μοναδιαία τη μια ροπή διατηρώντας την άλλη ροπή μηδενική και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες σχετικές στροφές για κάθε περίπτωση. Αυτό το μητρώο ευκαμψίας συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 με τις αντίστοιχες ροπές M_1 και M_2 των κόμβων μιας δοκού, χρησιμοποιώντας ως θετική φορά αυτή των πιο πάνω σχημάτων (Σχήμα 8.13).

$$\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$

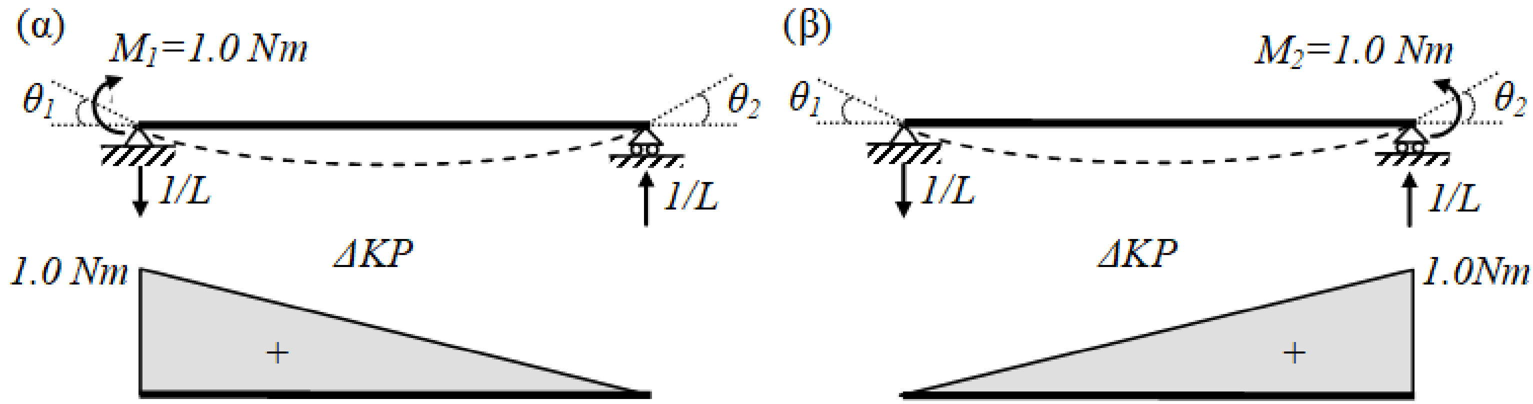
$$\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$

Συγκεκριμένα, τα στοιχεία της πρώτης στήλης του μητρώου ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}_i$ μιας ισοστατικής αμφιέρειστης δοκού i ισούνται με τις αντίστοιχες σχετικές στροφές θ_1 και θ_2 των κόμβων της δοκού, οι οποίες προκύπτουν όταν επιβληθούν ροπές $M_1 = 1.0\,\text{Nm}$ και $M_2 = 0$ (Σχήμα 8.14.α), χρησιμοποιώντας την ΑΔΕ όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 8.14: Σχετικές στροφές κόμβων επίπεδης δοκού λόγω επιβολής επικόμβιων ροπών: (α) $M_1 = 1.0\,\text{Nm}$, $M_2 = 0$ *(β)* $M_1 = 0$, $M_2 = 1.0\,\text{Nm}$.

$$M_1 = 1.0\,\text{Nm}\,,\ M_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 = \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} \ \text{και}\ \theta_2 = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I}$$



Σχήμα 8.14: Σχετικές στροφές κόμβων επίπεδης δοκού λόγω επιβολής επικόμβιων ροπών: (α) $M_1 = 1.0\,\mathrm{Nm}$, $M_2 = 0$ *(β)* $M_1 = 0$, $M_2 = 1.0\,\mathrm{Nm}$.

Παρομοίως, τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του μητρώου ευκαμψίας ισούνται με τις αντίστοιχες σχετικές στροφές θ_1 και θ_2 των κόμβων της δοκού όταν επιβληθούν ροπές $M_1 = 0$ και $M_2 = 1.0\,\mathrm{Nm}$ (Σχήμα 8.14.β).

$$M_1 = 0\,,\; M_2 = 1.0\,\mathrm{Nm} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 = \frac{L}{6\cdot E\cdot I} \;\text{ και }\; \theta_2 = \frac{L}{3\cdot E\cdot I}$$

Έτσι, το μητρώο ευκαμψίας ισούται με:

$$\underline{f}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{3\cdot E\cdot I} & \dfrac{L}{6\cdot E\cdot I} \\ \dfrac{L}{6\cdot E\cdot I} & \dfrac{L}{3\cdot E\cdot I} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L_i}{6\cdot E_i\cdot I_i}$$

Σχηματισμός μητρώου F^*

Παρομοίως με τη Μέθοδο Ευκαμψίας για δικτυώματα, η οποία έχει περιγράφει στις προηγούμενες παραγράφους, αφού υπολογίσουμε τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}_i$ των μελών του φορέα, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο σχηματίζεται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & & & & \\ & \underline{\mathcal{F}}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \underline{\mathcal{F}}_N \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου:}\quad \underline{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L_i}{6 \cdot E_i \cdot I_i}, \quad \underline{u}_i = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i, \quad \underline{s}_i = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 της κάθε δοκού με τις αντίστοιχες ροπές M_1 και M_2 στους κόμβους των επιμέρους δοκών.

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

Πέρα από το γεγονός ότι τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας δοκών είναι διαφορετικά από αυτά των δικτυωμάτων και το ότι τα εντατικά μεγέθη είναι ροπές, αντί αξονικών δυνάμεων, η διαδικασία επίλυσης πλαισίων με τη Μέθοδο Ευκαμψίας είναι αντίστοιχη της διαδικασίας που ακολουθείται για επίλυση δικτυωμάτων. Έτσι, όπως έχουμε δει στη διαδικασία επίλυσης δικτυωμάτων, η επίλυση με τη Μέθοδο Ευκαμψίας διαφέρει για ισοστατικά και υπερστατικά πλαίσια, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Τα πρώτα βήματα της διαδικασίας επίλυσης ενός πλαισίου είναι κοινά τόσο για ισοστατικά όσο και για υπερστατικά πλαίσια, όπως ήταν κατά την επίλυση δικτυωμάτων.

Αρχικά γίνεται αρίθμηση όλων των μελών και καθορίζονται τα εντατικά μεγέθη στα άκρα τους $\underline{s}_i$, τα οποία στη περίπτωση δοκών είναι οι ροπές M_1 και M_2. Ακολούθως, καθορίζεται για κάθε μέλος η σχέση μετακινήσεων-δυνάμεων, $\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$, όπου χρησιμοποιείται ένα μητρώο ευκαμψίας δοκού όπως παρουσιάστηκε πιο πάνω, ανάλογα με την προσήμανση και περίπτωση.

Ακολούθως, τοποθετούνται στο μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας των μελών, για να σχηματιστεί το συνολικό μητρώο ευκαμψίας της κατασκευής.

