2. Επίλυση Δικτυωμάτων με τις Μεθόδους Ευκαμψίας (ή Δυνάμεων)

Εαρινό εξάμηνο 2023

Πέτρος Κωμοδρόμος
komodromos@ucy.ac.cy

http://www.eng.ucy.ac.cy/petros

Θέματα

- ***Εισαγωγή στις σύγχρονες μεθόδους ανάλυσης κατασκευών***
  - ***μέθοδοι των δυνάμεων (ή ευκαμψίας)***
  - ***μέθοδοι των μετακινήσεων (ή δυσκαμψίας)***
- ***Μέθοδοι ευκαμψίας (ή δυνάμεων)***
  - ***Ανάλυση δικτυωμάτων***
    - Ανάλυση ισοστατικών δικτυωμάτων
    - Ανάλυση υπερστατικών δικτυωμάτων

Σύγχρονη στατική και δυναμική ανάλυση των κατασκευών στηρίζεται σε μεθόδους ανάλυσης με μητρώα:

- συστηματική επίλυση κατασκευών με γενικό τρόπο
- αξιοποίηση ισχύος Η/Υ
- δυνατότητα επίλυσης πολύπλοκων κατασκευών
- αποφυγή αναγκαίων και ανακριβών προσεγγίσεων
- σημαντική μείωση κόστους ανάλυσης
- ακρίβεια αποτελεσμάτων
- ταχύτατη επίλυση

Παράγοντες που επέτρεψαν τη χρήση σύγχρονων μεθόδων ανάλυσης των κατασκευών

- ανάπτυξη μεθόδων ανάλυσης με μητρώα
  - γνωστές πριν από την εμφάνιση των Η/Υ
- ανάπτυξη μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης (αριθμητικές μέθοδοι)
  - επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων
  - ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων
  - …. κ.λπ.
- ραγδαία ανάπτυξη Η/Υ και μείωση υπολογιστικού κόστους
- ανάπτυξη και χρήση γλωσσών προγραμματισμού

Χρήση μεθόδου των δυνάμεων για μεγαλύτερους βαθμούς στατικής αοριστίας

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \ldots\ldots + \delta_{1N} \cdot X_N = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \ldots\ldots + \delta_{2N} \cdot X_N = 0$$

....

$$\delta_{N0} + \delta_{N1} \cdot X_1 + \delta_{N2} \cdot X_2 + \ldots\ldots + \delta_{NN} \cdot X_N = 0$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{N0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{\mathcal{X}} = -\underline{\Delta}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{F}} = -\underline{\mathcal{X}}^{-1} \cdot \underline{\Delta}$$

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τα μητρώα ευκαμψίας των επιμέρους δομικών μελών, από τα οποία αποτελείται ο φορέας, τη συνδεσμολογία και γεωμετρία του φορέα σχηματίζεται με ένα συστηματικό τρόπο το συνολικό μητρώο ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}$ του φορέα. Ουσιαστικά, καταστρώνεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις δυνάμεις στα άκρα των μελών του φορέα.

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων με το οποίο μπορεί να αναλυθεί μια κατασκευή με τη (γενικευμένη) μέθοδο των δυνάμεων ή ευκαμψίας βασίζεται στις πιο κάτω τρεις βασικές συνθήκες:

- Εξισώσεις ισορροπίας
- Σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, ή δυνάμεων-μετακινήσεων
- Συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων, ή μετακινήσεων

Σημειώνεται ότι, τόσο ο όρος δυσκαμψία, όσο και ευκαμψία χρησιμοποιούνται πιο γενικά και για διαφορετικά είδη παραμόρφωσης από καμπτικά, όπως δυστμησία, δυστενεία και δυστρεψία.

Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

- *μέθοδος των δυνάμεων ή ευκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι δυνάμεις και ροπές

- *μέθοδος των μετακινήσεων ή δυσκαμψίας*
  - οι άγνωστοι στις σχηματιζόμενες εξισώσεις είναι μετακινήσεις

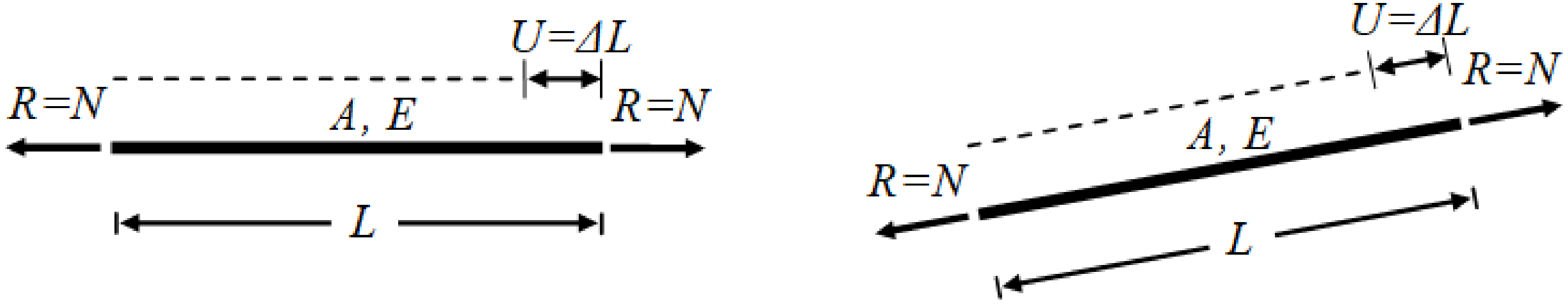
Γενικευμένη μέθοδος των δυνάμεων (ή ευκαμψίας)

- βασίζεται στα μητρώα ευκαμψίας των επιμέρους μελών μιας κατασκευής τα οποία συνδυάζονται, χρησιμοποιώντας κατάλληλα μητρώα μετασχηματισμών, ώστε να σχηματιστεί το μητρώο ευκαμψίας ***F*** της κατασκευής
- χρήσιμη για επιλύσεις απλών προβλημάτων με το χέρι
- δύσκολη αυτοματοποίηση και προγραμματισμός της μεθόδου
  - ο τρόπος και η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα με τη μέθοδο ευκαμψίας διαφέρει ανάλογα με το αν ο φορέας είναι ισοστατικός ή υπερστατικός
  - μπορούν να γίνουν διαφορετικές επιλογές στον καθορισμό των υπερστατικών μεγεθών

Ανάλυση ισοστατικών δικτυωμάτων με τη γενικευμένη μέθοδο δυνάμεων ή ευκαμψίας

Χωρίζοντας την κατασκευή σε επιμέρους μέλη και κόμβους στους οποίους συνδέονται, καθορίζονται οι σχέσεις δυνάμεων-μετακινήσεων για τους διαφορετικούς τύπους μελών ή στοιχείων. Η σχέση δυνάμεων-μετακινήσεων που χαρακτηρίζει μια ράβδο δικτυώματος (Σχήμα 8.1) είναι η απλή σχέση που συνδέει την αξονική δύναμη που ασκείται στα δύο άκρα της ράβδου με τη σχετική μετακίνηση των δύο άκρων στη διεύθυνση της ράβδου, που ουσιαστικά είναι η επιμήκυνση της ράβδου.

$$\Delta L = \frac{L}{A \cdot E} \cdot N$$



Σχήμα 8.1: Ράβδος δικτυώματος: μετακινήσεις και δυνάμεις στους κόμβους στα άκρα της ράβδου.

Συνήθη διανύσματα μεθόδου δυνάμεων ή ευκαμψίας

Γενικά, ορίζουμε τα πιο κάτω διανύσματα που περιέχουν: εντατικά μεγέθη $\underline{s}$ και μετακινήσεις $\underline{u}$ των κόμβων στα άκρα των μελών του φορέα, τα οποία εκφράζονται βάσει του τοπικού συστήματος συντεταγμένων του μέλους και επικόμβιες δυνάμεις ή ροπές, $\underline{R}$ και μετακινήσεις $\underline{U}$, τα οποία εκφράζονται βάσει του απόλυτου (άλλως, καθολικού) συστήματος συντεταγμένων του φορέα.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται τα πιο κάτω διανύσματα:

$\underline{s}$: εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών, σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους

$\underline{u}$: σχετικές μετακινήσεις των άκρων των μελών, σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους

$\underline{R}$: επικόμβιες δυνάμεις, σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων

$\underline{U}$: μετακινήσεις κόμβων, σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων

Ανάλυση ισοστατικών δικτυωμάτων

$\underline{s}$: αξονική δύναμη στους κόμβους της ράβδου, σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους

$\underline{u}$: σχετική μετακίνηση *ΔL* των κόμβων της ράβδου, σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους

$$\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$$

➔ οι μετακινήσεις $\underline{u}_i$ στα άκρα ενός μέλους μπορούν, με τη χρήση του μητρώου ευκαμψίας $\underline{F}_i$, το οποίο στη περίπτωση των δικτυωμάτων είναι ένα απλό στοιχείο, να εκφραστούν συναρτήσει των δυνάμεων $\underline{s}_i$ στα άκρα των μελών:

$$\underline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i = \frac{L_i}{A_i \cdot E_i}$$

Ανάλυση ισοστατικών δικτυωμάτων

Προσδιορίζοντας το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$, με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των ράβδων, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις αξονικές δυνάμεις ενός ισοστατικού δικτυώματος για οποιαδήποτε φόρτιση με επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$. Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην *Αρχή της Επαλληλίας*, αφού υπολογίζοντας τις αξονικές δυνάμεις οι οποίες αναπτύσσονται, ξεχωριστά, για κάθε πιθανή εξωτερικά επιβαλλόμενη επικόμβια δύναμη μπορούμε να τις αθροίσουμε κατάλληλα για συγκεκριμένη φόρτιση, ώστε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις $\underline{s}$ στις ράβδους.

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$$

$\underline{b}$: μητρώο μετασχηματισμού το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις με τις δυνάμεις στα άκρα των ράβδων

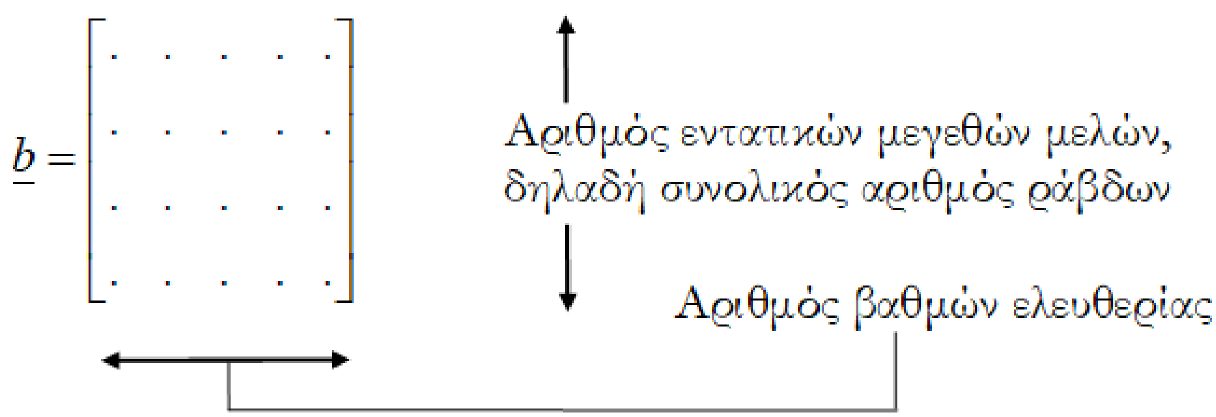
$\underline{R}$: επικόμβιες δυνάμεις στο δικτύωμα

