

# ΠΠΜ 221: Ανάλυση Κατασκευών με Μητρώα

## 1. Ανασκόπηση Κλασικών Μεθόδων Ανάλυσης Κατασκευών

Εαρινό εξάμηνο 2023

*Πέτρος Κωμοδρόμος*  
*komodromos@ucy.ac.cy*

*<http://www.eng.ucy.ac.cy/petros>*

# Θέματα

- Εισαγωγή στη Στατική Ανάλυση
  - Βασικά δομικά στοιχεία
  - Είδη κατασκευών
  - Δομικά υλικά
  - Προσομοιώσεις κατασκευών
- Φορτίσεις και βαθμοί ελευθερίας
  - Φορτία και συνδυασμοί φορτίσεων
  - Βαθμοί ελευθερίας και συνοριακές συνθήκες
  - Στηρίξεις φορέων
  - Σταθερότητα και χαλαρότητα
  - Στηρίξεις
  - Συνδέσεις και εσωτερικές ελευθερίες
- Εντατικά μεγέθη και ΛΔΕ
  - ΔΕΣ και εσωτερικά εντατικά μεγέθη
  - Εξισώσεις ισορροπίας
  - Βαθμοί στατικής αοριστίας
  - Αρχή της επαλληλίας
  - Συμμετρία και αντισυμμετρία
  - Αρχή δυνατών έργων
- Ισοστατικά Δικτυώματα
  - Εισαγωγή στα
  - Τύποι δικτυωμάτων
  - Υπερστατικότητα και σταθερότητα
  - Ανάλυση δικτυωμάτων
  - Μέθοδος των κόμβων
  - Ράβδοι μηδενικής δύναμης
  - Μέθοδος των τομών
  - Χωρικά δικτυώματα
- Ισοστατικοί Δοκοί και Πλαίσια
  - Εισαγωγή στις δοκούς
  - Συνήθης τύποι δοκών
  - Εντατικά μεγέθη
  - Διαφορικές εξισώσεις δοκών
  - Διαγράμματα εντατικών μεγεθών δοκών
  - Ορθές και διατμητικές τάσεις
  - Αρχή της επαλληλίας
  - Φαινόμενα Ρ-Δ
  - Πλαίσια και πλαισιωτές κατασκευές
  - Στατικότητα δοκών και πλαισίων
  - Παραμορφωμένες μορφές

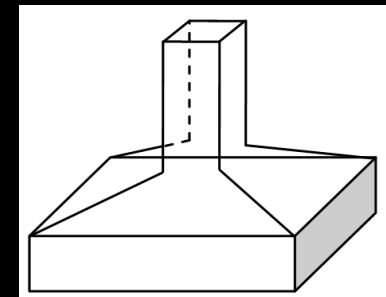
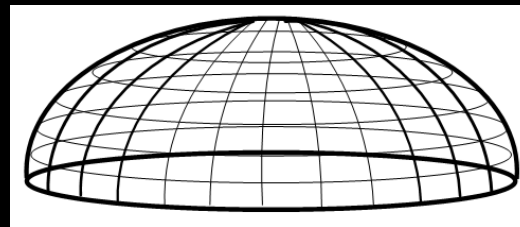
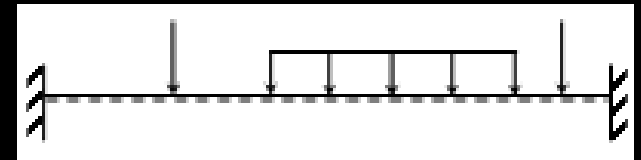
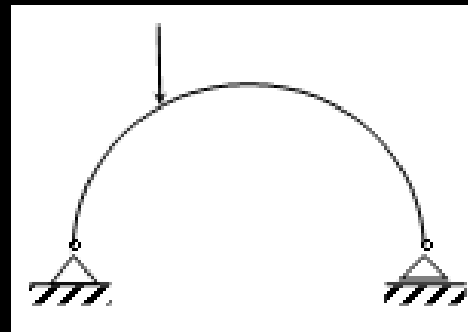
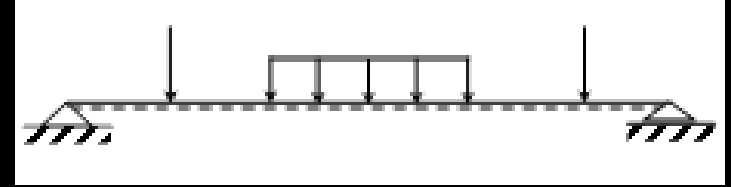
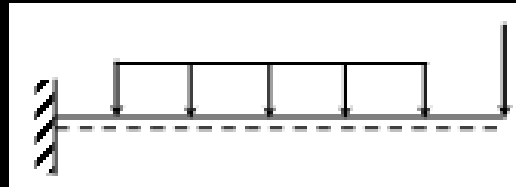


- Παραμορφώσεις και Μετακινήσεις
  - Παραμορφωμένες μορφές δοκών/πλαισίων
  - Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων
  - Συνήθης παραδοχές
  - Εισαγωγή στις παραμορφώσεις
    - Αξονικές παραμορφώσεις
    - Καμπτικές παραμορφώσεις
- Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων
  - Γεωμετρικές μέθοδοι
    - Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης
    - Μέθοδος ροπών
    - Μέθοδος ομόλογης δοκού
  - Ενεργειακές μέθοδοι
    - Αρχή διατήρησης της ενέργειας
    - Θεωρήματα Castigliano
    - Αρχή των δυνατών έργων
- Αρχή των δυνατών έργων
  - Εξωτερικό δυνατό έργο
  - Εσωτερικό δυνατό έργο (ελαστική δυνατή ενέργεια)
    - αξονικές παραμορφώσεις
    - καμπτικές παραμορφώσεις
    - διατμητικές παραμορφώσεις
    - στρεπτικές παραμορφώσεις
    - συνολική ελαστική δυνατή ενέργεια
  - Υπολογισμός μετακινήσεων
  - Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων
  - Μη πρισματικά μέλη
  - Παραμορφώσεις από άλλα, εκτός φορτίων, αίτια
    - Θερμοκρασιακές μεταβολές
    - Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα
    - Διαφορικές καθιζήσεις

- Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων: Μέθοδοι των δυνάμεων
  - Υπερστατικοί φορείς
  - Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων
  - Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων
  - Εφαρμογές σε προβλήματα μεγαλύτερου βαθμού στατικής αοριστίας
  - Θεώρημα Betti και σχέσεις αμοιβαιότητας
    - Θεώρημα αμοιβαιότητας των μετακινήσεων Maxwell-Betti
  - Εφαρμογές της συμβιβαστότητας των μετακινήσεων:
    - Δικτυώματα
    - Πλαίσια
    - Σύνθετοι φορείς
  - Προβλήματα με παραμορφώσεις από άλλα αίτια
    - Θερμοκρασιακές μεταβολές
    - Κατασκευαστικές ατέλειες
    - Μετακινήσεις στηρίξεων
  - Ελαστικές στηρίξεις

# Βασικά δομικά στοιχεία

- Ράβδοι
- Δοκοί
- Πεδιλοδοκοί
- Υποστυλώματα
- Τοιχία
- Τόξα
- Καλώδια
- Πλάκες
- Κελύφη
- Πέδιλα

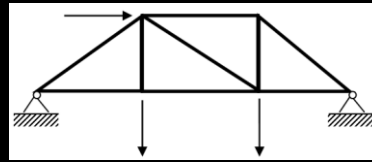


# Κατηγορίες δομικών στοιχείων

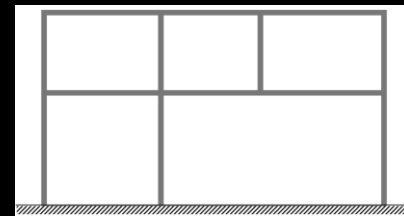
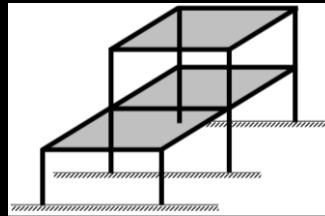
- *Γραμμικά, ή μονοδιάστατα, δομικά στοιχεία:*
  - δοκοί, υποστυλώματα, ράβδοι, πεδιλοδοκοί, τόξα, καλώδια, κ.λπ.
- *Επιφανειακά, ή δισδιάστατα, δομικά στοιχεία:*
  - πλάκες, κελύφη, δίσκοι, κλπ.
- *Χωρικά δομικά στοιχεία:*
  - πέδιλα, φράγματα, κλπ.