Ισοστατικά πλαίσια

Στην περίπτωση ισοστατικών πλαισίων πρέπει, στη συνέχεια, να σχηματιστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$ το οποίο συνδέει τις εξωτερικά επιβαλλόμενες επικόμβιες δυνάμεις και ροπές $\underline{R}$ με τις ροπές στους κόμβους των επιμέρους δοκών ή γενικότερα τα εντατικά μεγέθη, $\underline{s}$ στα άκρα των μελών.

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$$

Για να υπολογίσουμε το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, πρέπει αφού προσδιορίσουμε όλες τις δυνατές επικόμβιες ροπές $\underline{R}$, να ασκήσουμε μοναδιαίες δυνάμεις και ροπές που να αντιστοιχούν στα εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία $\underline{R}$, ένα κάθε φορά διατηρώντας τις υπόλοιπες δυνάμεις και ροπές μηδενικές. Συγκεκριμένα, για να υπολογίσουμε τη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$ πρέπει να ασκήσουμε διαδοχικά μοναδιαία δύναμη ή ροπή $R_i = 1.0$, ενώ όλα τα άλλα επικόμβια φορτία πρέπει να μηδενιστούν $R_j = 0 \quad \forall\, j \neq i$, ώστε η στήλη i να προκύψει από τις αντίστοιχες ροπές των μελών.

Προφανώς ένα πλαίσιο μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας είτε το κανονικό μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$ είτε το συμπυκνωμένο για τη συγκεκριμένη φόρτιση, ανάλογα με τα δεδομένα (π.χ. για πόσες περιπτώσεις φορτίσεων πρέπει να επιλυθεί η κατασκευή) και τα ζητούμενα (π.χ. αν τυχόν ζητούνται οι μετακινήσεις όλων των κόμβων) του προβλήματος.

Αφού προσδιοριστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, μπορεί να υπολογιστεί το, κανονικό ή συμπυκνωμένο, μητρώο ευκαμψίας (ή ελαστικότητας), της κατασκευής:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}$$

Στη συνέχεια με δεδομένα τα εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία $\underline{R}$, μπορούν να υπολογιστούν:

- τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$
- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής, $\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R}$
- οι σχετικές μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s}$

Διαδικασία επίλυσης ισοστατικού πλαισίου

- Αρίθμηση όλων των μελών και καθορισμός των εντατικών τους μεγεθών **$\underline{s}$**
- Καθορισμός για όλα τα μέλη των σχέσεων μετακινήσεων-δυνάμεων $\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$
- Σχηματισμός του γενικού μητρώου **$\underline{F}$*** με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας **$\underline{F}_i$**, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$
- Προσδιορισμός του μητρώου μετασχηματισμού **$\underline{b}$** $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$
- Υπολογισμός του απόλυτου μητρώου ευκαμψίας ή ελαστικότητας $\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}$
- Με δεδομένα τα επικόμβια εξωτερικά φορτία **$\underline{R}$** μπορούν να υπολογιστούν:

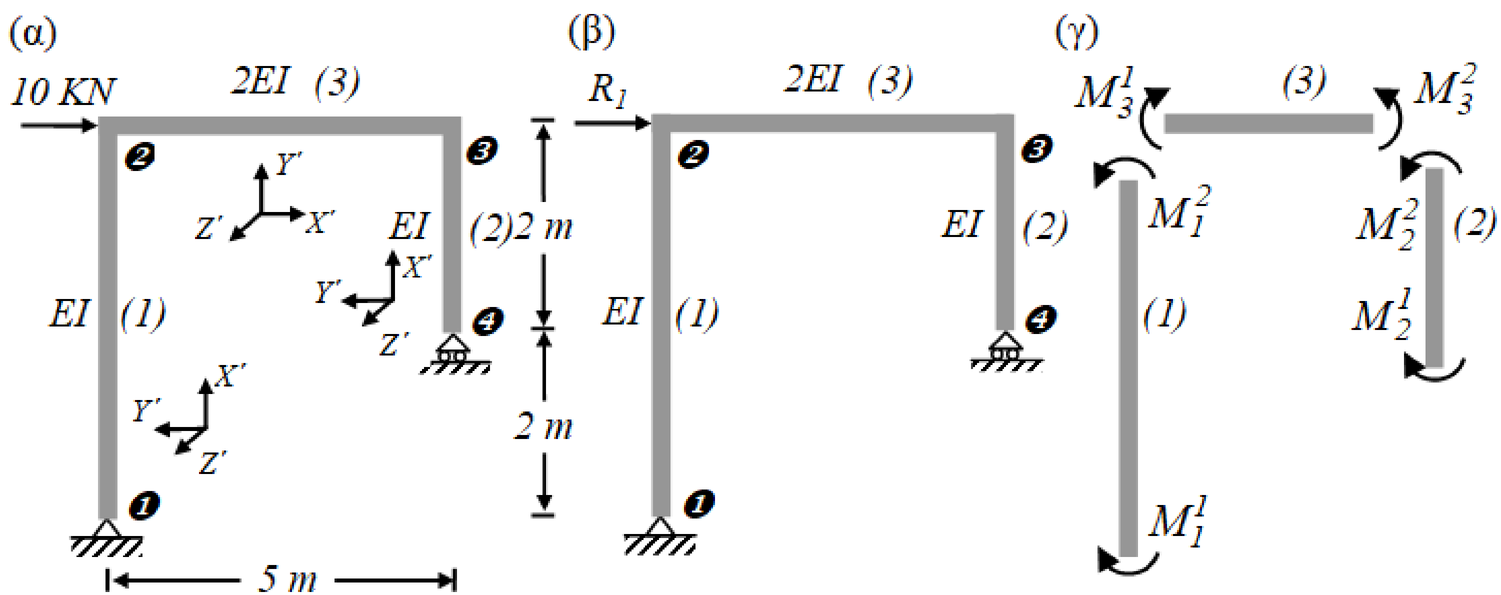
  - τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα **$\underline{s}$**, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$

  - οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής **$\underline{U}$**, $\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R}$