$\underline{s}$: αξονική δύναμη της ράβδου

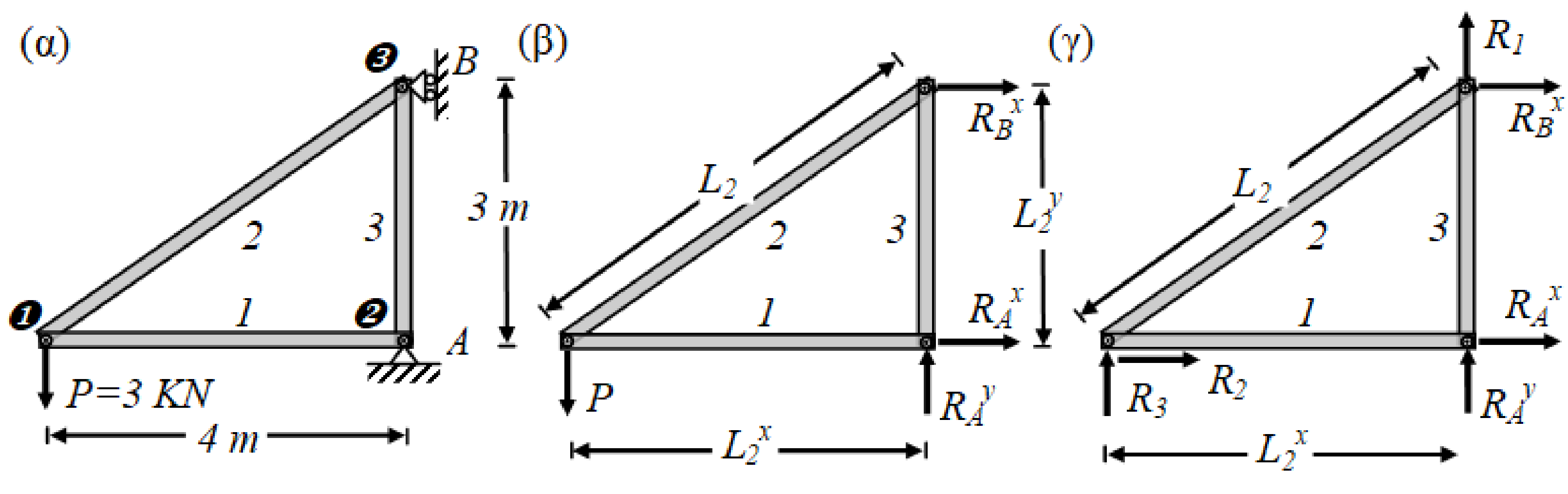
Υπολογισμός μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$$

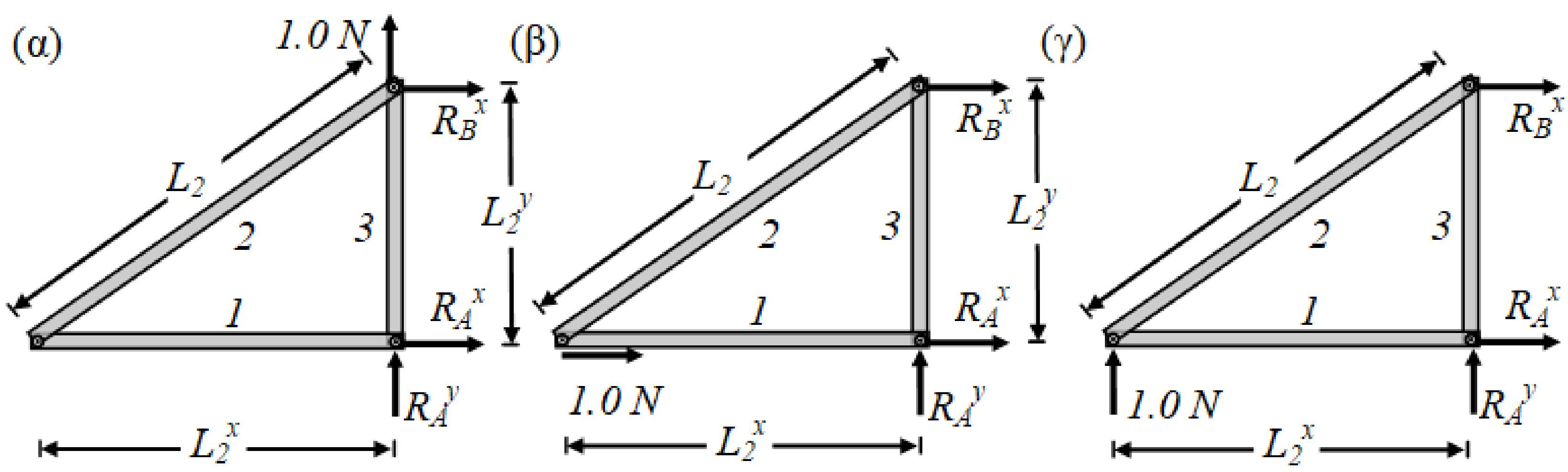
Για να υπολογίσουμε το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$ πρέπει, αφού προσδιορίσουμε όλες τις δυνατές επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$, να ασκήσουμε μοναδιαίες δυνάμεις που να αντιστοιχούν στην επικόμβια δύναμη R_i, μια κάθε φορά και με τις υπόλοιπες να είναι μηδενικές. Συγκεκριμένα για να υπολογίσουμε τη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$ πρέπει να ασκήσουμε μοναδιαία δύναμη $R_i = 1.0\,\mathrm{N}$, ενώ όλες οι άλλες επικόμβιες δυνάμεις πρέπει να μηδενιστούν $R_j = 0 \;\forall\; j \neq i$, ώστε η στήλη i να προκύψει από τις αντίστοιχες δυνάμεις των ράβδων.



Παράδειγμα-1



Σχήμα 8.2: (α) δικτύωμα (β) ΔΕΣ (γ) ΔΕΣ με εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.



Σχήμα 8.3: Εφαρμογή επικόμβιων δυνάμεων (α) $R_1 = 1.0\,N$ *(β)* $R_2 = 1.0\,N$ *(γ)* $R_3 = 1.0\,N$.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά μοναδιαίες δυνάμεις, αντίστοιχων των R_1, R_2 και R_3, και επιλύνοντας την κάθε περίπτωση υπολογίζουμε τις αξονικές δυνάμεις s_1, s_2 και s_3, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα, όπου οι θλιπτικές δυνάμεις έχουν αρνητικό πρόσημο:

Περίπτωση	R_1	R_2	R_3	s_1	s_2	s_3
1	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	-1	0	0
3	0	0	1	4/3	-5/3	1

Από τον προηγούμενο πίνακα, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$, μπορεί να προσδιοριστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις εσωτερικές δυνάμεις $\underline{s}$:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Από τον προηγούμενο πίνακα, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$, μπορεί να προσδιοριστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις εσωτερικές δυνάμεις $\underline{s}$:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Έχοντας προσδιορίσει το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, μπορούν να υπολογισθούν οι εσωτερικές δυνάμεις $\underline{s}$ για οποιεσδήποτε επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αντικαθιστώντας τις επικόμβιες δυνάμεις, οι αξονικές δυνάμεις υπολογίζονται κατευθείαν όπως πιο κάτω:

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = -4\text{KN} \qquad s_2 = 5\text{KN} \qquad s_3 = -3\text{KN}$$

Μητρώο ευκαμψίας ράβδου και δικτυώματος

Έχοντας υπολογίσει το μητρώο ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}_i$ της κάθε ράβδου ενός ισοστατικού δικτυώματος, το οποίο στην περίπτωση αυτή αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο $\underline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i = \frac{L_i}{A_i \cdot E_i}$ που συνδέει τη σχετική μετακίνηση $u_i = \Delta L_i$ με την αξονική δύναμη $s_i = N_i$ της ράβδου i, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των ράβδων του δικτυώματος:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & & & & \\ & \underline{\mathcal{F}}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \underline{\mathcal{F}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} & & & & \\ & \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \frac{L_N}{A_N \cdot E_N} \end{bmatrix}$$

Μητρώο ευκαμψίας ράβδου και δικτυώματος

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων $u_i = \Delta L_i$ με τις αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις $s_i = N_i$ των ράβδων.

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & & & & \\ & \mathcal{F}_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & \mathcal{F}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ s_N \end{bmatrix}$$

Αρχή δυνατών συμπληρωματικών έργων και μέθοδος ευκαμψίας

Ακολούθως, αφού προσδιοριστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών ($\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$), μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας δυνατά φορτία δR_1, δR_2, …, δR_N το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο δW_E^c ισούται με:

$$\delta W_E^c = \begin{bmatrix} \delta R_1 & \delta R_2 & \cdot & \cdot & \delta R_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_N \end{bmatrix} = \delta \underline{R}^T \cdot \underline{U}$$

Αντίστοιχα, η εσωτερική δυνατή συμπληρωματική ελαστική ενέργεια δU^c ισούται με:

$$\delta U^c = \begin{bmatrix} \delta s_1 & \delta s_2 & \cdot & \cdot & \delta s_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \delta \underline{s}^T \cdot \underline{u}$$

Βάσει της ΑΔΕ, το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο δW_E^c πρέπει να ισούται με την εσωτερική δυνατή συμπληρωματική ελαστική ενέργεια δU^c :

$$\delta W_E^c = \delta U^c \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{R}^T \cdot \underline{U} = \delta \underline{s}^T \cdot \underline{u}$$

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{s}^T = \delta \underline{R}^T \cdot \underline{b}^T \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{R}^T \cdot \underline{U} = \delta \underline{R}^T \cdot \underline{b}^T \cdot \underline{u}$$

$$\Rightarrow \quad \delta \underline{R}^T \cdot \left(\underline{U} - \underline{b}^T \cdot \underline{u} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U} - \underline{b}^T \cdot \underline{u} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U} = \underline{b}^T \cdot \underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \cdot \underline{R} = \left(\underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \right) \cdot \underline{R} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R}$$

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R}$$

Το συνολικό μητρώο ευκαμψίας ή ελαστικότητας $\underline{\mathcal{F}}$ της κατασκευής συνδέει τις μετακινήσεις των κόμβων με τις αντίστοιχες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτούς, σύμφωνα με το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων.

Διαδικασία επίλυσης ενός ισοστατικού δικτυώματος

Η διαδικασία επίλυσης ενός ισοστατικού δικτυώματος με τη Μέθοδο της Ευκαμψίας συνοψίζεται στα πιο κάτω βήματα, τα οποία μπορούν συστηματικά να ακολουθηθούν ακόμη και σε γενικότερες περιπτώσεις κατασκευών, όπως πλαισιακούς φορείς τους οποίους θα εξετάσουμε στη συνέχεια:

1. Αρίθμηση όλων των μελών και καθορισμός των εντατικών τους μεγεθών στα άκρα τους s_i .

2. Καθορισμός για όλα τα μέλη των σχέσεων μετακινήσεων-δυνάμεων, $u_i = \mathcal{F}_i \cdot s_i$.

3. Σχηματισμός του γενικού μητρώου $\underline{\mathcal{F}}^*$ με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$.

4. Προσδιορισμός του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$.

5. Υπολογισμός του συνολικού μητρώου ευκαμψίας ή ελαστικότητας, $\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}$.

6. Με δεδομένα τα επικόμβια εξωτερικά φορτία $\underline{R}$ μπορούν να υπολογιστούν:

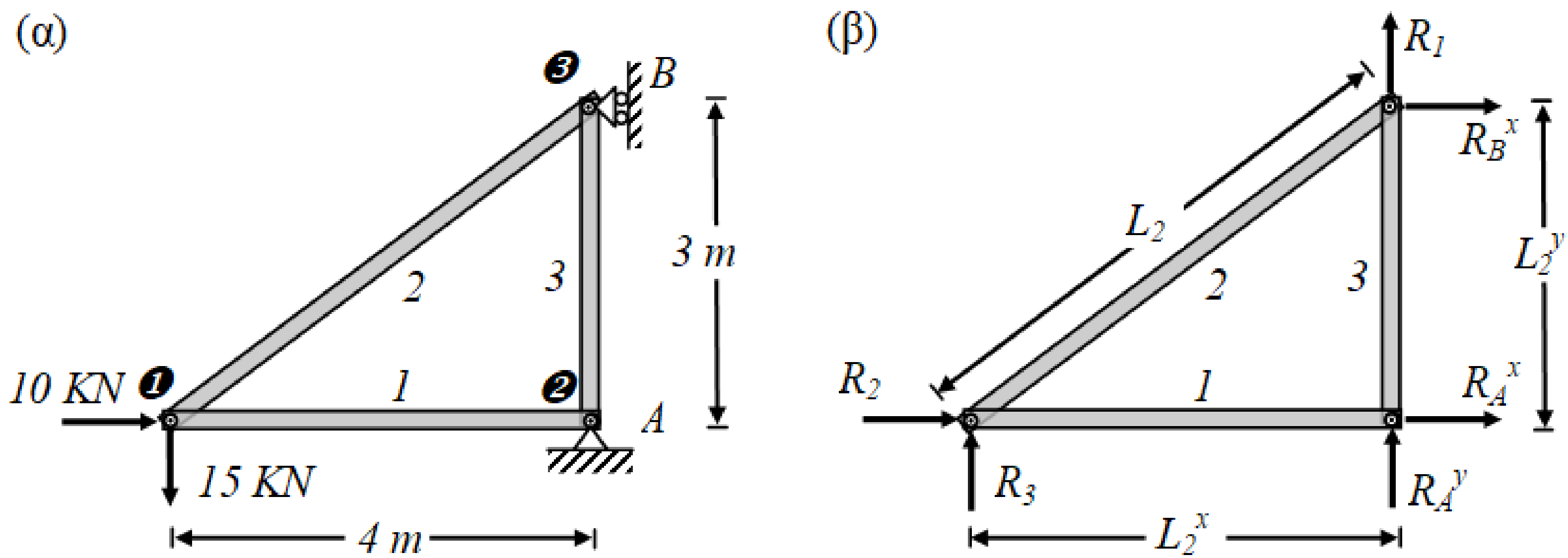
   - τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$

   - οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής, $\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R}$

   - οι μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \cdot \underline{R}$

Παράδειγμα-2

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων και οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος με τη μέθοδο ευκαμψίας (Σχήμα 8.4.α), θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας ισούται με $E = 200\ \text{GPA}$ και το εμβαδόν της διατομής των ράβδων ισούται με $A = 0.001\text{m}^2$.