# Είδη κατασκευών

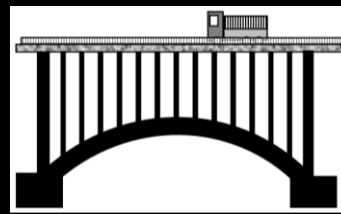
- Δικτυώματα



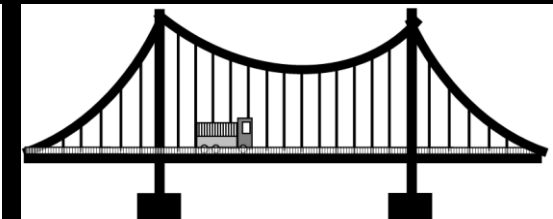
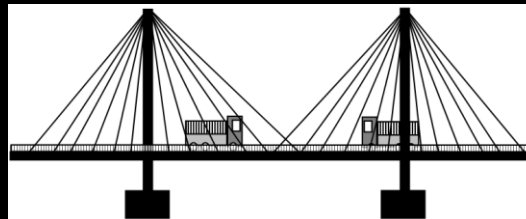
- Πλαισιακές κατασκευές



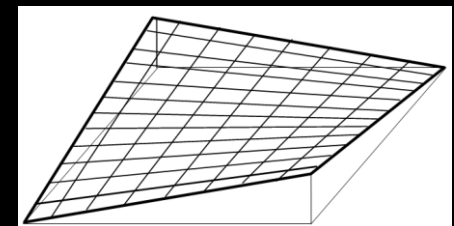
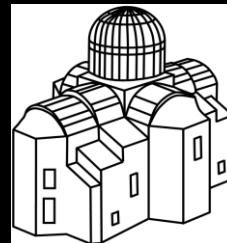
- Τοξωτές κατασκευές



- Καλωδιακές κατασκευές



- Κελυφωτές κατασκευές



# Δομικά υλικά

- Σκυρόδεμα

- + ψηλή θλιπτική αντοχή
- + ντόπιο υλικό και χαμηλό κόστος παραγωγής
- + τεχνογνωσία
- + ανθεκτικότητα σε διάρκεια και ψηλές θερμοκρασίες
- + εύκολη μόρφωση σε σχεδόν οποιοδήποτε σχήμα
- χαμηλή εφελκυστική αντοχή
- ψαθυρότητα

- Χάλυβας

- + ψηλή θλιπτική και εφελκυστική αντοχή
- + ολκιμότητα
- ψηλό κόστος



*Οπλισμένο  
σκυρόδεμα*

# Εξιδανικεύσεις και προσομοιώσεις κατασκευών

- Ανάγκη υπολογισμού εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης:
  - αντιδράσεις, εντατικά μεγέθη και τάσεις
  - παραμορφώσεις και μετακινήσεις
- Ικανοποιητική ακρίβεια αποτελεσμάτων:
  - κάνοντας απλοποιητικές παραδοχές  
(π.χ. τέλει αρθρώσεις σε δικτυώματα)
- Πραγματική κατασκευή → Φυσικό προσομοίωμα → Μαθηματικό μοντέλο

# Φορτία (δράσεις) και συνδυασμοί φορτίσεων

- Κατηγοριοποίηση φορτίων
  - Τρόπος επιβολής:
    - *στατικά* (αργά επιβαλλόμενα)
    - *δυναμικά* (ταλαντώσεις → αδρανειακές δυνάμεις )
  - Τρόπος εφαρμογής:
    - *συγκεντρωμένα* (π.χ. σημειακή δύναμη)
    - *επιφανειακά* (π.χ. ανεμοπίεση)
    - *μαζικά* (π.χ. βαρύτητα)
  - Πιθανοτικά:
    - *μόνιμα*: σπάνια μεταβάλλονται (π.χ. ιδιοβάρος δομικών στοιχείων)
    - *μεταβλητά*: μεταβάλλονται συχνά (π.χ. φορτία χρήσης)
    - *τυχηματικά*: μικρή πιθανότητα εμφάνισης (π.χ. έκρηξη)
- Συνδυασμοί φορτίσεων
  - Συντελεστές ασφαλείας



## Βαθμοί ελευθερίας

- Επίπεδες κατασκευές:
  - δύο μεταθέσεις και μια στροφή → 3 βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο
- Χωρικές κατασκευές:
  - τρεις μεταθέσεις και τρεις στροφές → 6 βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο

## Συνοριακές συνθήκες

- Συνοριακές συνθήκες μετακινήσεων
- Συνοριακές συνθήκες δυνάμεων

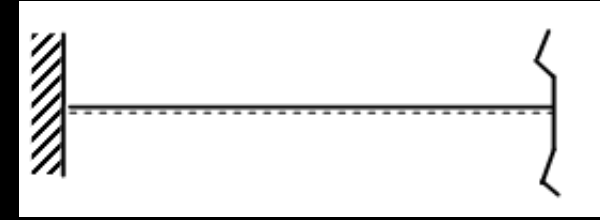
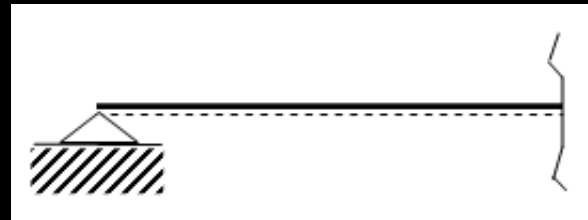
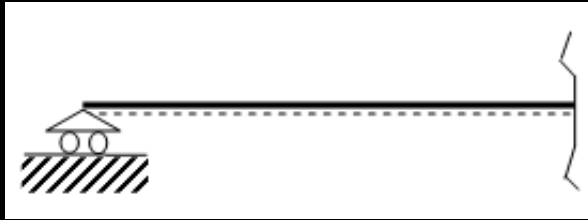
# Στηρίξεις

- Επίπεδος φορέας:

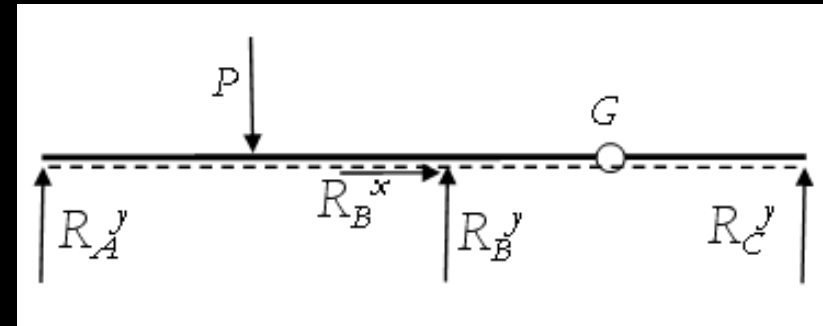
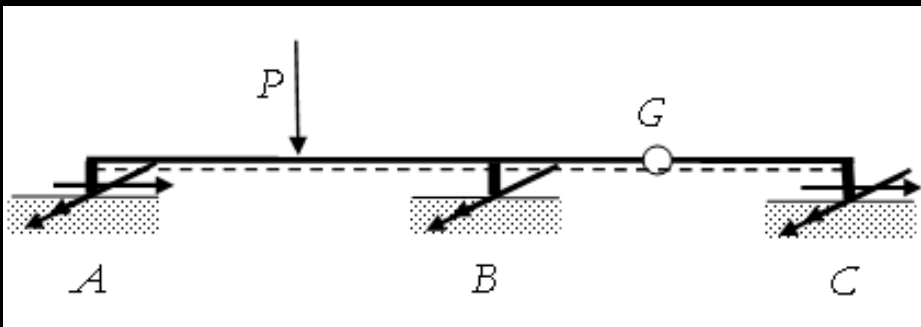
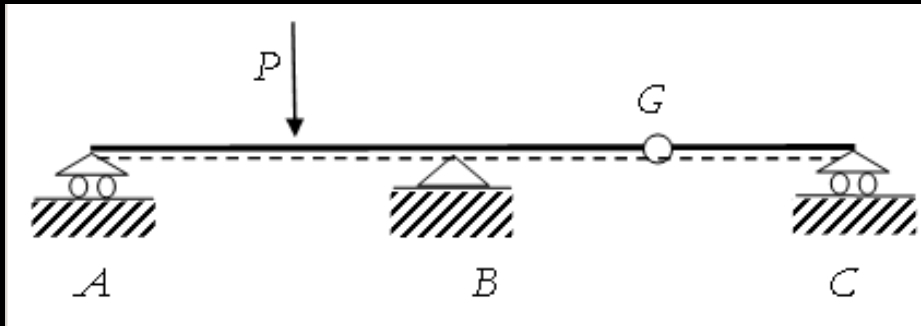
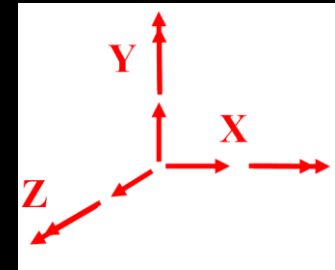
- κύλιση

- άρθρωση

- πάκτωση

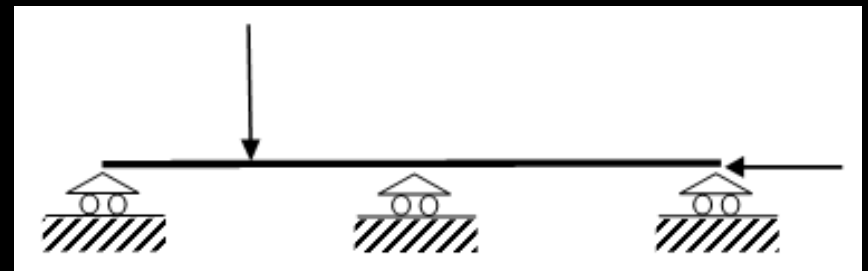
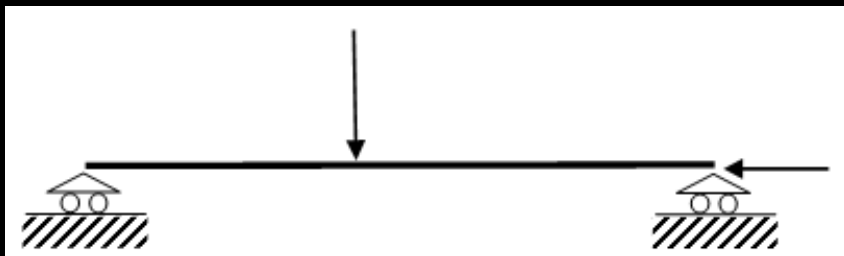


- Τρισδιάστατος φορέας: εναλλακτικοί συμβολισμοί



## Σταθερότητα και χαλαρότητα φορέων

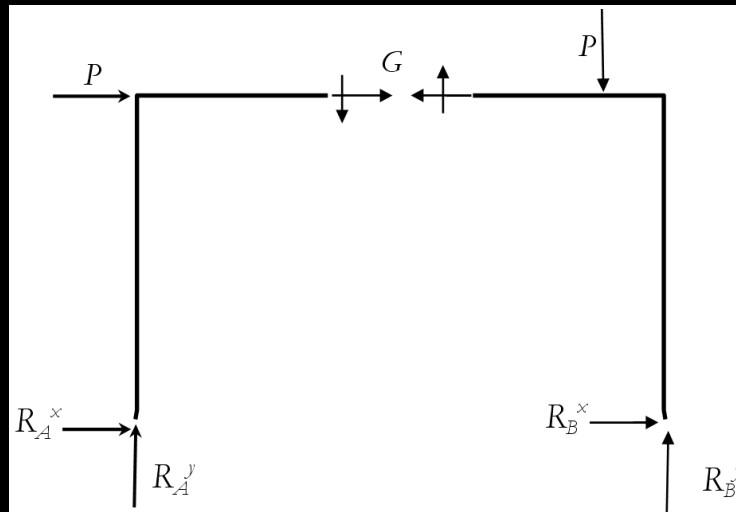
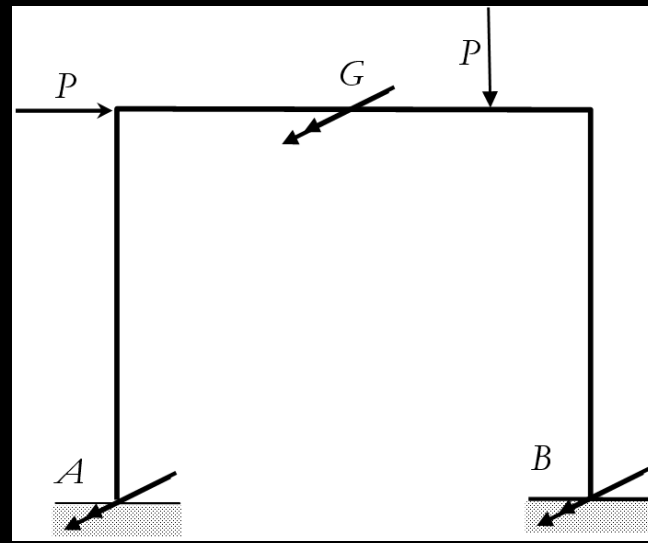
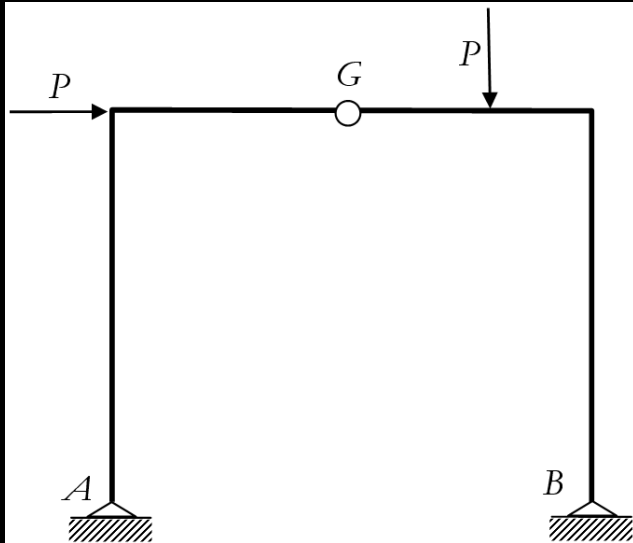
- **Σταθερός φορέας:** μπορεί να μεταφέρει οποιαδήποτε φόρτιση χωρίς να παρουσιάσει οποιαδήποτε χαλαρότητα.
- **Χαλαρότητα** παρουσιάζει ένας φορέας ο οποίος είναι κινηματικά ασταθής (ή χαλαρός), όταν κάτω από κάποια φόρτιση μπορεί να κινηθεί ελεύθερα χωρίς να μπορεί να την μεταφέρει.
  - *εξωτερική χαλαρότητα:* έλλειψη ικανοποιητικών στηρίξεων
  - *εσωτερική χαλαρότητα:* έλλειψη ικανοποιητικών συνδέσεων
- π.χ. επίπεδος απλός φορέας, είναι σταθερός όταν έχει:
  - τρεις τουλάχιστο δεσμεύσεις βαθμών ελευθερίας
  - μη συντρέχουσες και μη παράλληλες δεσμεύσεις