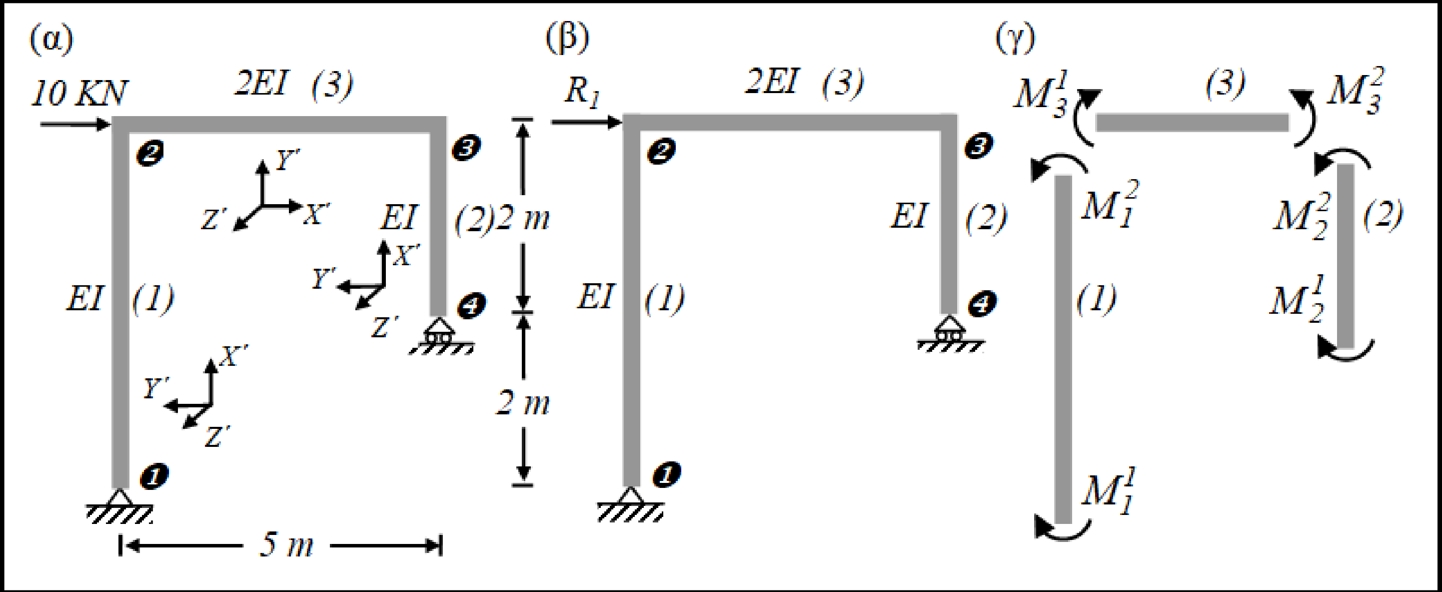
  - οι μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα **$\underline{u}$**, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$ $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \cdot \underline{R}$

Παράδειγμα-1: επίλυση ισοστατικού πλαισίου

Το πιο κάτω ισοστατικό πλαίσιο, φορτίζεται με οριζόντιο φορτίο $10 \mathrm{KN}$, το οποίο ασκείται στον κόμβο ❷ (Σχήμα 8.15.α). Τα κατακόρυφα μέλη (υποστυλώματα) έχουν καμπτική δυσκαμψία $\mathrm{E} \cdot \mathrm{I} = 10^8 \, \mathrm{Nm}^2$, ενώ το οριζόντιο μέλος (δοκός) έχει διπλάσια δυσκαμψία $2 \cdot \mathrm{E} \cdot \mathrm{I} = 2 \cdot 10^8 \, \mathrm{Nm}^2$.



Σχήμα 8.15: (α) ισοστατικό πλαίσιο (β) επιβολή μοναδιαίου φορτίου R_1 *(γ) θετική προσήμανση εντατικών μεγεθών.*



Το μητρώο ευκαμψίας του κάθε ενός από τα τρία μέλη ισούται με:

$$\underline{f}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{3\cdot E\cdot I} & \dfrac{L}{6\cdot E\cdot I} \\ \dfrac{L}{6\cdot E\cdot I} & \dfrac{L}{3\cdot E\cdot I} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L_i}{6\cdot E_i\cdot I_i} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$$

$$\text{όπου:}\quad \underline{u}_i = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_i, \quad \underline{s}_i = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, M_1 και M_2, βάσει της σχέσης :

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, M_1 και M_2, βάσει της σχέσης :

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

Φορτίζοντας με μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο R_1 το πλαίσιο (Σχήμα 8.15.β), υπολογίζουμε το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, του οποίου τα στοιχεία ισούνται με τις ροπές στα άκρα του κάθε ενός από τα τρία μέλη του φορέα, σύμφωνα με την προσήμανση στο Σχήμα 8.15.γ:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix}_{R_1 = 1.0\,N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, μπορεί να υπολογιστεί το συνολικό, αλλά συμπυκνωμένο, μητρώο ευκαμψίας του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} = 3.46667 \cdot 10^{-7}\ m/N$$

Με δεδομένα τα επικόμβια φορτία, τα οποία είναι σε αυτή την περίπτωση μόνο η επικόμβια δύναμη $R_1 = 10\,KN$, μπορούν να υπολογιστούν, σύμφωνα με την προσήμανση στο Σχήμα 8.15.γ:

- τα εντατικά μεγέθη των μελών:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left[R_1 \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} KNm$$

- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής (σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε μόνο τη μετακίνηση που αντιστοιχεί στο βαθμό ελευθερίας που χρησιμοποιήθηκε στο σχηματισμό του συμπυκνωμένου μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$) :

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R} = \left[3.46667\right] \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m / N} \cdot \left[10000\right] \mathrm{N} = 0.0034667\,\mathrm{m} = 3.47\,\mathrm{mm}$$

- τις σχετικές μετακινήσεις, δηλαδή τις στροφές των κόμβων των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} 0.2667 \\ 0.5333 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3333 \\ 0.1667 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\ \text{radians}$$

Εντολές Matlab

```
f = zeros(6,6);
L1 = 4;
L2 = 2;
L3 = 5;
EI = 1.0E8;
f1 = [2  1
       1  2 ] * L1/(6*EI);
f2 = [2  1
       1  2 ] * L2/(6*EI);
f3 = [2  1
      1  2 ] * L3 / (6*2*EI);
f(1:2,1:2) = f1;
f(3:4,3:4) = f2;
f(5:6,5:6) = f3;
f
b = [ 0 ; 4 ;  0 ; 0 ; 4; 0 ]
F = b' * f * b
R = [ 10000 ]
U = F * R
s = b * R
u = f * s
```

Υπερστατικά πλαίσια

Διαδικασία επίλυσης υπερστατικών πλαισίων

Η διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού πλαισίου είναι παρόμοια με αυτή που ακολουθείται για ένα υπερστατικό δικτύωμα, όπως έχει παρουσιαστεί σε προηγούμενη παράγραφο. Αυτά που διαφέρουν είναι η χρήση μητρώων ευκαμψίας δοκών, αντί ράβδων δικτυωμάτων και τα μητρώα μετασχηματισμού τα οποία συνδέουν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών $\underline{s}_i$, τα οποία στην περίπτωση των δοκών είναι συνήθως οι ροπές M_1 και M_2 , αντί η αξονική δύναμη στην περίπτωση μιας ράβδου.

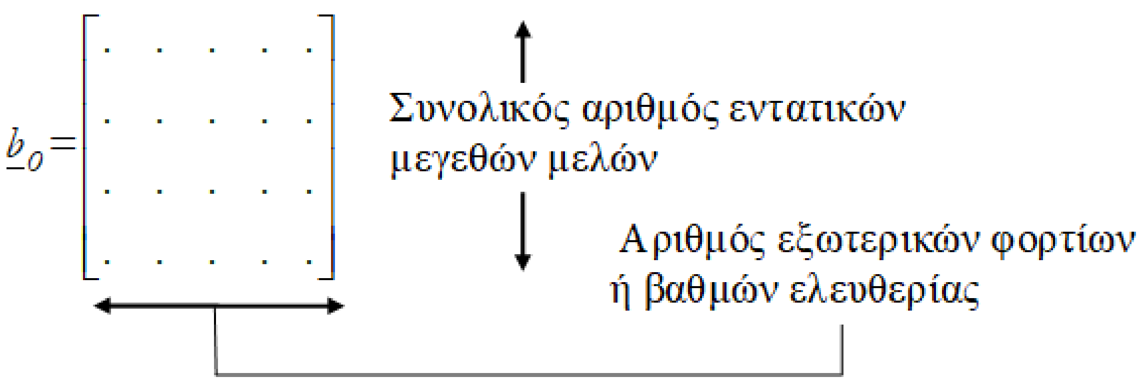
Συγκεκριμένα, αφού αριθμηθούν όλα τα μέλη και καθοριστεί για κάθε δοκό η σχέση μετακινήσεων-δυνάμεων $\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$, τοποθετούνται στο μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας των μελών. Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, M_1 και M_2 για κάθε δοκό.