Σχήμα 8.4: (α) δικτύωμα (β) ΔΕΣ με εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις R_1, R_2 *και* R_3.

Έχοντας αριθμήσει τους κόμβους και τα μέλη του δικτυώματος καθορίζουμε σαν εντατικά μεγέθη στα άκρα των ράβδων τις αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις $\underline{s_1} = N_1$, $\underline{s_2} = N_2$ και $\underline{s_3} = N_3$.

Ακολούθως, προσδιορίζουμε τα μητρώα ευκαμψίας για όλα τα μέλη, τα οποία σε αυτή την περίπτωση είναι απλά στοιχεία: $\underline{\mathcal{F}_i} = \mathcal{F}_i = \dfrac{L_i}{A_i \cdot E_i}$

$$\underline{\mathcal{F}_1} = \mathcal{F}_1 = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{4\,m}{0.001\,m^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,N/m^2} = 2 \cdot 10^{-8}\,m/N$$

$$\underline{\mathcal{F}_2} = \mathcal{F}_2 = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{5\,m}{0.001\,m^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,N/m^2} = 2.5 \cdot 10^{-8}\,m/N$$

$$\underline{\mathcal{F}_3} = \mathcal{F}_3 = \frac{L_3}{A_3 \cdot E_3} = \frac{3\,m}{0.001\,m^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,N/m^2} = 1.5 \cdot 10^{-8}\,m/N$$

Έτσι, μπορούμε να σχηματίσουμε το γενικό μητρώο $\underline{\mathcal{F}^*}$ με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη:

$$\underline{\mathcal{F}^*} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,m/N.$$

Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$, το έχουμε ήδη προσδιορίσει από το Παράδειγμα-8.1 είναι:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ακολούθως μπορεί να υπολογιστεί το συνολικό (ή απόλυτο) μητρώο ευκαμψίας:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 2 & -2.6667 \\ 1.5 & -2.6667 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\, \mathrm{m/N}.$$

Με δεδομένα τα επικόμβια φορτία $\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -15 \end{bmatrix} \mathrm{KN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10{,}000 \\ -15{,}000 \end{bmatrix} \mathrm{N}$

- τα εντατικά μεγέθη των μελών:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 25,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N$$

$$\Rightarrow \qquad s_1 = -30KN \qquad s_2 = 25KN \qquad s_3 = -15KN$$

- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 2 & -2.667 \\ 1.5 & -2.667 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \, m/N \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -0.225 \\ 0.600 \\ -2.067 \end{bmatrix} mm$$

- οι σχετικές μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \, m/N \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N$$

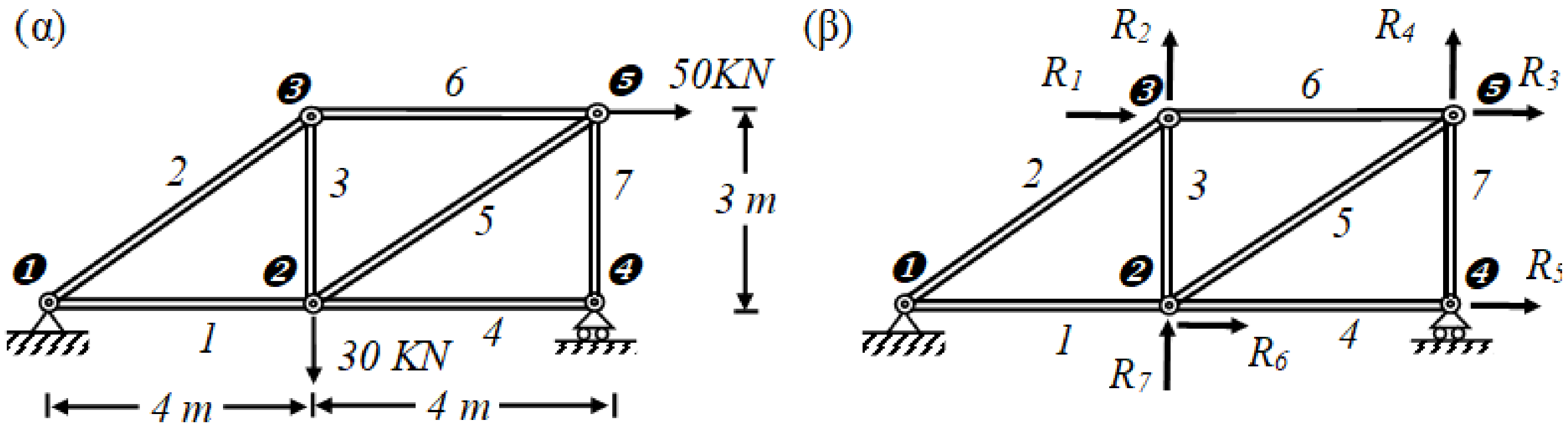
$$\Rightarrow \qquad \underline{u} = \begin{bmatrix} -0.600 \\ 0.625 \\ -0.225 \end{bmatrix} mm$$

Εντολές Matlab

```
b = [ 0  -1   4/3
      0   0  -5/3
      1   0   1];
f = [ 2   0   0
      0  2.5  0
      0   0  1.5 ] * 1e-8;
F = b' * f * b
R = [ 0  10000  -15000]';
s = b * R
U = F * R
u = f * b * R
```

Παράδειγμα-3

Η Μέθοδος Ευκαμψίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί, με τη χρήση μητρώων, το πιο κάτω δικτύωμα (Σχήμα 8.5.α), για να υπολογιστούν ουσιαστικά οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων και οι μετακινήσεις των κόμβων, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένα τα μέλη ισούται με: $\mathrm{E} = 200\,\mathrm{GPa}$ και το εμβαδόν της διατομής των ράβδων ισούται με: $\mathrm{A} = 0.002\ \mathrm{m}^2$.



Σχήμα 8.5: (α) δικτύωμα (β) εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις $\mathrm{R_i}$ *(* $\mathrm{i} = 1, 2, 3, \ldots, 7$ *).*

Έτσι, μπορούμε να σχηματίσουμε το γενικό μητρώο ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}^*$:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m / N}$$

Ο φορέας στην περίπτωση αυτή έχει επτά δυνατές φορτίσεις (Σχήμα 8.5.β) και για τον υπολογισμό του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$, ασκούμε διαδοχικά μοναδιαία δυνατή δύναμη, διατηρώντας τις άλλες επικόμβιες δυνάμεις μηδενικές και υπολογίζουμε τις αξονικές δυνάμεις:

Περίπτωση $\underline{i = 1, 2, 3, \ldots 7}$	$\underline{s_1}$	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$R_1 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 1 \;\; R_i = 0$	1/2	5/8	−3/8	0	5/8	−1/2	−3/8
$R_2 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 2 \;\; R_i = 0$	−2/3	5/6	1/2	0	−5/6	2/3	1/2
$R_3 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 3 \;\; R_i = 0$	1/2	5/8	−3/8	0	5/8	1/2	−3/8
$R_4 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 4 \;\; R_i = 0$	0	0	0	0	0	0	1
$R_5 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 5 \;\; R_i = 0$	1	0	0	1	0	0	0
$R_6 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 6 \;\; R_i = 0$	1	0	0	0	0	0	0
$R_7 = 1.0\,N \;\forall\; i \neq 7 \;\; R_i = 0$	−2/3	5/6	−1/2	0	−5/6	2/3	1/2

Από τον πιο πάνω πίνακα, μπορεί να σχηματιστεί το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2/3 & 1/2 & 0 & 1.0 & 1.0 & -2/3 \\ 5/8 & 5/6 & 5/8 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \\ -3/8 & 1/2 & -3/8 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 5/8 & -5/6 & 5/8 & 0 & 0 & 0 & -5/6 \\ -1/2 & 2/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ -3/8 & 1/2 & -3/8 & 1.0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως μπορεί να προσδιοριστεί το απόλυτο μητρώο ευκαμψίας ή ελαστικότητας της κατασκευής:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^{T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0.169 & -0.095 & 0.119 & -0.028 & 0.050 & 0.050 & -0.067 \\ -0.095 & 0.300 & -0.028 & 0.038 & -0.067 & -0.067 & 0.262 \\ 0.119 & -0.028 & 0.169 & -0.028 & 0.050 & 0.050 & 0 \\ -0.028 & 0.038 & -0.028 & 0.075 & 0 & 0 & 0.038 \\ 0.050 & -0.067 & 0.050 & 0 & 0.200 & 0.100 & -0.067 \\ 0.050 & -0.067 & 0.050 & 0 & 0.100 & 0.100 & -0.067 \\ -0.067 & 0.262 & 0 & 0.038 & -0.067 & -0.067 & 0.300 \end{bmatrix} \cdot 10^{-7}$$

Με δεδομένα τα επικόμβια φορτία $\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50{,}000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30{,}000 \end{bmatrix}$ N μπορούν να υπολογισθούν:

- τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

$$\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 45.00 & 6.25 & -3.75 & 0 & 56.25 & 5.00 & -33.75 \end{bmatrix}^T \text{ KN}$$

- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0.79 & -0.93 & 0.84 & -0.25 & 0.45 & 0.45 & -0.90 \end{bmatrix}^T \text{ mm}$$

- οι παραμορφώσεις των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.08 & -0.03 & 0 & 0.70 & 0.05 & -0.25 \end{bmatrix}^T \text{ mm}$$

Εντολές *Matlab*

```
L = [ 4   5   3   4   5   4   3 ] ;
AE=0.002 * 200e9;
b= [ 1/2  -2/3   1/2  0  1  1  -2/3
      5/8   5/6   5/8   0  0  0    5/6
     -3/8   1/2  -3/8   0  0  0  -1/2
       0      0      0     0  1  0     0
      5/8  -5/6   5/8   0  0  0  -5/6
     -1/2   2/3   1/2   0  0  0    2/3
     -3/8   1/2  -3/8   1  0  0   1/2];
[rows_b columns_b]=size(b);
f=zeros(rows_b);
for i=1:rows_b
    f(i,i)=L(i)/AE;
end
```

```
R=zeros(columns_b,1) ;
R(3)=50000;
R(7)=-30000;
s=b*R
F=b'*f*b;
U=F*R
u=f*b*R
```

Ανάλυση υπερστατικών δικτυωμάτων με τη Μέθοδο Ευκαμψίας

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της Μεθόδου Ευκαμψίας, είναι ότι η διαδικασία που ακολουθείται όταν ο φορέας είναι υπερστατικός είναι διαφορετική από τη διαδικασία που ακολουθείται όταν ο φορέας είναι ισοστατικός, την οποία είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την περίπτωση ισοστατικών δικτυωμάτων.

Συγκεκριμένα, αντίστοιχα με τη διαδικασία που ακολουθείται κατά την αναλυτική εφαρμογή της Μεθόδου των Δυνάμεων, πρέπει νοητά να εφαρμοσθούν κάποιες ελευθερίες στο φορέα ώστε να καταστεί ο φορέας ισοστατικός αλλά με την προϋπόθεση να παραμείνει απαραίτητα σταθερός.

Έτσι, για την επίλυση ενός υπερστατικού φορέα με βαθμό στατικής αοριστίας N, διακρίνουμε N διαφορετικά συστήματα. Το ‘σύστημα-0’ αντιστοιχεί στον ισοστατικό φορέα ο οποίος προκύπτει μηδενίζοντας τα πλεονάζοντα υπερστατικά μεγέθη, ενώ τα συστήματα 1, 2, …, N προκύπτουν από τον ισοστατικό φορέα χωρίς κανένα εξωτερικό φορτίο, αλλά μόνο με μοναδιαίο το αντίστοιχο υπερστατικό μέγεθος X_1, X_2, …, ή X_N.

Παρομοίως με τη Μέθοδο Ευκαμψίας για ισοστατικούς φορείς, αφού υπολογίσουμε τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας $\underline{\mathcal{F}}_i$ των μελών του δικτυώματος, μπορούμε να ορίσουμε το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο αποτελείται από τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας όλων των ράβδων του δικτυώματος:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_1 & & & & \\ & \underline{\mathcal{F}}_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & \underline{\mathcal{F}}_N \end{bmatrix} \quad \text{όπου:} \quad \mathcal{F}_i = \frac{L_i}{A_i \cdot E_i}, \quad \underline{u}_i = \Delta L_i, \quad s_i = N_i$$

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων $u_i = \Delta L_i$ με τις αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις $s_i = N_i$ των ράβδων.