# Συνδέσεις και εσωτερικές ελευθερίες

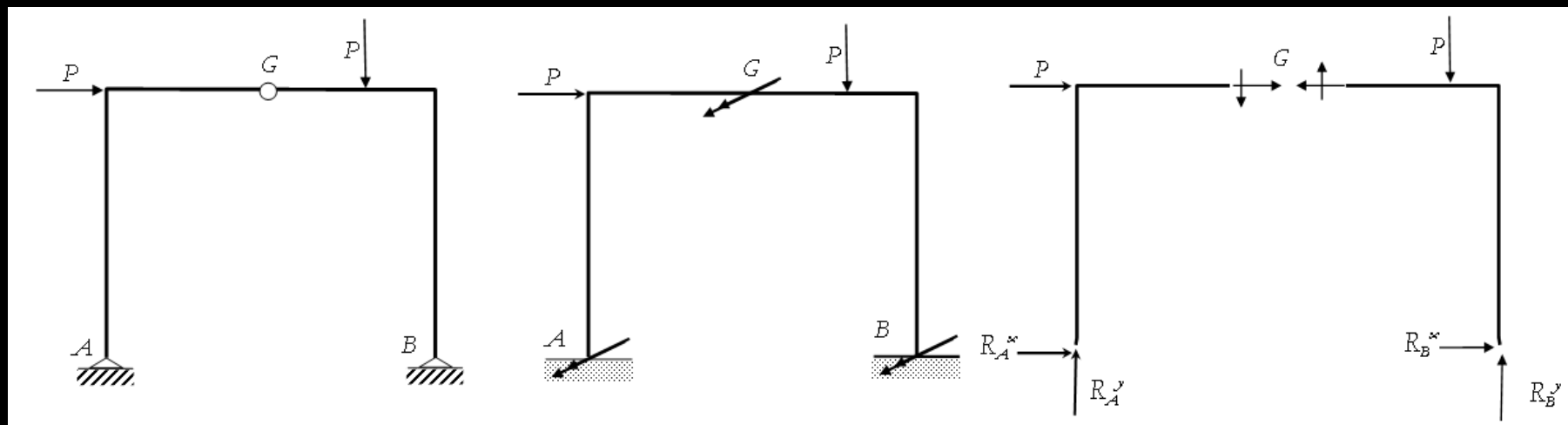
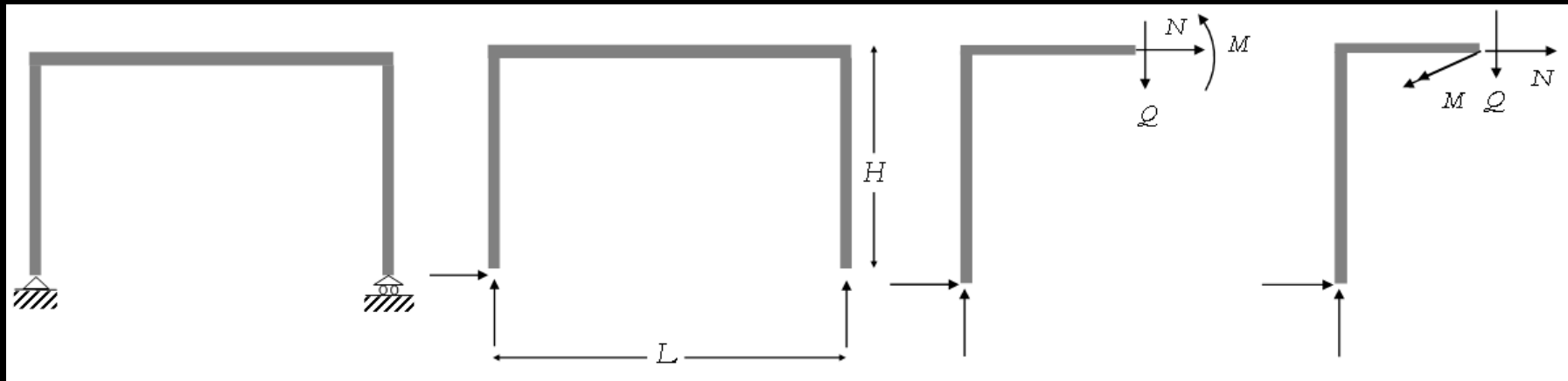
- Απλοί φορείς

- Σύνηθοι φορείς (π.χ. εσωτερικές αρθρώσεις)