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

Ακολούθως, καθορίζονται N υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, με προσθήκη των αντίστοιχων N ελευθεριών, έτσι ώστε ο ισοστατικός φορέας που προκύπτει να είναι και σταθερός.

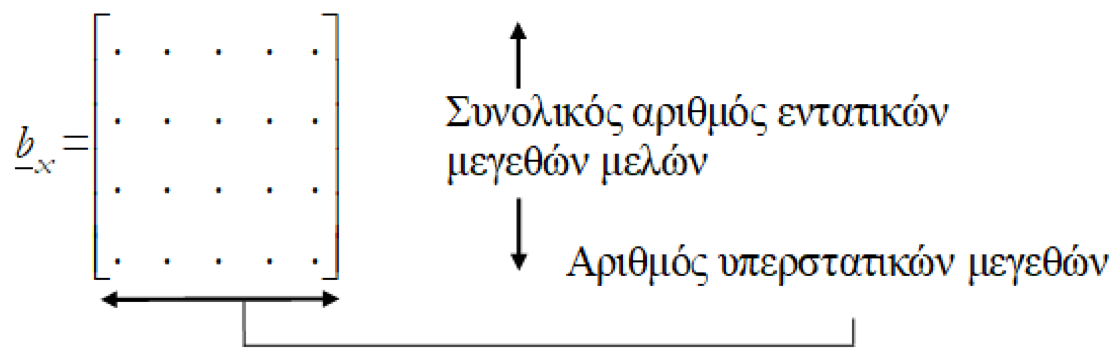
Στη συνέχεια προσδιορίζεται το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο συνδέει τις εξωτερικά επιβαλλόμενες επικόμβιες δυνάμεις και ροπές $\underline{R}$ με τις ροπές ή γενικότερα τα εντατικά μεγέθη $\underline{s}$ στα άκρα των μελών.

Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, υπολογίζεται ασκώντας διαδοχικά μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο R_i, ένα κάθε φορά μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και όλα τα υπερστατικά μεγέθη, ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$.



Όπως και στην περίπτωση των ισοστατικών πλαισίων, το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να είναι είτε το κανονικό είτε το συμπυκνωμένο για τη συγκεκριμένη φόρτιση, ανάλογα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος.

Παρομοίως, προσδιορίζεται το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις ροπές $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, το οποίο υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_i, ένα κάθε φορά μηδενίζοντας όλα τα εξωτερικά φορτία και τα υπόλοιπα υπερστατικά μεγέθη, ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$.



Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_0 \qquad \underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_0$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_x \qquad \underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_x$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση η οποία εκφράζει τη συνθήκη συμβιβαστότητας των μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R}$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{00} - \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R}$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

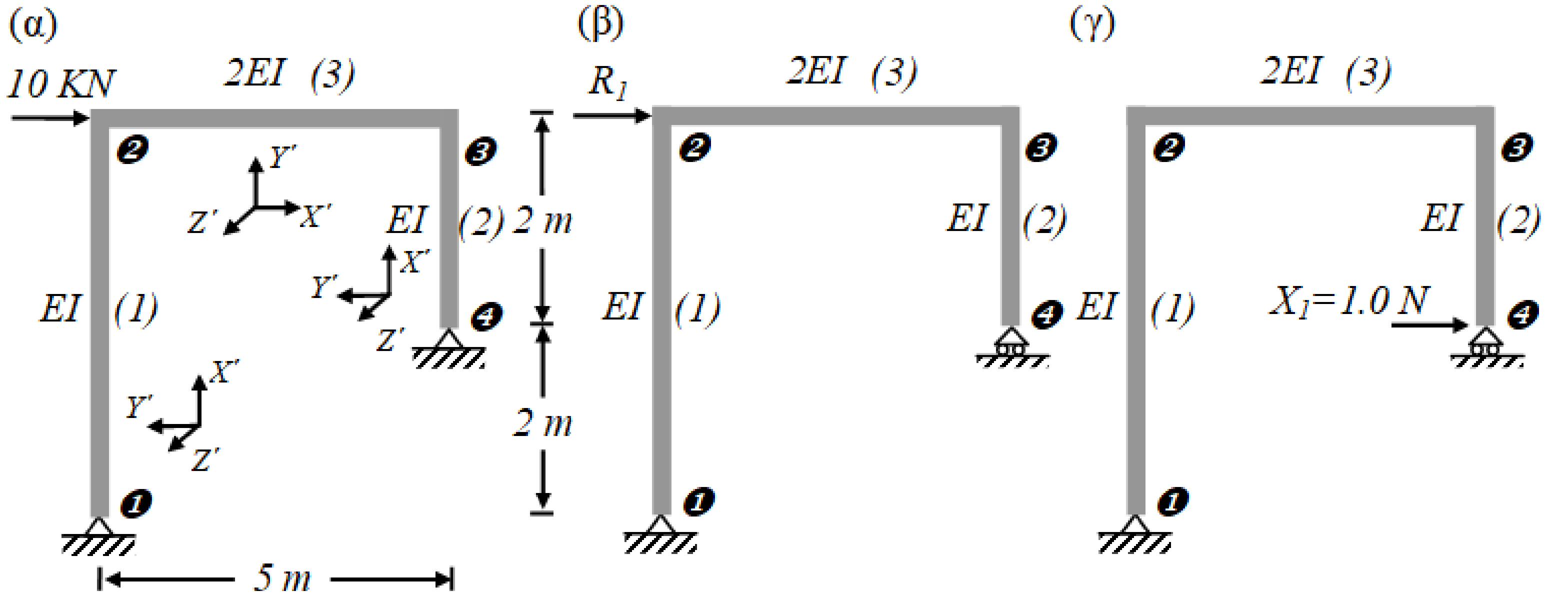
$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R}$$

και οι σχετικές στροφές στα άκρα των επιμέρους μελών:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s}$$

Παράδειγμα-2: επίλυση υπερστατικού πλαισίου

Στο πιο κάτω υπερστατικό πλαίσιο (Σχήμα 8.16.α), το οποίο φορτίζεται με οριζόντιο φορτίο $10\mathrm{KN}$ και του οποίου το οριζόντιο μέλος έχει διπλάσια δυσκαμψία ($2 \cdot \mathrm{E} \cdot \mathrm{I} = 2 \cdot 10^8\ \mathrm{Nm}^2$) από ότι τα κατακόρυφα μέλη ($\mathrm{E} \cdot \mathrm{I} = 10^8\ \mathrm{Nm}^2$), επιλέγουμε σαν υπερστατικό μέγεθος X_1 την οριζόντια αντίδραση στον κόμβο ❹ (Σχήμα 8.16.γ).