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & & & & \\ & \mathcal{F}_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & \mathcal{F}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ s_N \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, αφού εφαρμοσθούν κατάλληλες ελευθερίες στο φορέα, ώστε να καταστεί ισοστατικός και σταθερός, καθορίζονται τα αντίστοιχα συστήματα- 0 , 1, 2 , …., N βάσει των οποίων προσδιορίζονται τα μητρώα μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ και $\underline{b}_x$. Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, ενώ το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$ συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών. Συνεπώς, τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα $\underline{s}$ μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των επικόμβιων εξωτερικών φορτίων $\underline{R}$ και των υπερστατικών μεγεθών $\underline{X}$:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X}$$

Αρχή δυνατών συμπληρωματικών έργων και μέθοδος ευκαμψίας για υπερστατικά δικτυώματα

Εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο:

Εφαρμόζοντας δυνατά φορτία δR_1, $\delta R_2, \ldots, \delta R_M$, δX_1, $\delta X_2, \ldots, \delta X_N$ το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο δW_E^c ισούται με:

$$\delta W_E^c = \begin{bmatrix} \delta \underline{R}^T & \delta \underline{X}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta R_1 & \delta R_2 & .. & \delta R_M & \delta X_1 & \delta X_2 & .. & \delta X_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_{M+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \underline{R}^T & \delta \underline{X}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix}$$

Αρχή δυνατών συμπληρωματικών έργων και μέθοδος ευκαμψίας για υπερστατικά δικτυώματα

Εσωτερική δυνατή συμπληρωματική ελαστική ενέργεια :

Αντίστοιχα η εσωτερική δυνατή συμπληρωματική ελαστική ενέργεια δU^c, ισούται με:

$$\delta U^c = \begin{bmatrix} \delta s_1 & \delta s_2 & . & . & \delta s_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \delta \underline{s}^T \cdot \underline{u}$$

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0 & \underline{b}_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{X} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \delta \underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \delta \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \delta \underline{X} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{s}^T = \begin{bmatrix} \delta \underline{R}^T & \delta \underline{X}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_0^T \\ \underline{b}_x^T \end{bmatrix}$$

Βάσει της ΑΔΕ το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο δW_E^c πρέπει να ισούται με την εσωτερική δυνατή συμπληρωματική ελαστική ενέργεια δU^c :

$$\delta W_E^c = \delta U^c$$

$$\Rightarrow \quad \delta \underline{R}^T \cdot \underline{U} = \delta \underline{s}^T \cdot \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{R}^T & \delta \underline{X}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \underline{R}^T & \delta \underline{X}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_0{}^T \\ \underline{b}_x{}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{u}$$

Για να ισχύει η πιο πάνω σχέση για οποιαδήποτε δυνατή φόρτιση πρέπει:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0{}^T \\ \underline{b}_x{}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{u}$$

όπου $\underline{U}_0$ και $\underline{U}_x$ είναι αντίστοιχα, οι άγνωστες μετακινήσεις κόμβων και τα χάσματα τα οποία δημιουργούνται στις νοητές ελευθερίες όπου ορίστηκαν υπερστατικά μεγέθη:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0{}^T \\ \underline{b}_x{}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0{}^T \\ \underline{b}_x{}^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_0 & \underline{b}_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{X} \end{bmatrix}$$

Εάν οι σχετικές μετακινήσεις στα χάσματα τα οποία αντιστοιχούν στα υπερστατικά μεγέθη και τις νοητά εισαχθείσες ελευθερίες είναι μηδενικές τότε $\underline{U}_x = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0^{\,T} \\ \underline{b}_x^{\,T} \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \begin{bmatrix} \underline{b}_0 & \underline{b}_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{X} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0\right) & \left(\underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x\right) \\ \left(\underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0\right) & \left(\underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{00} & \underline{F}_{0x} \\ \underline{F}_{x0} & \underline{F}_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R} \\ \underline{X} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{X} = -\underline{F}_{xx}^{\ -1} \cdot \underline{F}_{x0} \cdot \underline{R}$$

Αφού υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ μπορούν να υπολογιστούν και οι μετακινήσεις των κόμβων και τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών:

$$\underline{U} = \underline{F}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{F}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{F}_{00} - \underline{F}_{0x} \cdot \underline{F}_{xx}^{\ -1} \cdot \underline{F}_{x0}\right) \cdot \underline{R}$$

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{F}_{xx}^{\ -1} \cdot \underline{F}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \underline{b} \cdot \underline{R}$$

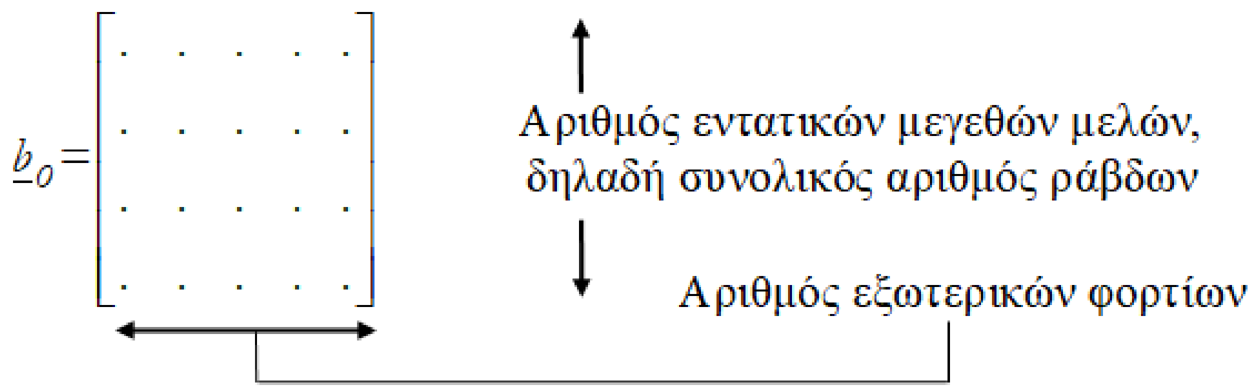
Διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού δικτυώματος

Έτσι η διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού δικτυώματος με τη Μέθοδο της Ευκαμψίας συνοψίζεται στα πιο κάτω βήματα τα οποία μπορούν συστηματικά να ακολουθηθούν ακόμη και σε γενικότερες περιπτώσεις κατασκευών, όπως πλαισιακούς φορείς, τους οποίους θα μελετήσουμε στη συνέχεια:

- Αρίθμηση όλων των μελών και καθορισμός των εντατικών τους μεγεθών στα άκρα τους $\underline{s}_i$.
- Προσδιορισμός των σχέσεων μετακινήσεων-δυνάμεων $\underline{u}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \cdot \underline{s}_i$ για όλα τα μέλη, δηλαδή καθορισμός του μητρώου ευκαμψίας του κάθε μέλους.
- Σχηματισμός του γενικού μητρώου $\underline{\mathcal{F}}^*$ με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας, που συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$.
- Καθορισμός κατάλληλων N υπερστατικών μεγεθών $\underline{X}$, με προσθήκη των αντίστοιχων N ελευθεριών, ώστε ο ισοστατικός φορέας που προκύπτει να είναι και σταθερός.

Διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού δικτυώματος

- Προσδιορισμός του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$, με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών. Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο εξωτερικό φορτίο R_i, ένα κάθε φορά μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και όλα τα υπερστατικά μεγέθη, ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$.



Διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού δικτυώματος

- Προσδιορισμός του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών. Το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$ υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_i, ένα κάθε φορά μηδενίζοντας όλα τα εξωτερικά φορτία και τα υπόλοιπα υπερστατικά μεγέθη, ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη στήλη i του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$.

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Αριθμός εντατικών μεγεθών μελών, δηλαδή συνολικός αριθμός ράβδων

Αριθμός υπερστατικών μεγεθών

Διαδικασία επίλυσης ενός υπερστατικού δικτυώματος

- Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{F}_{00} = \underline{b}_0^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0$$

$$\underline{F}_{x0} = \underline{b}_x^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0$$

$$\underline{F}_{0x} = \underline{b}_0^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x$$

$$\underline{F}_{xx} = \underline{b}_x^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x$$

- Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη Συνθήκη Συμβιβαστότητας των Μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{X} = -\underline{F}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{F}_{x0} \cdot \underline{R}$$

- Στη συνέχεια, έχοντας υπολογίσει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{F}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{F}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{F}_{00} - \underline{F}_{0x} \cdot \underline{F}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{F}_{x0}\right) \cdot \underline{R}$$

- Ακολούθως, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{F}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{F}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \underline{b} \cdot \underline{R}$$

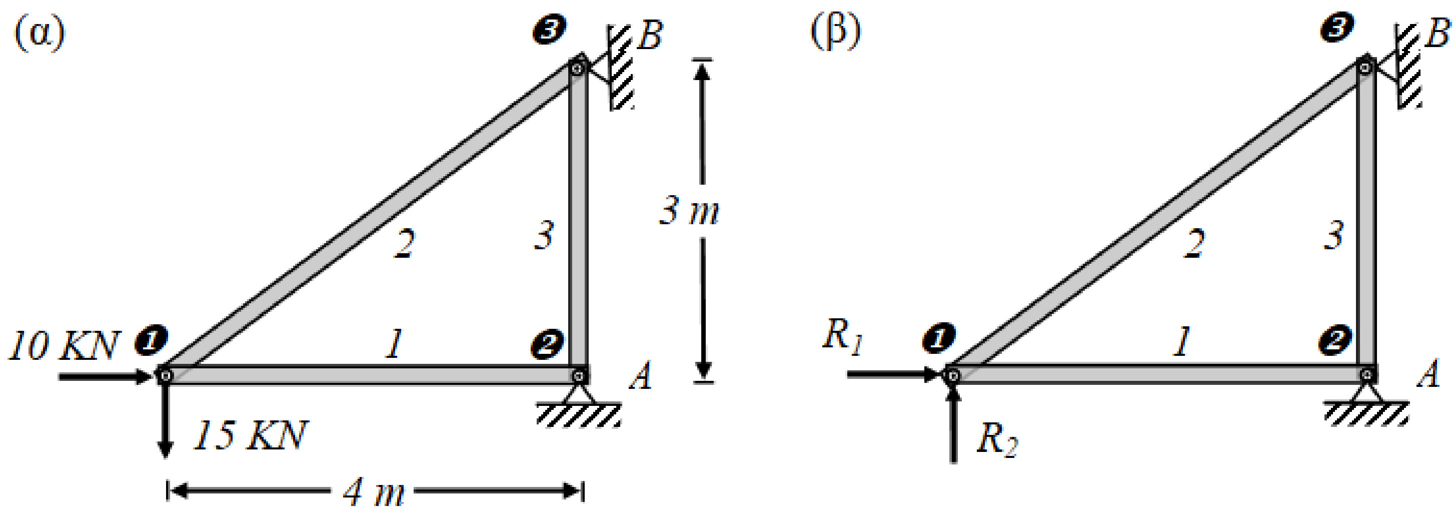
όπου $\underline{b} = \underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{F}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{F}_{x0}$

- Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s}$$

Παράδειγμα-4

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων και οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 8.6.α) με τη Μέθοδο Ευκαμψίας, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας ισούται με $E = 200$ GPA και το εμβαδόν της διατομής των ράβδων ισούται με $A = 0.001\text{m}^2$.