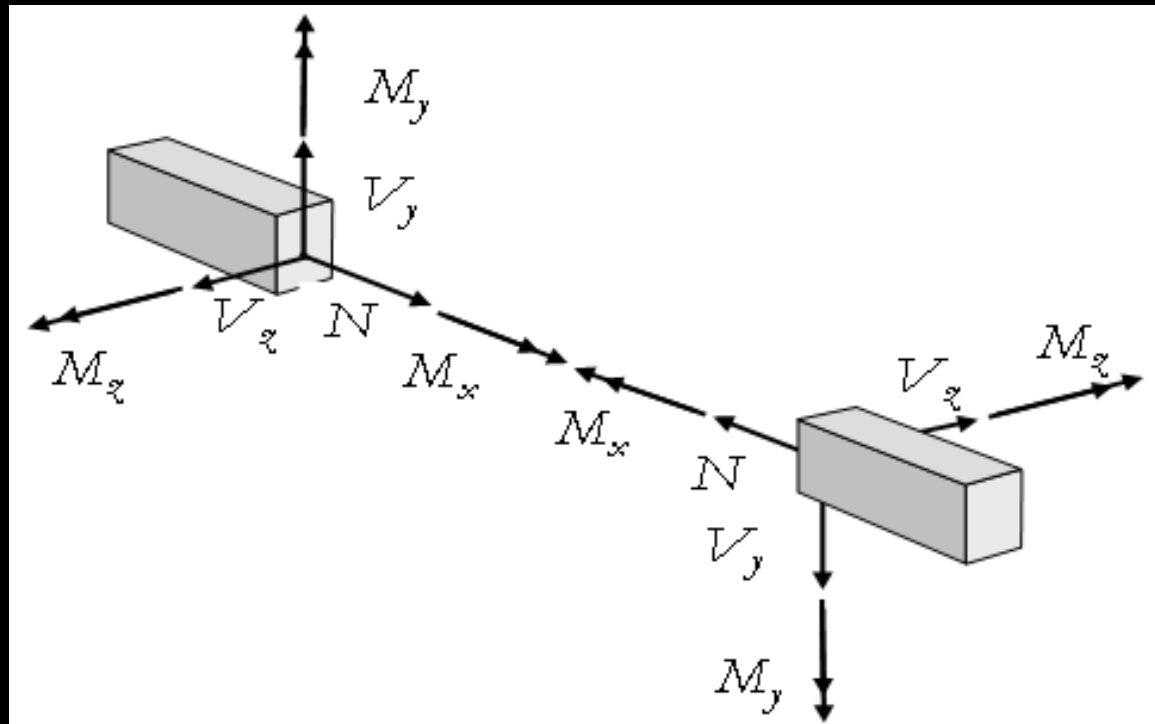
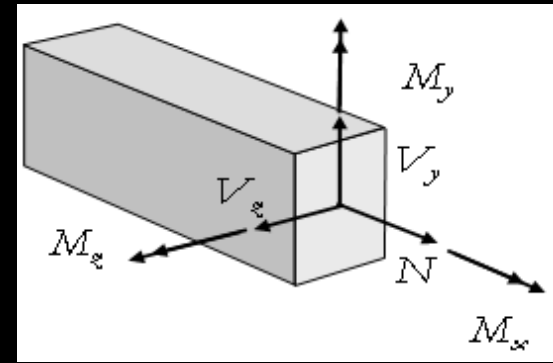
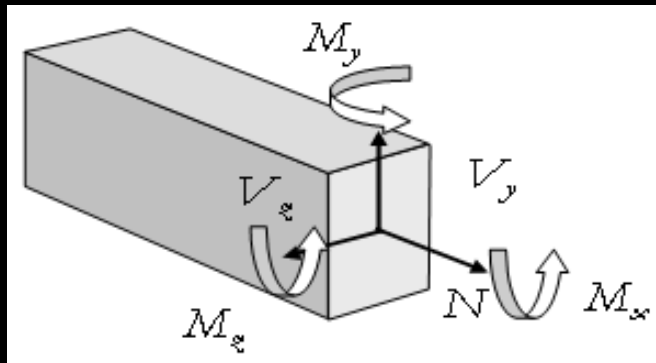


# Διαγράμματα ελευθέρου σώματος και εσωτερικά εντατικά μεγέθη

- Επίπεδοι φορείς

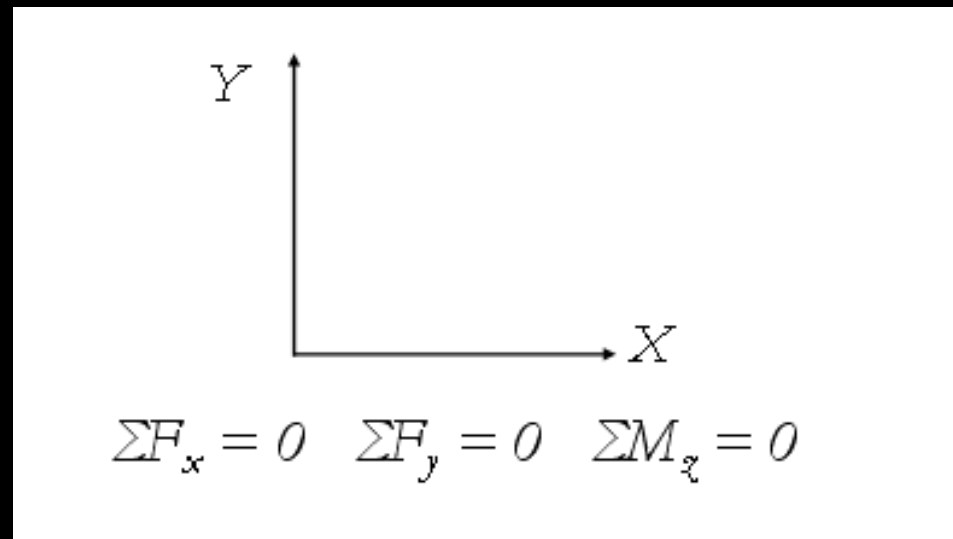


# Εσωτερικά εντατικά μεγέθη χωρικών φορέων

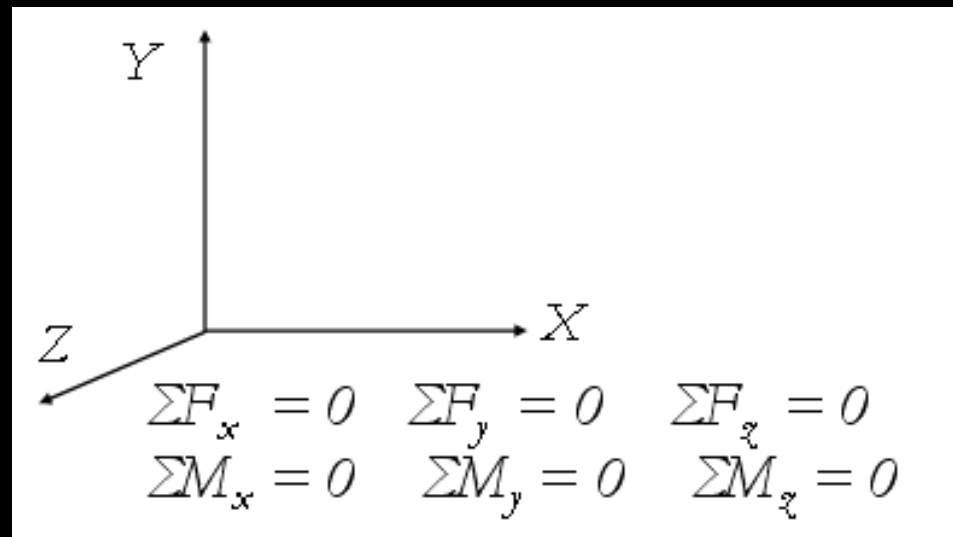


# Εξισώσεις ισορροπίας

- Επίπεδοι φορείς



- Χωρικοί φορείς



## Στατικότητα απλών δοκών

$A < E + N \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

ισοστατικός φορέας  $\rightarrow A = E + N$

$A > E + N \rightarrow$  υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
( βαθμός στατικής αοριστίας:  $A - E - N$ )

$$\left[ \begin{array}{lll} N: \text{εξισώσεις ισορροπίας} & \text{Επίπεδοι φορείς: } N = 3 & \text{Χωρικοί φορείς: } N = 6 \\ A: \text{αντιδράσεις} & E: \text{αριθμός εσωτερικών ελευθεριών} & \end{array} \right]$$

Αν δεν μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των εξισώσεων ισορροπίας:

- οι αντιδράσεις στις στηρίξεις  $\rightarrow$  εξωτερική υπερστατικότητα
- τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη  $\rightarrow$  εσωτερική υπερστατικότητα



# Υπερστατικότητα φορέων με κλειστούς βρόγχους

Τομές  $\rightarrow$  για να απλοποιηθεί ο φορέας

$\alpha < n N \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρός φορέας

$\alpha = n N \rightarrow$  ισοστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας

$\alpha > n N \rightarrow$  υπερστατικός και ενδεχομένως σταθερός φορέας  
( βαθμός στατικής αοριστίας:  $\alpha - n N$  )

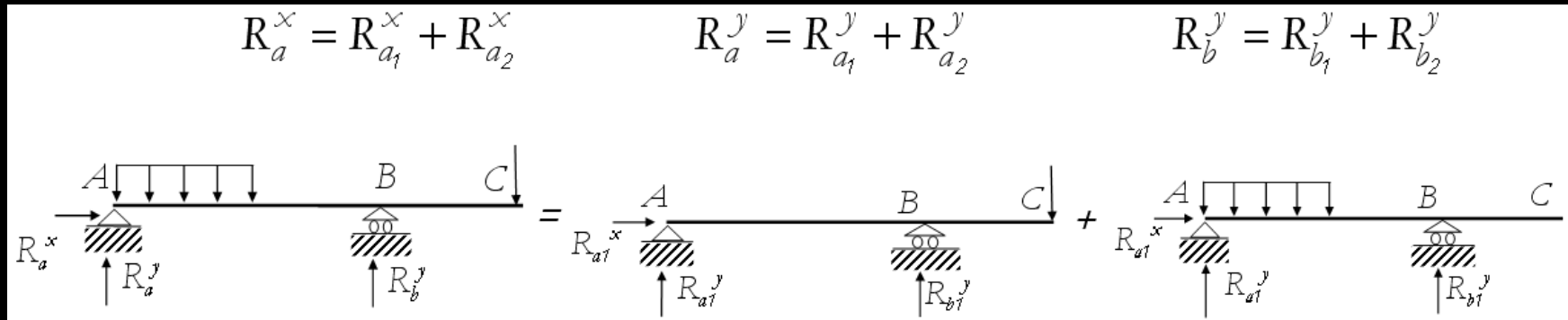
$N$ : εξισώσεις ισορροπίας    Επίπεδοι φορείς:  $N = 3$     Χωρικοί φορείς:  $N = 6$

$\alpha$ : αντιδράσεις συμπεριλαμβανομένων εντατικών μεγεθών σε τομές

$n$ : αριθμός επιμέρους τμημάτων φορέα

## Αρχή της Επαλληλίας

"οι αντιδράσεις και η συνολική εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση μιας κατασκευής λόγω κάποιων φορτίσεων ή δράσεων γενικότερα, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιδράσεων, εντατικών και παραμορφωσιακών καταστάσεων, οι οποίες προκύπτουν αναλύοντας τον φορέα για κάθε μια από τις επιμέρους φορτίσεις"

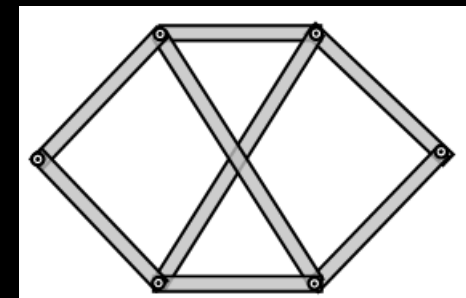
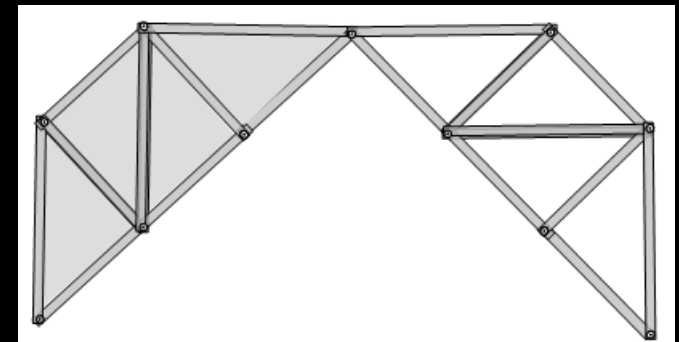
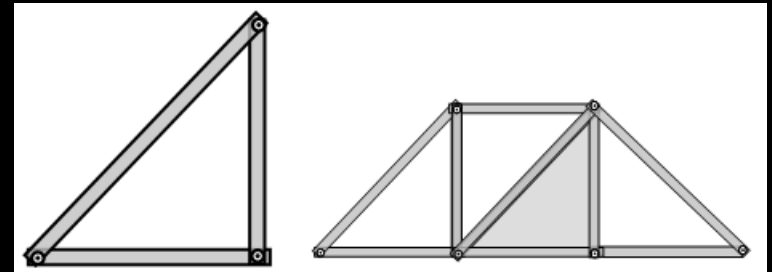


# Εισαγωγή στα δικτυώματα

- Θεωρήσεις για δικτυώματα:
  - χωρίς τριβή αρθρωτές συνδέσεις
  - κεντρικά συνδεόμενες ράβδοι
  - κομβικά επιβαλλόμενα φορτία
  - ασήμαντο σχετικά ιδιοβάρος ράβδων
- ⇒ αδυναμία μεταβίβασης ροπών
  - ⇒ μόνο αξονικές εφελκυστικές/θλιπτικές δυνάμεις
    - ⇒ ομοιόμορφες εφελκυστικές/θλιπτικές τάσεις
      - ⇒ βέλτιστη αξιοποίηση υλικού
        - ⇒ δυνατότητα κάλυψης μεγάλων ανοιγμάτων

# Τύποι δικτυωμάτων

- Χωρική κατηγοριοποίηση
  - *επίπεδα* δικτυώματα (δισδιάστατα)
  - *χωρικά* δικτυώματα (τρειςδιάστατα)
- Κατηγοριοποίηση ανάλογα με πολυπλοκότητα
  - *απλά*: προκύπτουν από τη διαδοχική προσθήκη για κάθε δύο ράβδους ενός επιπλέον κόμβου στο βασικό δικτύωμα τρίγωνο
  - *σύνθετα*: συνδέοντας δύο η περισσότερα απλά δικτυώματα
  - *πολύπλοκα*: ούτε απλά αλλά ούτε σύνθετα δικτυώματα



# Ισοστατικότητα και βαθμοί στατικής αοριστίας δικτυωμάτων

- $P + A < 2K \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα
- ισοστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα  $\rightarrow P + A = 2K$
- $P + A > 2K \rightarrow$  υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα ( βαθμός στατικής αοριστίας:  $P + A - 2K$  )

$$\left[ \begin{array}{l} P: \text{ άθροισμα των ράβδων} \\ A: \text{ άθροισμα των αγνώστων αντιδράσεων} \\ K: \text{ αριθμός κόμβων} \end{array} \right]$$

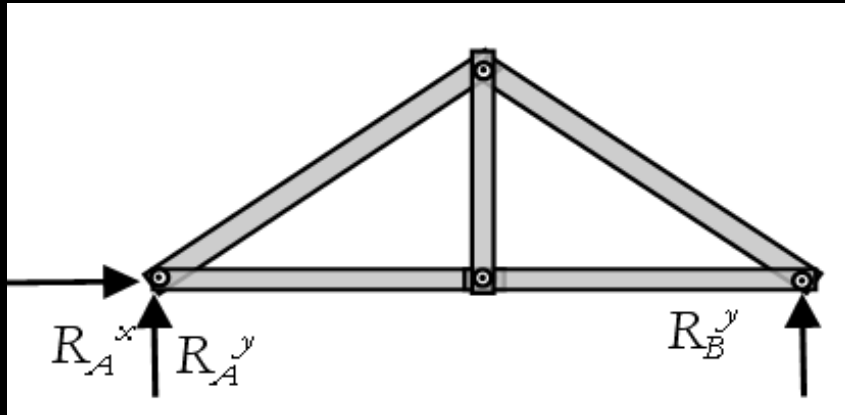
## Σταθερότητα (αδυναμία κινητικότητας) δικτυώματος