Σχήμα 8.16: (α) υπερστατικό πλαίσιο (β) επιβολή μοναδιαίου φορτίου R_1 *στο ισοστατικό πλαίσιο (γ) επιβολή μοναδιαίου υπερστατικού μεγέθους* X_1 *στο ισοστατικό πλαίσιο.*

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα και συνδέει τις στροφές θ_1 και θ_2 των κόμβων του κάθε επιμέρους μέλους με τις αντίστοιχες ροπές M_1 και M_2, είναι το ίδιο με αυτό του ισοστατικού πλαισίου στο Παράδειγμα-8.9:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{6\cdot E\cdot I} & \frac{4}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{6\cdot E\cdot I} & \frac{2}{3\cdot E\cdot I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12\cdot E\cdot I} & \frac{5}{6\cdot E\cdot I} \end{bmatrix}$$

Σχηματισμός συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού:

Χρησιμοποιούμε συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο σε αυτή την περίπτωση έχει μόνο μια στήλη η οποία υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο $R_1 = 1.0\,N$ στον ισοστατικό φορέα, λαμβάνοντας υπόψη την προσήμανση στο Σχήμα 8.15.γ:

$$\underline{b}_o = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix}_{R_1=1.0N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ συνδέει τη μοναδική εξωτερικά επιβαλλόμενη επικόμβια δύναμη $\underline{R} = R_1$ με τις ροπές $\underline{s}$ στα άκρα των μελών.

Σχηματισμός συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού:

Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις ροπές $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος $X_1 = 1.0\,N$ και προσδιορίζοντας τις ροπές M_i^1 και M_i^2 στα άκρα της κάθε δοκού i.

Δοκός i:	1	2	3
M_i^1	0	0	4
M_i^2	4	-2	2

$$\Rightarrow \quad \underline{b}_x = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix}_{X_1=1.0N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_o = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix}_{R_1=1.0N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \end{bmatrix}_{X_1=1.0N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = 3.4667 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = 3.8 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = 3.8 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = 4.7333 \cdot 10^{-7}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη συνθήκη συμβιβαστότητας των μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = -8.028\,\mathrm{KN}$$

Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{00} - \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = 0.416\,\mathrm{mm}$$

- τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

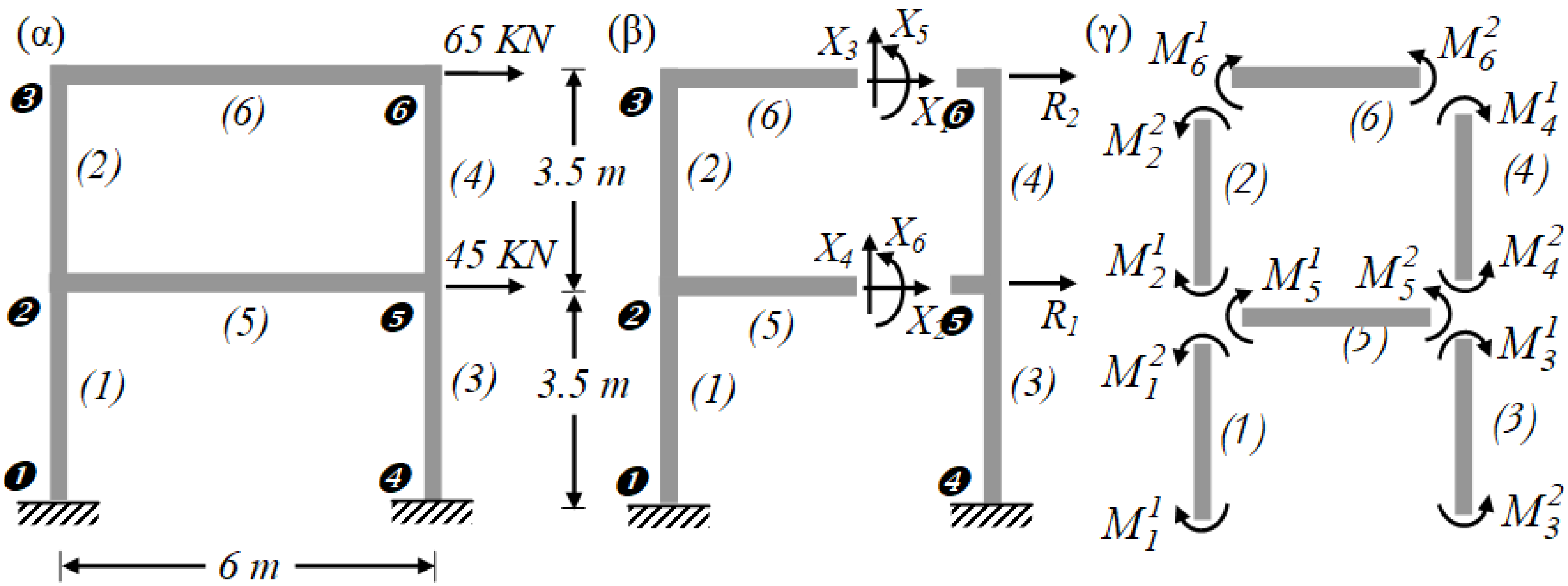
$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.887 \\ 0 \\ 16.056 \\ 7.887 \\ -16.056 \end{bmatrix} \mathrm{KNm}$$

- οι σχετικές στροφές στα άκρα των επιμέρους μελών:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} 0.053 \\ 0.105 \\ 0.053 \\ 0.107 \\ -0.001 \\ -0.101 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

Παράδειγμα-3: επίλυση πλαισιακού φορέα

Να λυθεί ο πλαισιακός φορέας στο Σχήμα 8.17.α με τη Μέθοδο Ευκαμψίας, ώστε να υπολογιστούν οι μετακινήσεις των κόμβων ❺ και ❻, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας ισούται με $E = 30GPa$ και η ροπή αδρανείας των υποστυλωμάτων ισούται με: $I = 0.004\,m^4$, ενώ αυτή της δοκού ισούται με: $I = 0.005\,m^4$.



Σχήμα 8.17: (α) υπερστατικό πλαίσιο (β) επιβολή μοναδιαίων φορτίων R_i $(i = 1,2)$ *και υπερστατικών μεγεθών* X_i $(i = 1,2,\ldots,6)$ *(γ) θετική φορά εντατικών μεγεθών (ροπών)*

Το μητρώο ευκαμψίας του κάθε μέλους ισούται με:

$$\underline{\mathcal{F}}_1 = \underline{\mathcal{F}}_2 = \underline{\mathcal{F}}_3 = \underline{\mathcal{F}}_4 = \frac{3.5}{6 \cdot 30 \cdot 10^9 \cdot 0.004} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{m/N}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_5 = \underline{\mathcal{F}}_6 = \frac{6}{6 \cdot 30 \cdot 10^9 \cdot 0.005} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{m/N}$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_3 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_4 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_5 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_6 \end{bmatrix}$$

$$
\underline{\mathcal{F}}^{*} = \begin{bmatrix}
9.72 & 4.86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4.86 & 9.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 9.72 & 4.86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4.86 & 9.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9.72 & 4.86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4.86 & 9.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.72 & 4.86 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.86 & 9.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.33 & 6.67 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.67 & 13.33 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.33 & 6.67 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.67 & 13.33
\end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}
$$