Σχήμα 8.6: (α) δικτύωμα (β) αρίθμηση δικτυώματος με εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Αφού γίνει αρίθμηση όλων των μελών και κόμβων (Σχήμα 8.6.β), καθορίζονται τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών s_i, που σε αυτή τη περίπτωση του δικτυώματος είναι απλά οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων, $s_1 = N_1$, $s_2 = N_2$ και $s_3 = N_3$. Ακολούθως, προσδιορίζουμε τα μητρώα ευκαμψίας για όλα τα μέλη, τα οποία σε αυτή την περίπτωση είναι απλά στοιχεία:

$$\underline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i = \frac{L_i}{A_i \cdot E_i}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1 = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{4\,\mathrm{m}}{0.001\,\mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}^2} = 2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

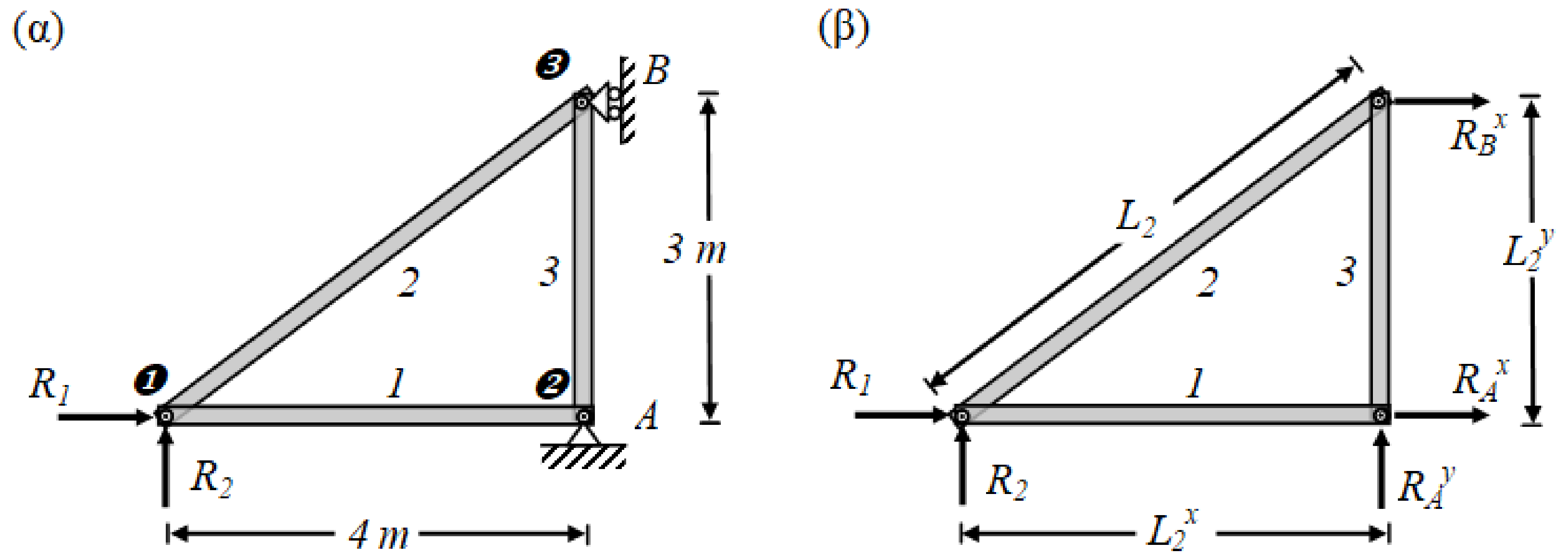
$$\underline{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{F}_2 = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{5\,\mathrm{m}}{0.001\,\mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}^2} = 2.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_3 = \mathcal{F}_3 = \frac{L_3}{A_3 \cdot E_3} = \frac{3\,\mathrm{m}}{0.001\,\mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}^2} = 1.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

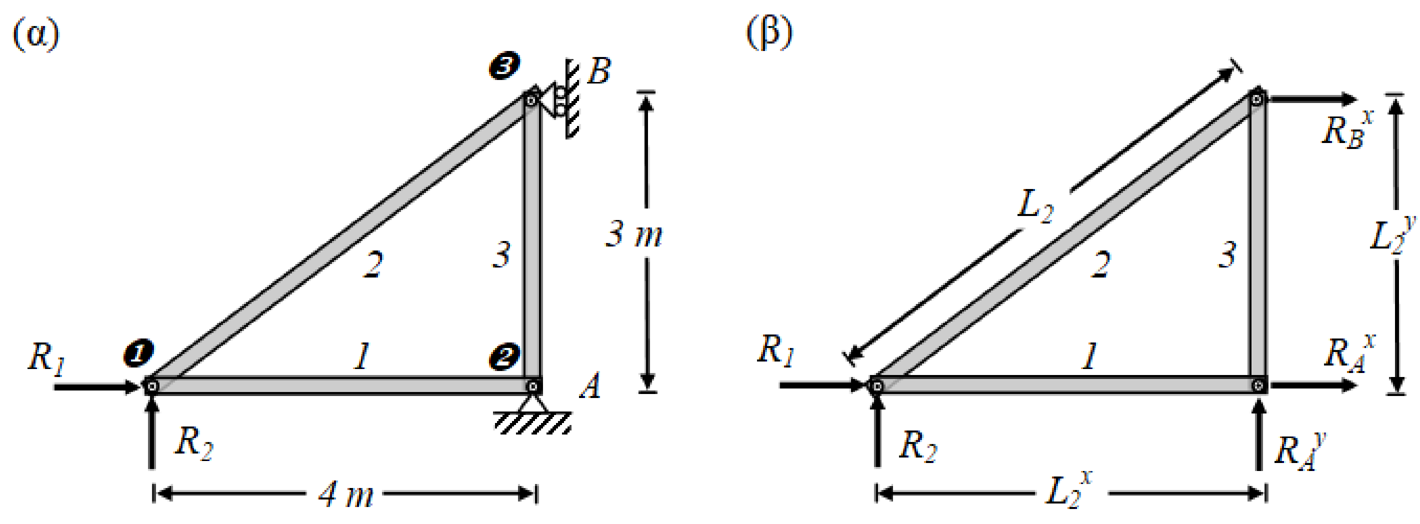
Έτσι, μπορούμε να σχηματίσουμε το γενικό μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$.

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

- καθορισμός υπερστατικού μεγέθους ώστε να προκύψει ισοστατικός σταθερός φορέας (η άρθρωση γίνεται κύλιση)

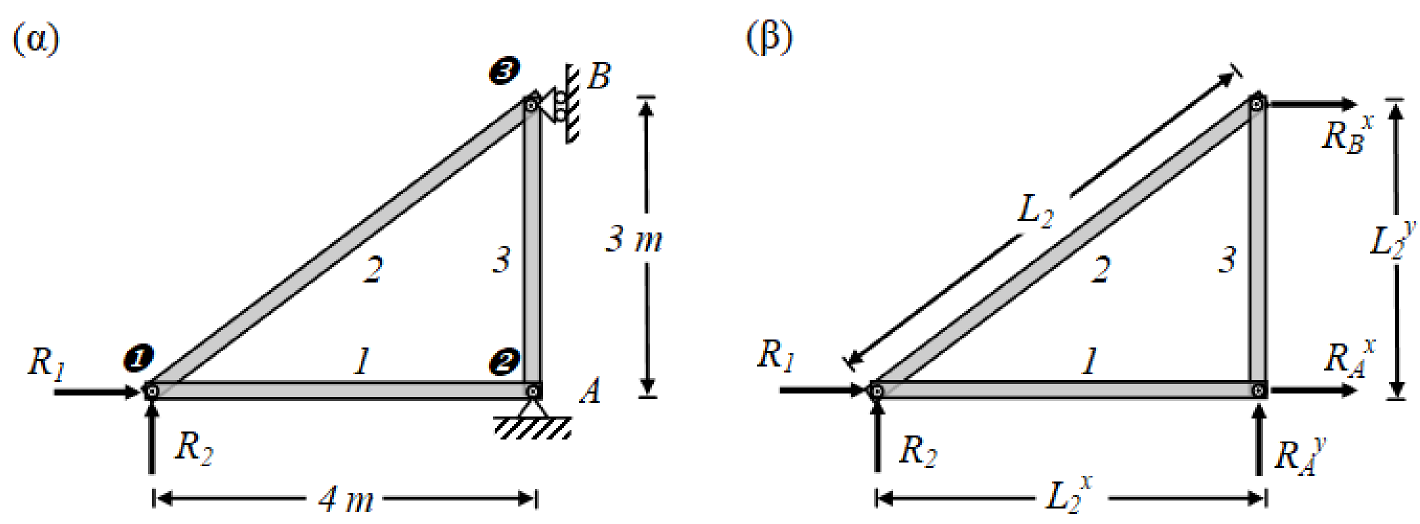


Σχήμα 8.7: (α) Ισοστατικό σύστημα-0 δικτυώματος (β) ΔΕΣ με εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.



Έχοντας καθορίσει το υπερστατικό μέγεθος X_1 με προσθήκη της αντίστοιχης ελευθερίας προκύπτει σταθερός ισοστατικός φορέας (Σχήμα 8.7.α). Στη συνέχεια, επιβάλλοντας μια κάθε φορά μοναδιαία επικόμβια δύναμη R_i, όπου $i = 1, 2$ (Σχήμα 8.7.β) και μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και το υπερστατικό μέγεθος προσδιορίζουμε το μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις R, με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών ($\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X}$):

$$\underline{b}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 4/3 \\ 0 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ακολούθως, προσδιορίζεται το μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, το οποίο υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_i, όπου $i=1$ και μηδενίζοντας όλα τα εξωτερικά φορτία και τα υπόλοιπα υπερστατικά μεγέθη (Σχήμα 8.8.α-β), ώστε να υπολογιστεί η αντίστοιχη στήλη του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο σε αυτή τη περίπτωση έχει μια μόνο στήλη.

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -2.667 \\ -2.667 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x{}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = 1.5 \cdot 10^{-8}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη Συνθήκη Συμβιβαστότητας των Μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = 15{,}000\,\mathrm{N} = 15\,\mathrm{KN}$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{00} - \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0.00060 \\ -0.00184 \end{bmatrix} \mathrm{m} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -1.84 \end{bmatrix} \mathrm{mm}$$

Επίσης, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 25,000 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{N} = \begin{bmatrix} -30 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{KN}$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις στα άκρα του φορέα:

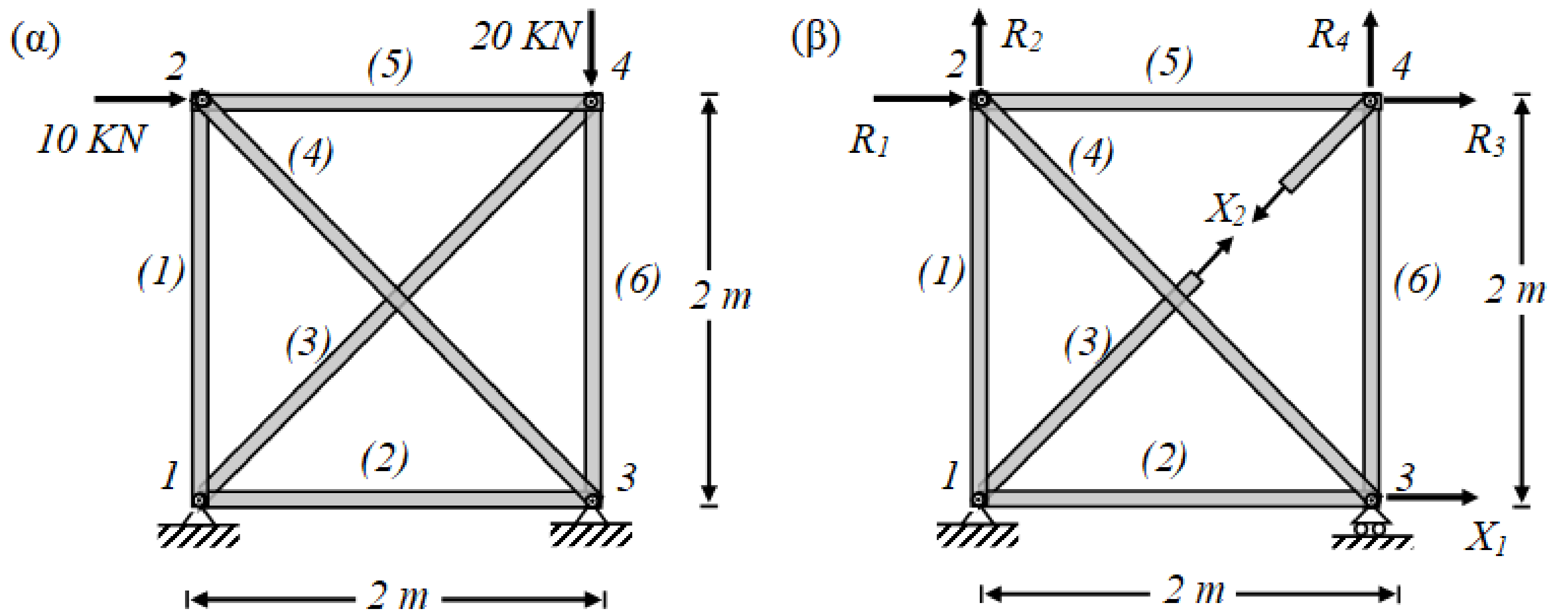
$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ 0.000625 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m} = \begin{bmatrix} -0.600 \\ 0.625 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{mm}$$

Εντολές Matlab

```
f = [ 2   0    0
      0  2.5   0
      0   0   1.5 ] * 1e-8
b0 = [ -1   4/3
        0  -5/3
        0    1 ]
bX = [ 0  0  1 ]'
F00 = b0' * f * b0
F0X = b0' * f * bX
FX0 = bX' * f * b0
FXX = bX' * f * bX
R = [ 10000  -15000 ]'
X = -inv(FXX) * FX0 * R
U = F00 * R + F0X * X
s = b0 * R + bX * X
u= f * s
```

Παράδειγμα-5

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων και οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 8.9.α), το οποίο είναι τόσο εσωτερικά όσο και εξωτερικά υπερστατικό, με τη *Μέθοδο Ευκαμψίας*, θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ισούται με $E = 200 \text{ GPA}$ και το εμβαδόν της διατομής όλων των ράβδων ισούται με $A = 0.001 \text{ m}^2$.