- **Εξωτερική:** πρέπει το δικτύωμα να μην μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα πραγματοποιώντας κίνηση στερεού σώματος. Έτσι, απαιτούνται:
  - $\Rightarrow$  ικανοποιητικός αριθμός αντιδράσεων που να μην συντρέχουν σε ένα σημείο ούτε να είναι παράλληλες
- **Εσωτερική:** κανένας κόμβος να μην μπορεί να μετακινηθεί ελεύθερα (πραγματοποιώντας κίνηση στερεού σώματος)

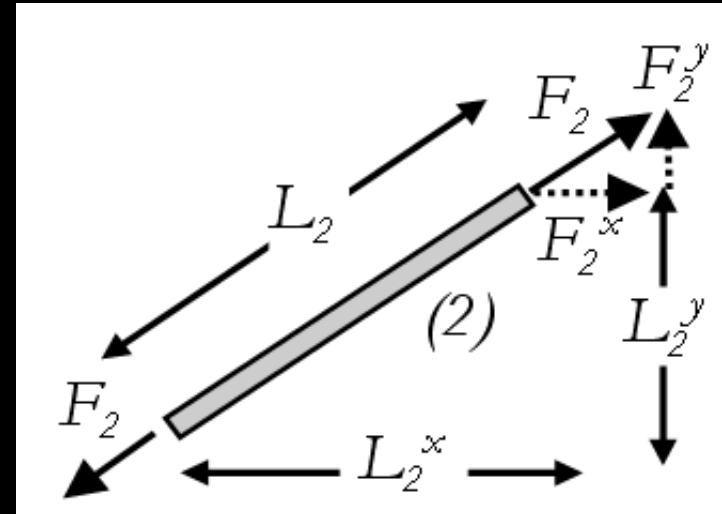
# Ανάλυση δικτυωμάτων

- *Μέθοδος των κόμβων:*
  - απομόνωση και διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ενός κόμβου
    - ⇒ χρησιμοποιείται όταν απαιτείται, και εφόσον είναι δυνατή με αυτή τη μέθοδο, η εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων
- *Μέθοδος των τομών:*
  - ισορροπία ενός τμήματος του δικτυώματος από νοητή τομή
    - ⇒ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων ορισμένων μόνο ράβδων ή όταν δεν είναι δυνατή η εύρεση όλων των δυνάμεων με τη χρήση της μεθόδου των κόμβων (π.χ. σύνθετα δικτυώματα)
- *Συνδυασμός των δύο μεθόδων*
  - ⇒ για την ευκολότερη ανάλυση κάποιων ισοστατικών δικτυωμάτων

## ΔΕΣ ράβδου δικτυώματος



ΔΕΣ δικτυώματος



$$F_2^x = \frac{L_2^x}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^x} \cdot F_2^x$$

$$F_2^y = \frac{L_2^y}{L_2} \cdot F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{L_2}{L_2^y} \cdot F_2^y$$

# Μέθοδος των κόμβων

- Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα

⇒ κάθε κόμβος του πρέπει να ισορροπεί

⇒ δύο εξισώσεις ισορροπίας για κάθε κόμβο

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

- Αυθαίρετη προσήμανση

⇒ Συνήθως, αν δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε την ορθή φορά:

- *εφελκυστικές*: οι δυνάμεις των ράβδων οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο στον οποίο συντρέχουν φαίνονται να “τραβάνε” τον κόμβο
- *θλιπτικές*: δυνάμεις οι οποίες εφαρμοζόμενες πάνω στον κόμβο φαίνονται να “πιέζουν” τον κόμβο



# Αφόρτιστες ράβδοι

*Αφόρτιστες ράβδοι:* μηδενικές αξονικές δυνάμεις υπό κάποιες φορτίσεις

- Αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν μόνο δύο ράβδοι, τότε οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων αυτών είναι απαραίτητα μηδενικές.
- Αν σε ένα κόμβο ο οποίος δεν δέχεται οποιοδήποτε εξωτερικό φορτίο ή αντίδραση από στηρίξεις, συντρέχουν τρεις ράβδοι δύο εκ των οποίων είναι συγγραμμικές, τότε η αξονική δύναμη της τρίτης ράβδου, η οποία δεν είναι συγγραμμική, είναι απαραίτητα μηδενική.
- Αν μια ράβδος στηρίζεται απευθείας σε δύο αρθρώσεις, θεωρείται ράβδος μηδενικής φόρτισης γιατί οι δυνάμεις αναλαμβάνονται από τις στηρίξεις, ενώ οι μετακινήσεις και παραμορφώσεις είναι εξ' ορισμού μηδενικές και συνεπώς δεν αναπτύσσονται τάσεις και δυνάμεις στην ράβδο.

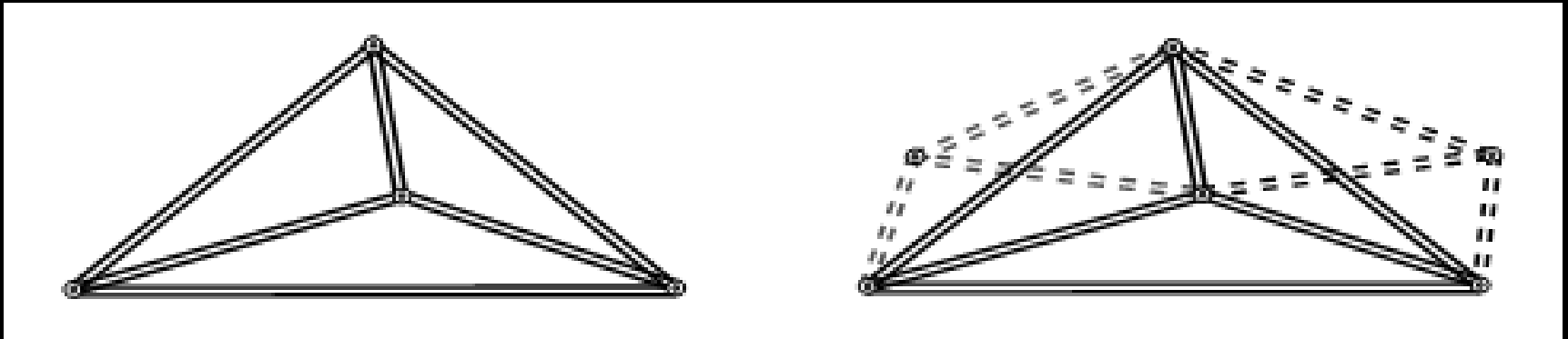
⇒ Σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης ενός δικτυώματος με τον προσδιορισμό τυχόν αφόρτιστων ράβδων

# Μέθοδος των τομών (Ritter)

- Για τον υπολογισμό των δυνάμεων συγκεκριμένων ράβδων
  - Για να ισορροπεί ένα δικτύωμα
    - ⇒ κάθε τμήμα του πρέπει να ισορροπεί
    - ⇒ τρεις εξισώσεις ισορροπίας για κάθε τμήμα
- $$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right.$$
- Προτιμότερο να μην τέμνουμε περισσότερες από 3 ράβδους άγνωστων δυνάμεων
    - ⇒ αποφυγή σχηματισμού και επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων
  - Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις, οι δύο να είναι παράλληλες
    - ⇒ υπολογισμός τρίτης ράβδου από την εξίσωση ισορροπίας στην άλλη διεύθυνση
  - Αν τέμνονται τρεις ράβδοι με άγνωστες δυνάμεις
    - ⇒ υπολογισμός της μιας ράβδου να υπολογιστεί από την εξίσωση ροπής ως προς το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι άλλες δύο ράβδοι.