Χρησιμοποιούμε συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο έχει δύο στήλες οι οποίες υπολογίζονται ασκώντας μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο $R_i = 1.0\,N$ ($i = 1,2$) στον ισοστατικό φορέα (Σχήμα 8.17.β), μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και υπερστατικά μεγέθη και προσδιορίζοντας τις ροπές στα άκρα της κάθε δοκού. Αντίστοιχα, το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο σε αυτή την περίπτωση έχει έξι στήλες, γιατί η πλαισιακή κατασκευή παρουσιάζει στατική αοριστία έκτου βαθμού (Σχήμα 8.17.β), υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος $\underline{X}_i$ και τα υπόλοιπα ίσα με μηδέν, και προσδιορίζοντας τις ροπές στα άκρα της κάθε δοκού.

$$\underline{b}_0 = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \\ M_4^1 \\ M_4^2 \\ M_5^1 \\ M_5^2 \\ M_6^1 \\ M_6^2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.5 \\ 3.5 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} R_1 = 1.0\,N & R_2 = 1.0\,N \end{array} \end{array} \quad \text{και}$$

$$
\underline{b}_x = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \\ M_4^1 \\ M_4^2 \\ M_5^1 \\ M_5^2 \\ M_6^1 \\ M_6^2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
-7 & -3.5 & 6 & 6 & 1 & 1 \\
-3.5 & 0 & 6 & 6 & 1 & 1 \\
-3.5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
-3.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-7 & -3.5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-3.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccc} X_1=1.0\,N & X_2=1.0\,N & X_3=1.0\,N & X_4=1.0\,N & X_5=1.0\,Nm & X_6=1.0\,Nm \end{array}
\end{array}
$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 0.1191 & 0.2977 \\ 0.2977 & 0.9528 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} -0.2977 & -0.1191 & 0 & 0 & 0.0510 & 0.0510 \\ -0.9528 & -0.2977 & 0 & 0 & 0.2042 & 0.1531 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 0.2977 & -0.9528 \\ -0.1191 & -0.2977 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0510 & 0.2042 \\ 0.0510 & 0.1531 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1.906 & 0.595 & -1.225 & -0.919 & -0.408 & -0.306 \\ 0.595 & 0.238 & -0.306 & -0.306 & -0.102 & -0.102 \\ -1.225 & -0.306 & 2.580 & 1.050 & 0.470 & 0.175 \\ -0.919 & -0.306 & 1.050 & 1.530 & 0.175 & 0.295 \\ -0.408 & -0.102 & 0.470 & 0.175 & 0.157 & 0.058 \\ -0.306 & -0.102 & 0.175 & 0.295 & 0.058 & 0.098 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη συνθήκη συμβιβαστότητας των μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,500 \\ 22,500 \\ 22,608 \\ 38,575 \\ -67,824 \\ -115,725 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 32.5 \\ 22.5 \\ 22.608 \\ 38.575 \\ -67.824 \\ -115.725 \end{bmatrix} KN$$

Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 0.0030 \\ 0.0061 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 2.988 \\ 6.097 \end{bmatrix} mm$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ M_3^1 \\ M_3^2 \\ M_4^1 \\ M_4^2 \\ M_5^1 \\ M_5^2 \\ M_6^1 \\ M_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -122.701 \\ 69.799 \\ -45.926 \\ 67.824 \\ -69.799 \\ 122.701 \\ -67.824 \\ 45.926 \\ 115.725 \\ -115.725 \\ 67.824 \\ -67.824 \end{bmatrix} \text{KNm}$$

Εντολές *Matlab*

```
L=[ 3.5   6 ]
E=30e9
I=[0.004  0.005]
F=zeros(12,12)
for i=1 : 2 : 8
    F(i:i+1,i:i+1)=(L(1)/(6*E*I(1)))*[ 2  1 ; 1  2 ];
end
for i= 9 : 2 : 12
    F(i:i+1,i:i+1)=(L(2)/(6*E*I(2)))*[ 2  1 ; 1  2 ];
end
b0=[ 0   0   0  0   0  3.5  0    0  0  0  0  0
     0   0   0  0  3.5   7  0  3.5  0  0  0  0 ]'
```

```
bX=[ -7  -3.5  -3.5  0  -3.5  -7    0 -3.5  0  0  0  0
   -3.5    0     0   0    0  -3.5  0    0   0  0  0  0
      6    6     6   6    0     0  0    0   0  0  6  0
      6    6     0   0    0     0  0    0   6  0  0  0
      1    1     1   1    1     1  1    1   0  0  1  1
      1    1     0   0    1     1  0    0   1  1  0  0 ]'
F00=b0'*F*b0
F0X=b0'*F*bX
FX0=bX'*F*b0
FXX=bX'*F*bX
R=[45000 65000]'
X=-inv(FXX)*FX0*R
U=F00*R+F0X*X
s=b0*R+bX*X
```

Ανάλυση μικτών κατασκευών με τη μέθοδο ευκαμψίας

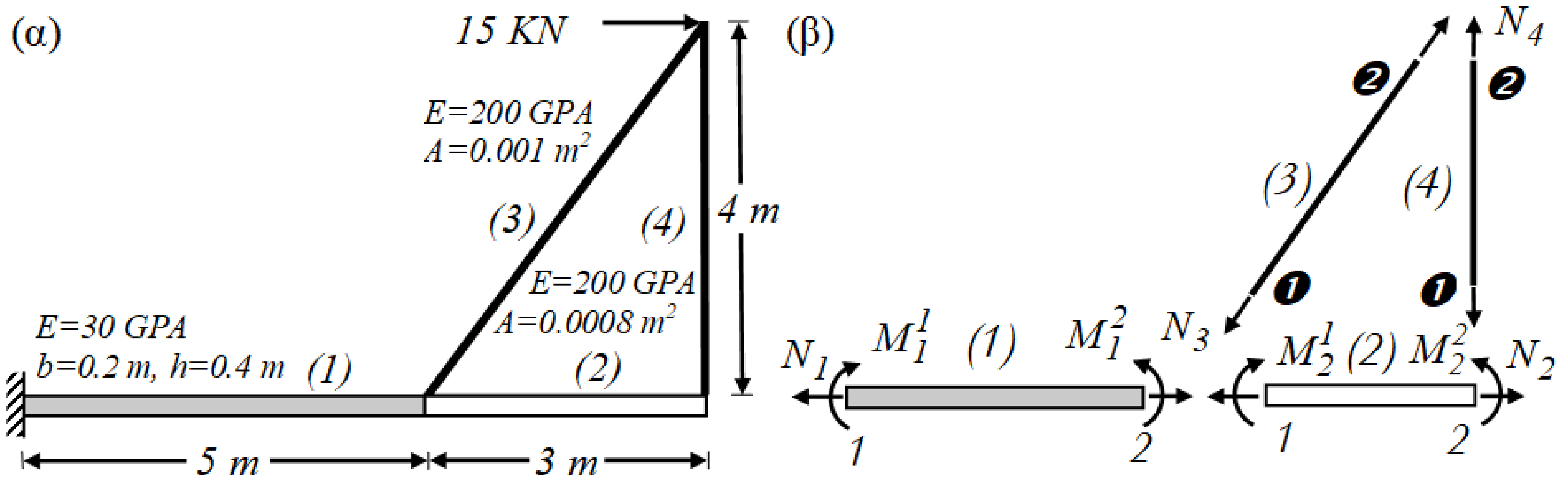
Μια μικτή κατασκευή η οποία αποτελείται από διαφορετικά δομικά στοιχεία, όπως π.χ. δοκούς και δικτυώματα, μπορεί να αναλυθεί με τη μέθοδο ευκαμψίας με απλό συνδυασμό των μητρώων ευκαμψίας επιμέρους μελών.