Σχήμα 8.9: (α) Υπερστατικό δικτύωμα (β) εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις και υπερστατικά μεγέθη.

Έχοντας κάνει αρίθμηση όλων των μελών και κόμβων (Σχήμα 8.9.β), καθορίζονται οι αντίστοιχες με τις ράβδους αξονικές δυνάμεις, $s_i = N_i$ (όπου $i = 1, 2, \ldots, 6$). Ακολούθως, προσδιορίζουμε τα μητρώα ευκαμψίας για όλα τα μέλη, τα οποία σε αυτή την περίπτωση είναι απλά στοιχεία:

$$\underline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i = \frac{L_i}{A_i \cdot E_i}$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_6 = \frac{2\,\mathrm{m}}{0.001\,\mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}^2} = 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{m}}{0.001\,\mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}^2} = 1.414 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

Έτσι, μπορούμε να σχηματίσουμε το γενικό μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$.

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & & & & & \\ & \mathcal{F}_2 & & & & \\ & & \mathcal{F}_3 & & & \\ & & & \mathcal{F}_4 & & \\ & & & & \mathcal{F}_5 & \\ & & & & & \mathcal{F}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1.414 & & & \\ & & & 1.414 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

Έχοντας καθορίσει τα υπερστατικά μεγέθη X_1 και X_2 (Σχήμα 8.9.β) με προσθήκη των αντίστοιχων ελευθεριών προκύπτει σταθερός ισοστατικός φορέας.

Στη συνέχεια, επιβάλλοντας μια κάθε φορά μοναδιαία επικόμβια δύναμη R_i, όπου $i = 1, 2, 3, 4$ και μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και όλα τα υπερστατικά μεγέθη προσδιορίζουμε το μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις R, με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών ($\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X}$):

$$\underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ακολουθεί ο προσδιορισμός του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$, το οποίο συνδέει τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των ράβδων, το οποίο υπολογίζεται ασκώντας μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_i , όπου $i = 1, 2$ και μηδενίζοντας όλα τα εξωτερικά φορτία και τα υπόλοιπα υπερστατικά μεγέθη:

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 4.828 & 1 & 4.828 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4.828 & 1 & 5.828 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & -3.414 \\ 0 & -0.707 \\ 1 & -4.121 \\ 0 & -0.707 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3.414 & -0.707 & -4.121 & -0.707 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & -0.707 \\ -0.707 & 4.828 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη συνθήκη συμβιβαστότητας των μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}^T \text{KN} = \begin{bmatrix} 10,000 & 0 & 0 & -20,000 \end{bmatrix}^T \text{N}$$

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -7887.9 \\ 2987.0 \end{bmatrix} \text{N} = \begin{bmatrix} -7.8879 \\ 2.987 \end{bmatrix} \text{KN}$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{00} - \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0.3020 \\ 0.0789 \\ 0.2809 \\ -0.2211 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Επίσης, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 7888 \\ 0 \\ 2987 \\ -11155 \\ -2112 \\ -22112 \end{bmatrix} \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 7.888 \\ 0 \\ 2.987 \\ -11.155 \\ -2.112 \\ -22.112 \end{bmatrix} \mathrm{KN}$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} 0.0789 \\ 0 \\ 0.0422 \\ -0.1578 \\ -0.0211 \\ -0.2211 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \ \mathrm{m} = \begin{bmatrix} 0.0789 \\ 0 \\ 0.0422 \\ -0.1578 \\ -0.0211 \\ -0.2211 \end{bmatrix} \mathrm{mm}$$

Εντολές *Matlab*

```
f = zeros(6,6);
A=0.001,   E=200E9;
f(1,1)=2/(A*E);   f(2,2)=2/(A*E);
f(3,3)=2*sqrt(2)/(A*E);
f(4,4)=2*sqrt(2)/(A*E);
f(5,5)=2/(A*E);  f(6,6)=2/(A*E);

b0 = [ 1      1      1     0
       1      0      1     0
       0      0      0     0
  -sqrt(2)  0  -sqrt(2)  0
       0      0      1     0
       0      0      0     1 ]
```

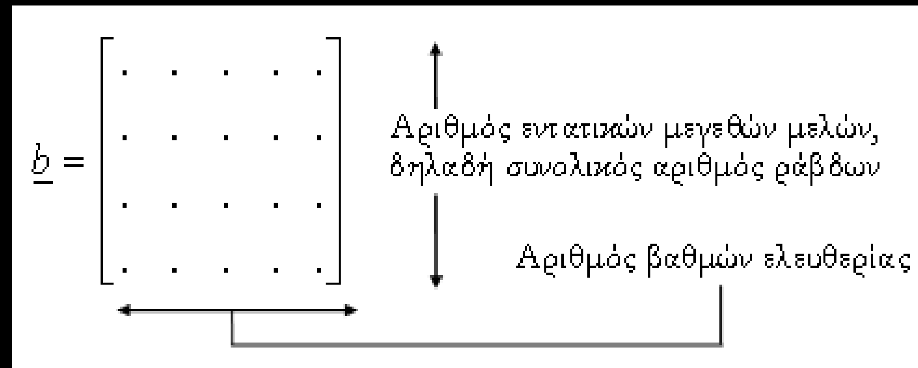
```
bX = [   0     -sqrt(2)/2
         1     -sqrt(2)/2
         0         1
         0         1
         0     -sqrt(2)/2
         0     -sqrt(2)/2  ]
F00 = b0' * f * b0
F0X = b0' * f * bX
FX0 = bX' * f * b0
FXX = bX' * f * bX
R = [10000  0  0  -20000]'
X = -inv(FXX) * FX0 * R
U = F00 * R + F0X * X
s = b0 * R + bX * X
u= f * s
```

Χρήση συνολικών μητρώων

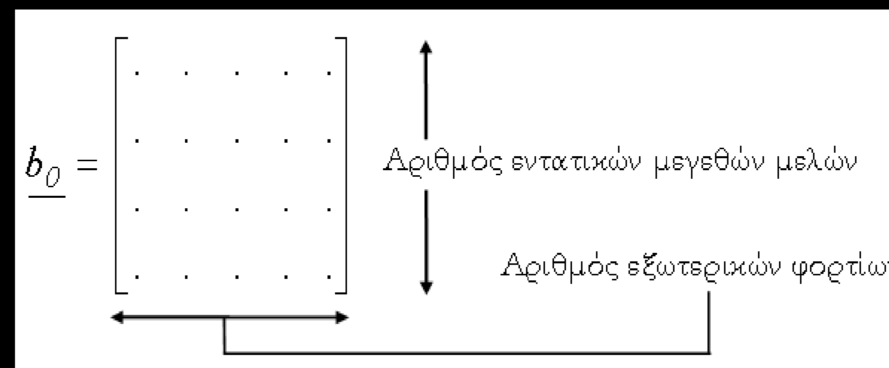
- Λαμβάνονται υπόψη όλοι οι βαθμοί ελευθερίας
  - Απαιτούνται συνήθως περισσότεροι υπολογισμοί για να επιλυθεί ο φορέας για μία φόρτιση, αλλά λιγότεροι αν ο φορέας πρέπει να επιλυθεί για διάφορες φορτίσεις ή όταν απαιτούνται μετακινήσεις διαφορετικές από αυτές που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες εξωτερικά επιβαλλόμενες επικόμβιες φορτίσεις
- Το μητρώο ευκαμψίας που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί για:
  - να επιλυθεί ο φορέας για κάθε δυνατή φόρτιση
  - να υπολογισθεί μετακίνηση για οποιοδήποτε βαθμό ελευθερίας

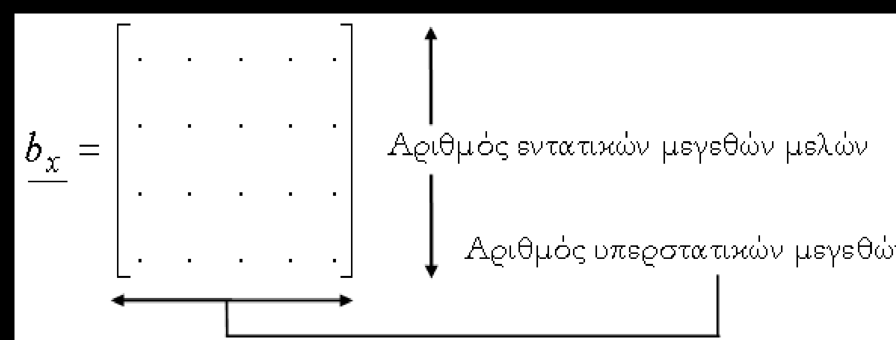
Συνολικά μητρώα μετασχηματισμού:

- Ισοστατικά δικτυώματα:



- Υπερστατικά δικτυώματα:





Χρήση συμπυκνωμένων μητρώων

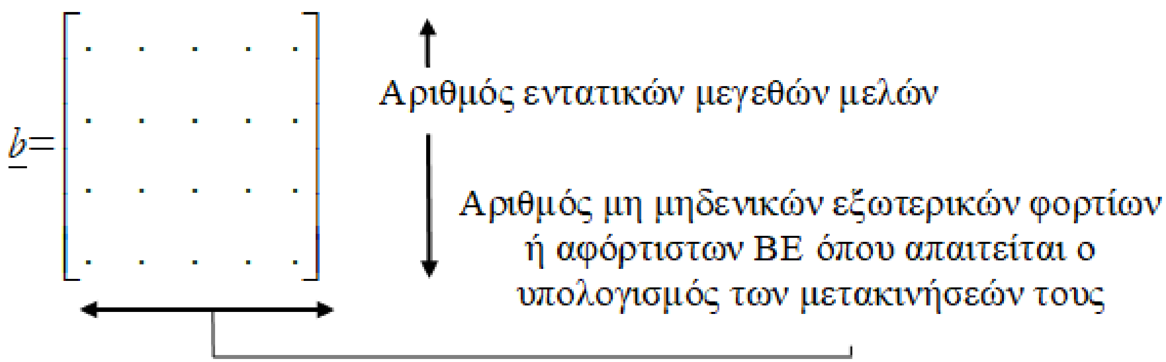
- Λαμβάνονται υπόψη μόνο οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία ή όπου απαιτείται υπολογισμός μετακινήσεων
  - Απαιτούνται συνήθως λιγότεροι υπολογισμοί για να επιλυθεί ο φορέας για μία συγκεκριμένη φόρτιση, ειδικά αν δεν απαιτούνται μετακινήσεις διαφορετικές από αυτές που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες εξωτερικά επιβαλλόμενες επικόμβιες φορτίσεις

- Το μητρώο ευκαμψίας που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί:
  - για να επιλυθεί ο φορέας μόνο για τη συγκεκριμένη φόρτιση
  - να υπολογισθούν μόνο μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας που λήφθηκαν υπόψη

Χρήση συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού:

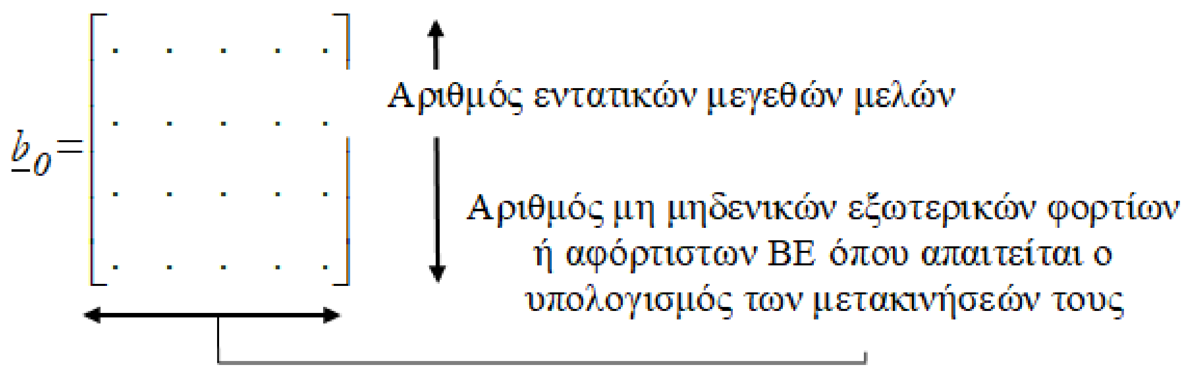
Δηλαδή, με τη χρήση τέτοιων συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού μπορούν να υπολογιστούν μόνο οι μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας όπου αντιστοιχούν εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία $\underline{R}$, τα οποία λαμβάνονται υπόψη στο σχηματισμό των μητρώων μετασχηματισμού, ή σε επιπλέον αφόρτιστους βαθμούς ελευθερίας που σκόπιμα λήφθηκαν υπόψη κατά το σχηματισμό του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}$.

Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό ενός ισοστατικού δικτυώματος μπορεί να προσδιοριστεί το *συμπυκνωμένο* μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, έτσι ώστε να συνδέει μόνο τις μη μηδενικές επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$.



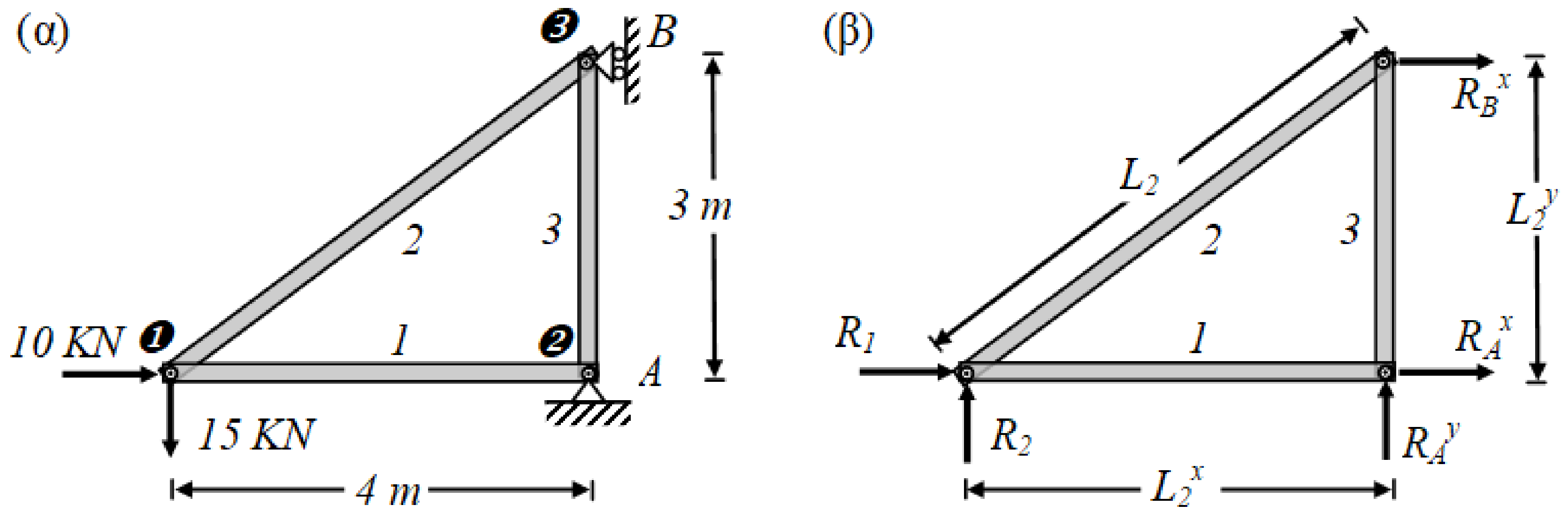
Χρήση συμπυκνωμένων μητρώων μετασχηματισμού:

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό ενός υπερστατικού δικτυώματος μπορεί να προσδιοριστεί το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ έτσι ώστε να συνδέει μόνο τις μη μηδενικές επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις αντίστοιχες δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, $\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X}$.



Παράδειγμα-6: Ανάλυση ισοστατικού δικτυώματος με συμπυκνωμένα μητρώα μετασχηματισμού

Το δικτύωμα στο Παράδειγμα-8.2 (Σχήμα 8.10.α), μπορεί εναλλακτικά να επιλυθεί λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις μη μηδενικές επικόμβιες φορτίσεις των 10KN και 15KN στον κόμβο ❶, παραλείποντας τη δυνατή, αλλά σε αυτή την περίπτωση μηδενική, κατακόρυφη δύναμη στον κόμβο ❸.



Σχήμα 8.10: (α) δικτύωμα (β) ΔΕΣ με εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις R_1 *και* R_2.

Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ του φορέα με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας των επιμέρους μελών παραμένει το ίδιο όπως στο Παράδειγμα-8.2:

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

Το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}$, το οποίο συνδέει τις επικόμβιες δυνάμεις $\underline{R}$ με τις δυνάμεις $\underline{s}$ στα άκρα των μελών, $\underline{s} = \underline{b} \cdot \underline{R}$, ισούται με:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 4/3 \\ 0 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4/3 \\ 0 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, μπορεί να υπολογιστεί το συμπυκνωμένο μητρώο ευκαμψίας του φορέα για τη συγκεκριμένη φόρτιση:

$$\underline{\mathcal{F}} = \underline{b}^T \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -2.6667 \\ -2.6667 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

Με δεδομένα τα επικόμβια φορτία $\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N$, μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν:

- τα εντατικά μεγέθη των μελών:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \underline{b} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -1 & 4/3 \\ 0 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4/3 \\ 0 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -30,000 \\ 25,000 \\ 15,000 \end{bmatrix} N$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = -30KN \qquad s_2 = 25KN \qquad s_3 = -15KN$$

- οι μετακινήσεις των κόμβων της κατασκευής στους βαθμούς ελευθερίας όπου υπάρχουν εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -2.6667 \\ -2.6667 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \, m/N \cdot \begin{bmatrix} 10,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{U} = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.0021 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0.600 \\ -2.067 \end{bmatrix} mm$$

- οι μετακινήσεις στα άκρα των μελών του φορέα:

$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \, m/N \cdot \begin{bmatrix} -30,000 \\ 25,000 \\ -15,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -0.600 \\ 0.625 \\ -0.225 \end{bmatrix} mm$$

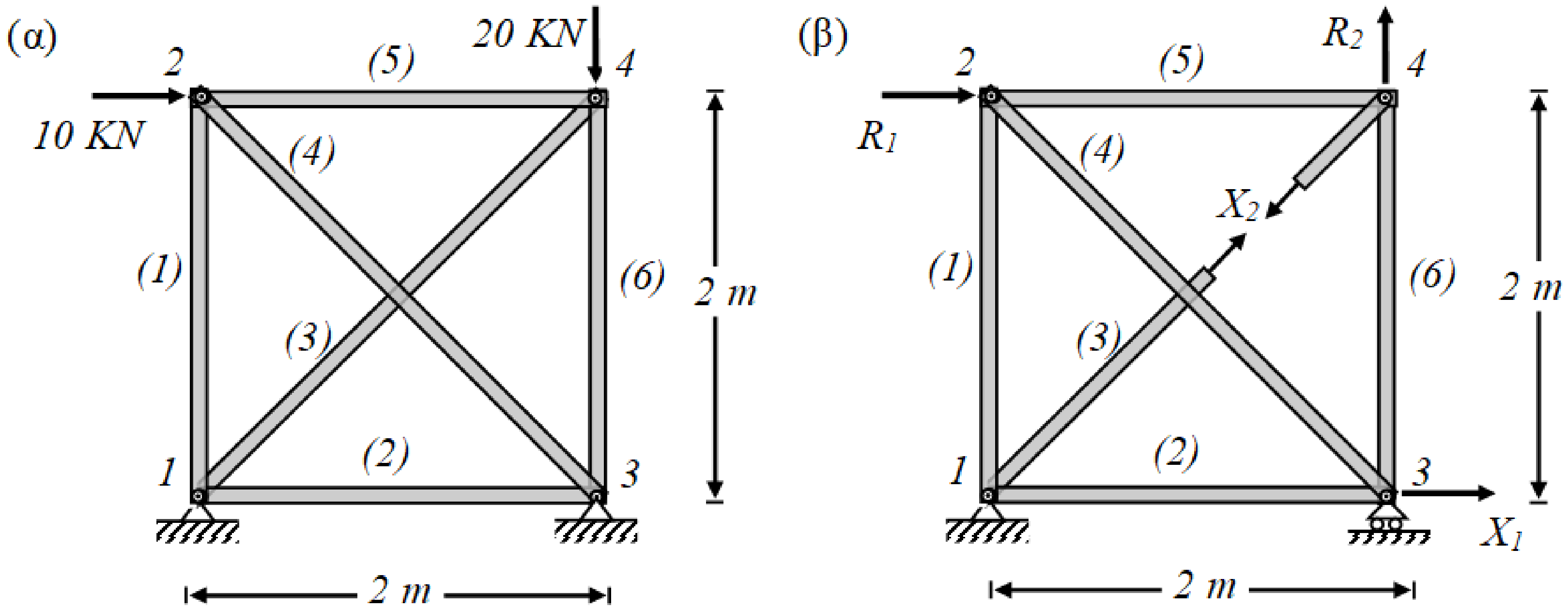
Οι πιο πάνω πράξεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με το *Matlab*:

Παράδειγμα 8.6: Εντολές *Matlab*

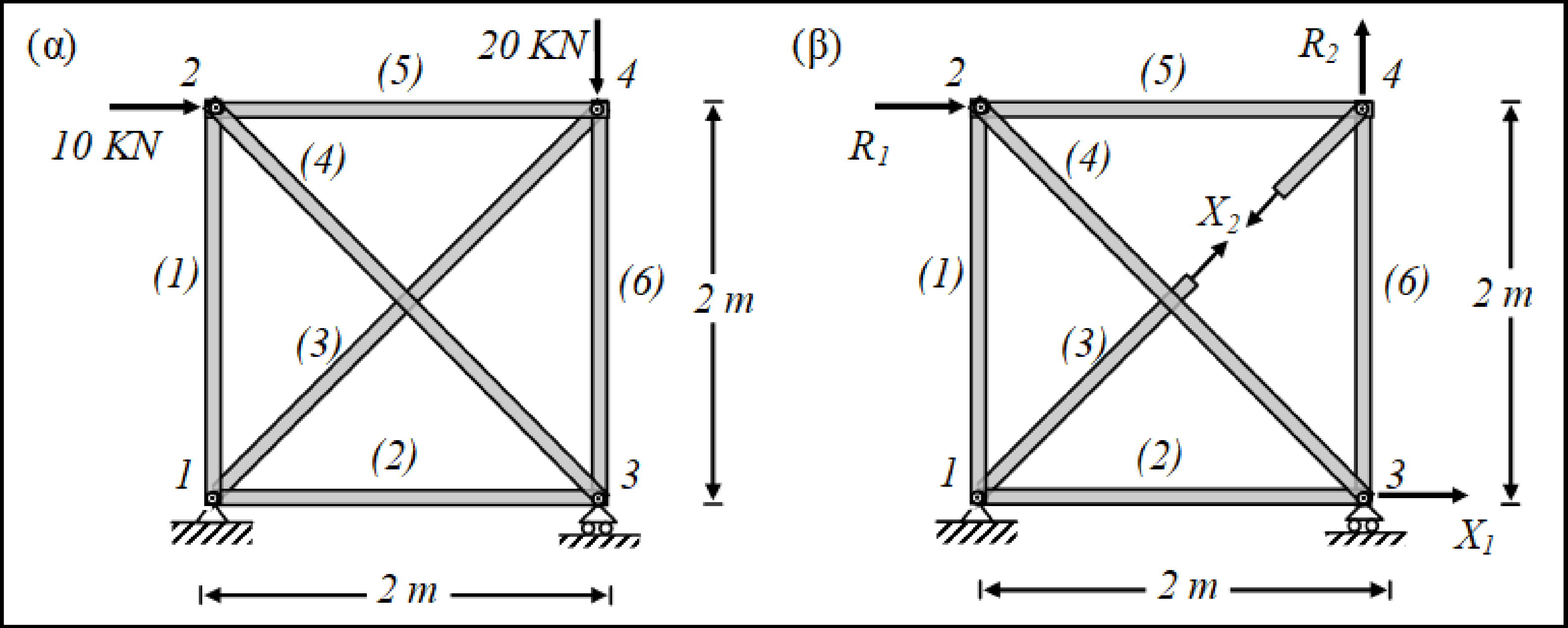
```
b = [  -1   4/3
        0  -5/3
        0    1]
f = [ 2   0    0
      0  2.5   0
      0   0   1.5 ]*1e-8
F = b'*f*b
R = [ 10000 -15000]'
s = b * R
U=F * R
u = f * b * R
```

Παράδειγμα-7: Ανάλυση ισοστατικού δικτυώματος με συμπυκνωμένα μητρώα μετασχηματισμού

Το υπερστατικό δικτύωμα στο Παράδειγμα-8.5 μπορεί εναλλακτικά να επιλυθεί για τη συγκεκριμένη φόρτιση, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τα μη μηδενικά εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία (Σχήμα 8.11.α):



Σχήμα 8.11: (α) Υπερστατικό δικτύωμα (β) εξωτερικά φορτία και υπερστατικά μεγέθη.



Το μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$, παραμένει το ίδιο.

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & & & & & \\ & \mathcal{F}_2 & & & & \\ & & \mathcal{F}_3 & & & \\ & & & \mathcal{F}_4 & & \\ & & & & \mathcal{F}_5 & \\ & & & & & \mathcal{F}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1.414 & & & \\ & & & 1.414 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

Έχοντας καθορίσει τα υπερστατικά μεγέθη X_1 και X_2 (Σχήμα 8.11.β) με προσθήκη των αντίστοιχων ελευθεριών προκύπτει σταθερός ισοστατικός φορέας. Ακολούθως, το συμπυκνωμένο μητρώο μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ μπορεί να υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις δύο μη μηδενικές εξωτερικές δυνάμεις και επιβάλλοντας μια κάθε φορά μοναδιαία επικόμβια δύναμη R_i, όπου $i = 1, 2$:

$$\underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Το μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b_x}$, προφανώς, παραμένει το ίδιο:

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 4.8284 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3.41421 & -0.70711 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & -3.41421 \\ 0 & -0.70711 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & -0.707 \\ -0.707 & 4.828 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη Συνθήκη Συμβιβαστότητας των Μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} KN = \begin{bmatrix} 10,000 \\ -20,000 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -7,887.9 \\ 2,987.0 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -7.888 \\ 2.987 \end{bmatrix} KN$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \left(\underline{\mathcal{F}}_{00} - \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 0.302 \\ -0.221 \end{bmatrix} mm$$

Επίσης, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του φορέα:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 7{,}888 \\ 0 \\ 2{,}987 \\ -11{,}155 \\ -2{,}112 \\ -22{,}112 \end{bmatrix} \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 7.888 \\ 0 \\ 2.987 \\ -11.155 \\ -2.112 \\ -22.112 \end{bmatrix} \mathrm{KN}$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις στα άκρα του φορέα:

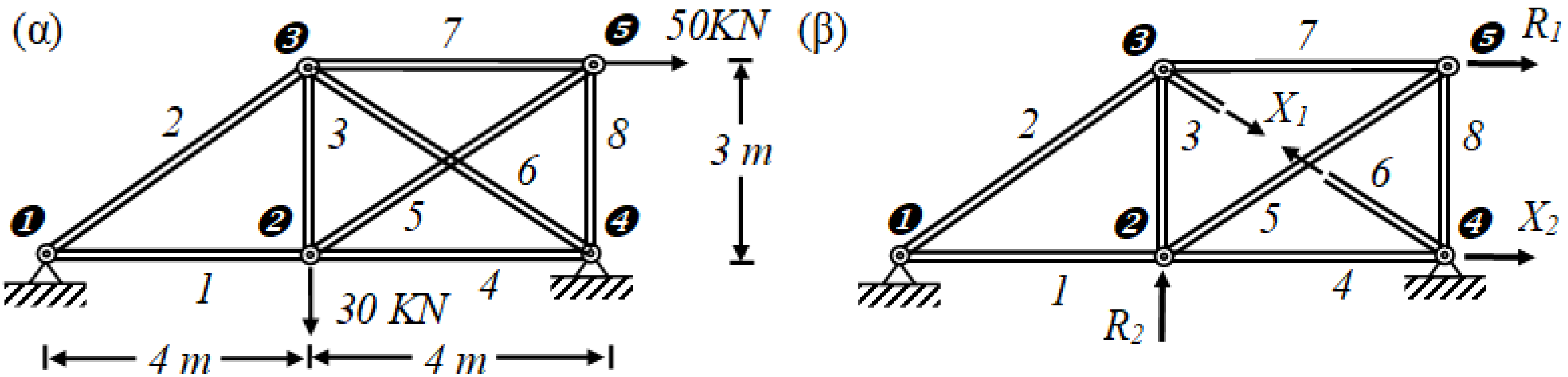
$$\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^{*} \cdot \underline{s} = \begin{bmatrix} 0.0789 \\ 0 \\ 0.0422 \\ -0.1578 \\ -0.0211 \\ -0.2211 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = \begin{bmatrix} 0.0789 \\ 0 \\ 0.0422 \\ -0.1578 \\ -0.0211 \\ -0.2211 \end{bmatrix} \mathrm{mm}$$

Εντολές Matlab

```
A = 0.001;   E = 200E9;
f = zeros(6,6);
f(1,1) = 2/(A*E);
f(2,2) = 2/(A*E);
f(3,3) = 2*sqrt(2)/(A*E);
f(4,4) = 2*sqrt(2)/(A*E);
f(5,5) = 2/(A*E);   f(6,6) = 2/(A*E);
b0 = [ 1         0
       1         0
       0         0
       -sqrt(2)  0
       0         0
       0         1]
bX = [ 0   -sqrt(2)/2
       1   -sqrt(2)/2
       0   1
       0   1
       0   -sqrt(2)/2
       0   -sqrt(2)/2 ]
F00 = b0' * f* b0
F0X = b0' * f * bX
FX0 = bX' * f * b0
FXX = bX' * f * bX
R = [ 10000
      -20000 ]
X = -inv(FXX) * FX0 * R
U = F00 * R + F0X * X
s = b0 * R + bX * X
u = f * s
```

Παράδειγμα-8:

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις των ράβδων και οι μετακινήσεις των κόμβων του πιο κάτω δικτυώματος (Σχήμα 8.12.α), στους βαθμούς ελευθερίας όπου υπάρχουν εξωτερικά επιβαλλόμενα επικόμβια φορτία με τη μέθοδο ευκαμψίας. Το δικτύωμα είναι τόσο εσωτερικά, όσο και εξωτερικά υπερστατικό, το μέτρο ελαστικότητας των ράβδων ισούται με $E = 200\,GPa$ και το εμβαδόν της διατομής με: $A = 0.002\ m^2$.



Σχήμα 8.12: (α) δικτύωμα (β) εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις και υπερστατικά μεγέθη.

Αφού γίνει αρίθμηση όλων των μελών και κόμβων, καθορίζουμε τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των μελών και ακολούθως, προσδιορίζουμε τα μητρώα ευκαμψίας για όλα τα μέλη, τα οποία και σε αυτή την περίπτωση είναι απλά στοιχεία: $\underline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i = \dfrac{L_i}{A_i \cdot E_i}$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_7 = \frac{4\,\mathrm{m}}{0.002\ \mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m}^2} = 1 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_6 = \frac{5\,\mathrm{m}}{0.002\ \mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m}^2} = 1.25 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_8 = \frac{3\,\mathrm{m}}{0.002\ \mathrm{m}^2 \cdot 200 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m}^2} = 0.75 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/N}$$

Έτσι, μπορούμε να σχηματίσουμε το γενικό μητρώο $\underline{\mathcal{F}}^*$ με όλα τα επιμέρους μητρώα ευκαμψίας, το οποίο συνδέει τις μετακινήσεις στα άκρα των ράβδων με τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, $\underline{u} = \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{s}$.

$$\underline{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/N}$$

Έχοντας καθορίσει τα υπερστατικά μεγέθη X_1 και X_2 έτσι ώστε ο φορέας που προκύπτει να είναι ισοστατικός, επιβάλλεται μια κάθε φορά, διαδοχικά, μοναδιαία επικόμβια δύναμη R_i (Σχήμα 8.12.β), μηδενίζοντας τα υπόλοιπα εξωτερικά φορτία και υπερστατικά μεγέθη για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη στήλη του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_0$. Αντίστοιχα, για προσδιορισμό του μητρώου μετασχηματισμού $\underline{b}_x$ επιβάλλεται μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος X_i (Σχήμα 8.12.β), μηδενίζοντας όλα τα εξωτερικά φόρτια και υπερστατικά μεγέθη. Από τις πιο πάνω φορτίσεις προκύπτουν οι αξονικές δυνάμεις του δικτυώματος, σύμφωνα με τον πιο κάτω πίνακα:

Περίπτωση	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
$R_1 = 1.0\,N \ \forall \ i \neq 1 \ R_i = 0$	$1/2$	$5/8$	$-3/8$	0	$5/8$	0	$1/2$	$-3/8$
$R_2 = 1.0\,N \ \forall \ i \neq 2 \ R_i = 0$	$-2/3$	$5/6$	$-1/2$	0	$-5/6$	0	$2/3$	$1/2$
$X_1 = 1.0\,N \ R_i, X_2 = 0$	0	0	$-3/5$	$-4/5$	1	1	$-4/5$	$-3/5$
$X_2 = 1.0\,N \ R_i, X_1 = 0$	1	0	0	1	0	0	0	0

Από τον πιο πάνω πίνακα προκύπτουν τα μητρώα μετασχηματισμού $\underline{b}_0$ και $\underline{b}_x$:

$$\Rightarrow \quad \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 5/8 & 5/6 \\ -3/8 & -1/2 \\ 0 & 0 \\ 5/8 & -5/6 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 2/3 \\ -3/8 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -3/5 & 0 \\ -4/5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -4/5 & 0 \\ -3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως, τα παρακάτω μητρώα μπορούν να υπολογιστούν:

$$\underline{\mathcal{F}}_{00} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 1.6875 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{0x} = \underline{b}_0^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 0.719 & 0.500 \\ -1.575 & -0.667 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{x0} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_0 = \begin{bmatrix} 0.719 & -1.575 \\ 0.500 & -0.667 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

$$\underline{\mathcal{F}}_{xx} = \underline{b}_x^{\,T} \cdot \underline{\mathcal{F}}^* \cdot \underline{b}_x = \begin{bmatrix} 4.32 & -0.80 \\ -0.80 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Έχοντας υπολογίσει τα πιο πάνω μητρώα, μπορούν να υπολογιστούν τα άγνωστα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, από την πιο κάτω σχέση που εκφράζει τη Συνθήκη Συμβιβαστότητας των Μετακινήσεων σε μητρωική μορφή:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 50,000 \\ -30,000 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 50 \\ -30 \end{bmatrix} KN$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X} = -\underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0} \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} -25,297 \\ -32,619 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} -25.297 \\ -32.619 \end{bmatrix} KN$$

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα υπερστατικά μεγέθη $\underline{X}$, μπορούν να υπολογισθούν οι μετακινήσεις των κόμβων:

$$\underline{U} = \underline{\mathcal{F}}_{00} \cdot \underline{R} + \underline{\mathcal{F}}_{0x} \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 0.499 \\ -0.284 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} m = \begin{bmatrix} 0.499 \\ -0.284 \end{bmatrix} mm$$

Τέλος, μπορούν να υπολογισθούν τα εντατικά μεγέθη στα άκρα του φορέα:

$$\underline{s} = \underline{b}_0 \cdot \underline{R} + \underline{b}_x \cdot \underline{X} = \left(\underline{b}_0 - \underline{b}_x \cdot \underline{\mathcal{F}}_{xx}{}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{x0}\right) \cdot \underline{R} = \begin{bmatrix} 12,381 \\ 6,250 \\ 11,428 \\ -12,381 \\ 30,953 \\ -25,297 \\ 25,238 \\ -18,572 \end{bmatrix} \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 12.381 \\ 6.250 \\ 11.428 \\ -12.381 \\ 30.953 \\ -25.297 \\ 25.238 \\ -18.572 \end{bmatrix} \mathrm{KN}$$

Εντολές *Matlab*

```
E=200E9;   A=0.002;
F=zeros(8,8);
F(1,1)=4/(A*E);
F(2,2)=5/(A*E);
F(3,3)=3/(A*E);
F(4,4)=4/(A*E);
F(5,5)=5/(A*E);
F(6,6)=5/(A*E);
F(7,7)=4/(A*E);
F(8,8)=3/(A*E);
b0= [ 1/2  5/8  -3/8  0  5/8  0  1/2  -3/8
      -2/3  5/6  -1/2  0  -5/6  0  2/3  1/2 ]'
```

```
bX=[ 0  0  -3/5  -4/5  1  1  -4/5  -3/5
     1  0   0     1    0  0   0     0  ]'
F00 = b0' * F * b0  ;  F0X = b0' * F * bX
FX0 = bX' * F * b0  ;  FXX = bX' * F * bX
R=[50000 -30000]'
X=-inv(FXX)*FX0*R
U=(F00-F0X*inv(FXX)*FX0)*R
s=(b0-bX*inv(FXX)*FX0)*R
```