Επιπλέον, αν για μια δοκό θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και αξονικές παραμορφώσεις τότε πρέπει να συμπεριληφθεί και η αξονική δύναμη στα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών $\underline{s}_i$. Σε εκείνη τη περίπτωση το μητρώο ευκαμψίας, θα έχει διαστάσεις 3×3 και θα είναι ένα συνδυασμός του 2×2 μητρώου ευκαμψίας μιας δοκού με καθαρά καμπτικές παραμορφώσεις και του στοιχείου ευκαμψίας μιας ράβδου υπό αξονική δύναμη:

$$f_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & 0 \\ \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{A\cdot E} \end{bmatrix}_i$$

Παράδειγμα-4: ανάλυση μικτών κατασκευών

Ο πιο κάτω μικτός φορέας (Σχήμα 8.18.α), ο οποίος αποτελείται από μια δοκό και δύο ράβδους δικτυώματος, μπορεί να αναλυθεί σαν ένα σύστημα δύο δοκών και δύο ράβδων, όπως φαίνεται πιο κάτω (Σχήμα 8.18.β).



Σχήμα 8.18: (α) μικτή κατασκευή αποτελούμενη από δοκούς και ράβδους (β) θετική φορά εντατικών μεγεθών.

Αφού γίνει η αρίθμηση των μελών και των βαθμών ελευθερίας μπορεί να προσδιοριστεί το μητρώο ευκαμψίας του κάθε μέλους:

$$\underline{\mathcal{F}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & 0 \\ \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{A\cdot E} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.5208 & 0.2604 & 0 \\ 0.2604 & 0.5208 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0208 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m/N}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & 0 \\ \frac{L}{6\cdot E\cdot I} & \frac{L}{3\cdot E\cdot I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{A\cdot E} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.1562 & 0 \\ 0.1562 & 0.3125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0125 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m/N}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_3 = \left[\frac{L}{A\cdot E}\right]_3 = 2.5\cdot 10^{-8}\mathrm{m/N} \qquad \underline{\mathcal{F}}_4 = \left[\frac{L}{A\cdot E}\right]_4 = 2.5\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

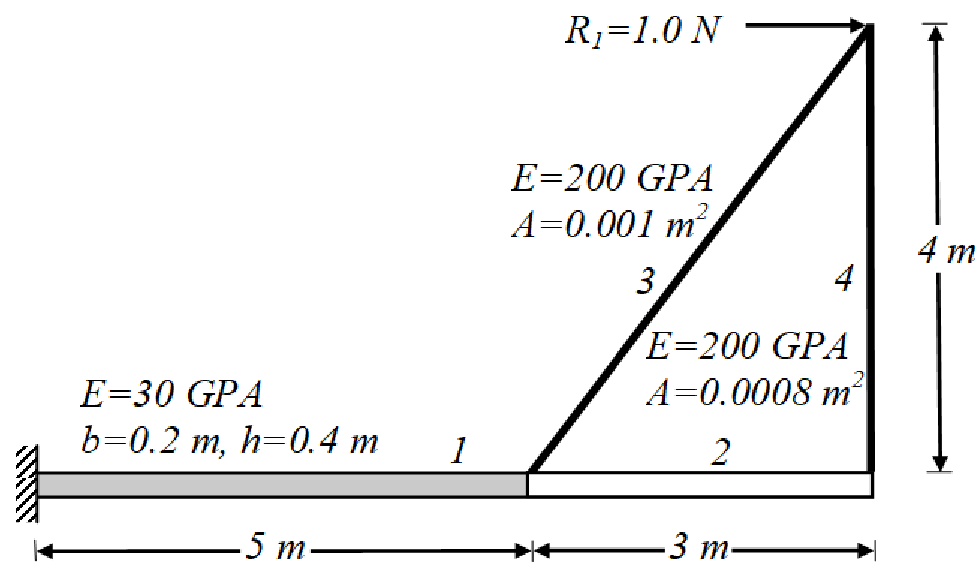
Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των δοκών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \mathcal{F}_3 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & 0 & \mathcal{F}_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} 0.5208 & 0.2604 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2604 & 0.5208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3125 & 0.1562 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1562 & 0.3125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \text{ m / N}$$

Ακολούθως, φορτίζοντας με μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο $R_1 = 1.0\,\mathrm{N}$ το φορέα (Σχήμα 8.19), μπορεί να υπολογιστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, του οποίου τα στοιχεία ισούνται με τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του κάθε ενός μέλους του φορέα:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ N_1 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{R_1=1.0\,\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 5/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$



Στη συνέχεια, μπορεί να υπολογιστεί το συνολικό (ή απόλυτο) μητρώο ευκαμψίας:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b} = 3.116 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/N}$$

Με δεδομένα τα επικόμβια φορτία, τα οποία είναι σε αυτή την περίπτωση μόνο η επικόμβια δύναμη $R = 15\,\mathrm{KN}$, μπορούν να υπολογιστούν:

- τα εντατικά μεγέθη των μελών:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} M_1^1 \\ M_1^2 \\ N_1 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -60,000\,\mathrm{Nm} \\ -60,000\,\mathrm{Nm} \\ 15,000\,\mathrm{N} \\ -60,000\,\mathrm{Nm} \\ 0\,\mathrm{Nm} \\ 0\,\mathrm{N} \\ 25,000\,\mathrm{N} \\ -20,000\,\mathrm{N} \end{bmatrix}$$

- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε μόνο τη μετακίνηση που αντιστοιχεί στο βαθμό ελευθερίας που χρησιμοποιήθηκε στο σχηματισμό του συμπυκνωμένου μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R} = 3.116 \cdot 10^{-6} \cdot 15{,}000 = 0.0467\,\text{m} = 4.67\text{cm}$$

- Και, οι παραμορφώσεις των μελών της κατασκευής:

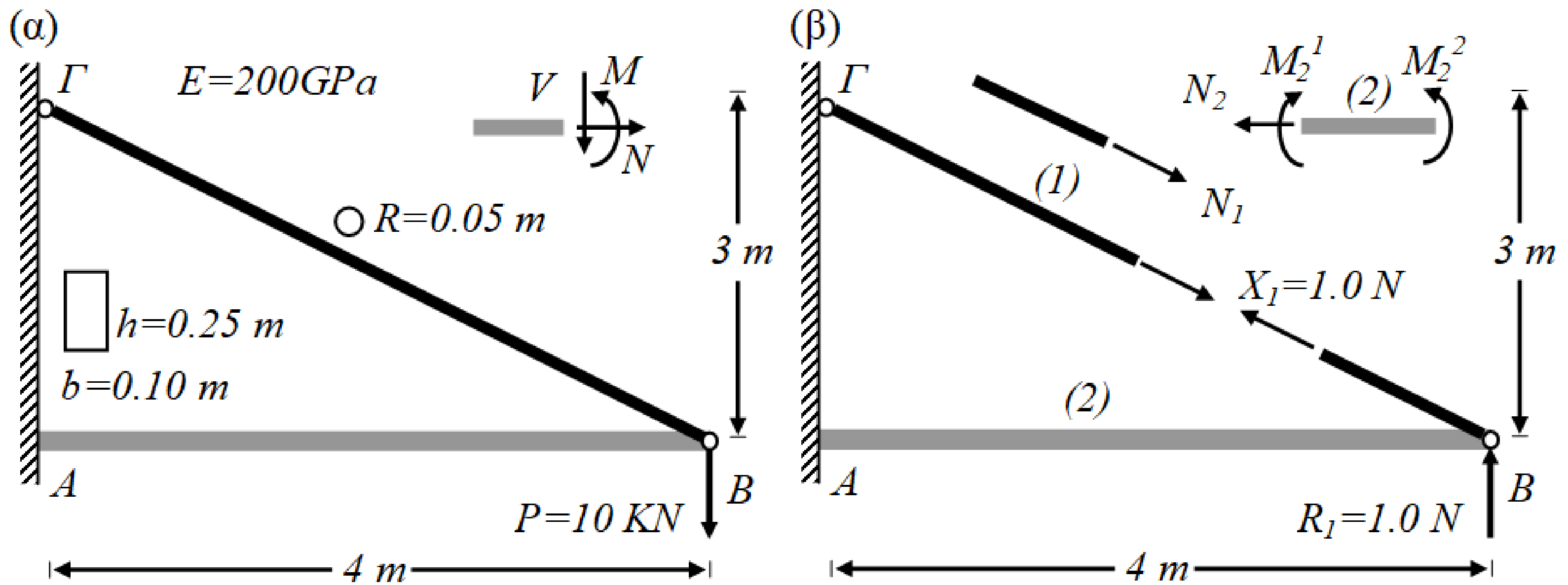
$$\underline{u} = \underline{f} \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} -4.69\,\text{rad} \\ -4.69\,\text{rad} \\ 0.03\,\text{m} \\ -1.88\,\text{rad} \\ 0.94\,\text{rad} \\ 0\,\text{m} \\ 0.63\,\text{m} \\ -0.5\,\text{m} \end{bmatrix} \cdot 10^{3}$$

Εντολές Matlab

```
L = [ 5 3 5 4];
E = [ 30e9 30e9 200e9 200e9];
A = [0.2*0.4   0.2*0.4   0.001   0.0008]
I = 0.2*0.4^3/12;
i=1;
f1 = [ L(i)/(3*E(i)*I)   L(i)/(6*E(i)*I)     0
       L(i)/(6*E(i)*I)   L(i)/(3*E(i)*I)     0
         0            0            L(i)/(A(i)*E(i))]
i=2;
f2 = [ L(i)/(3*E(i)*I)   L(i)/(6*E(i)*I)     0
       L(i)/(6*E(i)*I)   L(i)/(3*E(i)*I)     0
         0            0            L(i)/(A(i)*E(i))]
f3 = L(3)/(E(3)*A(3));
f4 = L(4)/(E(4)*A(4));
f = zeros(8,8);
f(1:3,1:3)=f1;
f(4:6,4:6)=f2;
f(7,7)=f3;
f(8,8)=f3;
b = [ -4 -4 1  -4 0 0  5/3  -4/3]'
F = b' * f * b
R = [ 15000 ]
U = F * R
s = b * R
u = f * s
```

Παράδειγμα-5: ανάλυση μικτών κατασκευών

Για να επιλυθεί η πιο κάτω σύνθετη δοκός (Σχήμα 8.20.α), η οποία αποτελείται από μία δοκό και ένα καλώδιο το οποίο μπορεί να πάρει μόνο αξονικές εφελκυστικές δυνάμεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Μέθοδος Ευκαμψίας.



Σχήμα 8.20: (α) σύνθετη υπερστατική δοκός (β) μικτή κατασκευή φορτιζόμενη με μοναδιαία δύναμη $\mathrm{R_1} = 1.0\,\mathrm{N}$ *και υπερστατικό μέγεθος* $\mathrm{X_1} = 1.0\,\mathrm{N}$.

Αφού γίνει η αρίθμηση των μελών και των βαθμών ελευθερίας προσδιορίζεται το μητρώο ευκαμψίας του κάθε μέλους:

$$\underline{\mathcal{F}}_1 = \left[\frac{L}{A \cdot E}\right]_1 = 3.183 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m/N}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} & 0 \\ \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} & \frac{L}{3 \cdot E \cdot I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{A \cdot E} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 5.12 & 2.56 & 0 \\ 2.56 & 5.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των μελών του φορέα:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\mathcal{F}}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} 31.83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.12 & 2.56 & 0 \\ 0 & 2.56 & 5.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

Ο αντίστοιχος ισοστατικός φορέας προκύπτει με τομή του καλωδίου, του οποίου η αξονική δύναμη ορίζεται σαν το υπερστατικό μέγεθος X_1 (Σχήμα 8.20.β). Χρησιμοποιείται το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, που έχει μόνο μια στήλη και υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο $R_1 = 1.0\,\mathrm{N}$ (Σχήμα 8.20.β) στον ισοστατικό φορέα:

$$\Rightarrow \quad \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ N_2 \end{bmatrix}_{R_1 = 1.0\,\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος $X_1 = 1.0\,\mathrm{N}$ και προσδιορίζοντας τις ροπές και την αξονική δύναμη στα άκρα της δοκού και την αξονική δύναμη του καλωδίου:

$$\Rightarrow \quad \underline{b}_x = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_2^1 \\ M_2^2 \\ N_2 \end{bmatrix}_{X_1 = 1.0\,\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.4 \\ 0 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, τα πιο κάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_0 = 8.192 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_x = 4.915 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_0 = 4.915 \cdot 10^{-7}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}_x = 2.986 \cdot 10^{-7}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα και με δεδομένα τα επικόμβια φορτία $\underline{R} = [10\,000]\,\mathrm{N}$, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση:

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = \mathrm{X} = 16,460\ \mathrm{N} = 16.46\,\mathrm{KN}$$

Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογιστούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = -1.0137 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = -0.10137\,\mathrm{mm}$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 16,460\,\mathrm{N} \\ -4,950\,\mathrm{Nm} \\ 0\,\mathrm{Nm} \\ -13,168\,\mathrm{N} \end{bmatrix}$$

Εντολές *Matlab*

```
L1=5,  A1= pi * 0.05 ^ 2
L2=4,  A2=0.25 * 0.1,  I2= 0.1 * 0.25 ^ 3 / 12
E=200e9
F= [L1/(A1*E)   0              0              0
      0         L2/(3*E*I2)    L2/(6*E*I2)    0
      0         L2/(6*E*I2)    L2/(3*E*I2)    0
      0         0              0              L2/(A2*E)]
b0=[ 0  4  0  0 ]'
bX=[ 1  2.4  0  -0.8 ]'
F00=b0'*F*b0
F0X=b0'*F*bX
FX0=bX'*F*b0
FXX=bX'*F*bX
R=[-10000]'
X=-inv(FXX)*FX0*R
U=F00*R+F0X*X
s=b0*R+bX*X
```