# Χωρικά δικτυώματα

- τρισδιάστατοι φορείς
- το απλούστερο σταθερό δικτύωμα που μπορεί να υπάρχει είναι το *τετράεδρο* το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βασική μονάδα για το σχηματισμό χωρικών δικτυωμάτων, προσθέτοντας διαδοχικά για κάθε επιπλέον κόμβο τρεις ράβδους



- Ισορροπία κόμβων:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

# Ισοστατικότητα χωριών δικτυωμάτων

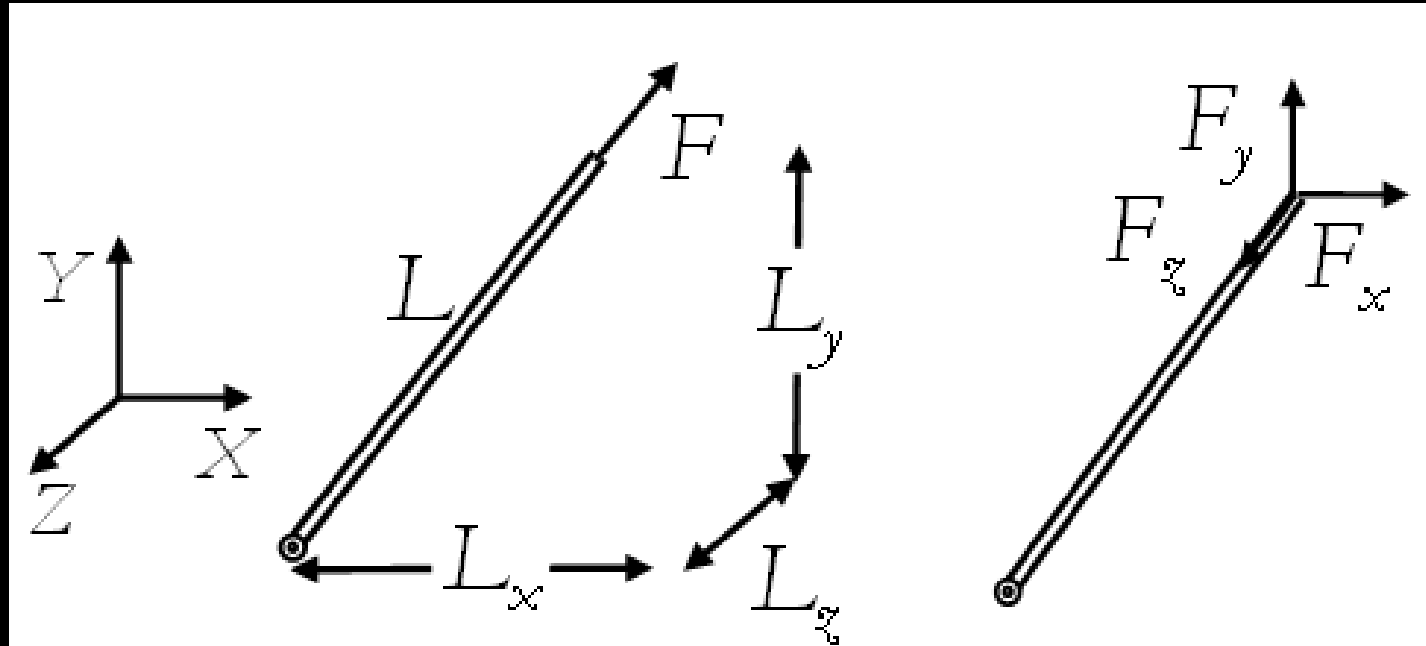
$P + A < 3 K \rightarrow$  μηχανισμός ή χαλαρό δικτύωμα

$P + A = 3 K \rightarrow$  ισοστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα

$P + A > 3 K \rightarrow$  υπερστατικό και ενδεχομένως σταθερό δικτύωμα  
( βαθμός στατικής αοριστίας:  $P + A - 3 K$  )

$\left[ \begin{array}{l} P: \text{ άθροισμα των ράβδων} \\ A: \text{ άθροισμα των αγνώστων αντιδράσεων} \\ K: \text{ αριθμός κόμβων} \end{array} \right]$

## Χρήσιμες σχέσεις για χωρικά δικτυώματα



$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_x = F \cdot \frac{L_x}{L}$$

$$F_y = F \cdot \frac{L_y}{L}$$

$$F_z = F \cdot \frac{L_z}{L}$$

# Μέθοδοι επίλυσης ισοστατικών χωρικών δικτυωμάτων

- Μέθοδος κόμβων

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

- Μέθοδος τομών

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

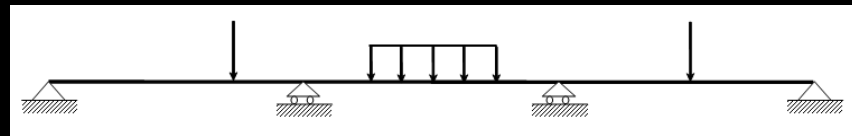
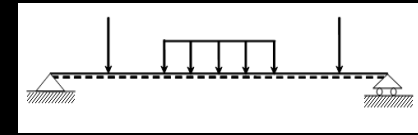
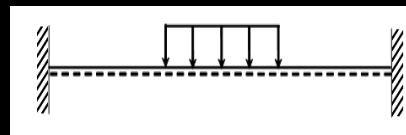
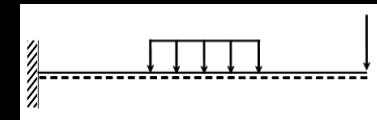
$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

# Εισαγωγή στις δοκούς

- το πιο κοινό δομικό στοιχείο
- σχετικά μικρές διαστάσεις στις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις σε σχέση με την τρίτη και συνήθως οριζόντια διαμήκη διεύθυνση, τον άξονα τους
- καταπονούνται συνήθως με φορτία κάθετα στον διαμήκη άξονα τους
  - συμπεριφορά και διαστασιολόγηση εξαρτάται:
    - συνήθης δοκοί: από καμπτικές ροπές και παραμορφώσεις
    - κοντές και υψίκορμες δοκοί: από τέμνουσες δυνάμεις
- Διαφορετικά είδη φορτίων:
  - συγκεντρωμένα
    - δυνάμεις
    - ροπές
  - κατανεμημένα
    - ομοιόμορφα
    - τριγωνικά
    - παραβολικά, κλπ.

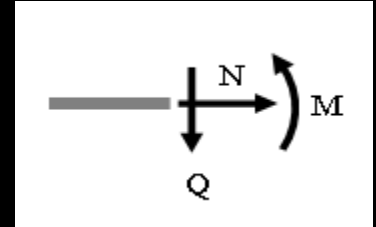


# Εντατικά μεγέθη δοκών (στο επίπεδο)

- καμπτικές ροπές,  $M(x)$ :

- γραμμικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής ορθές τάσεις (θλιπτικές στο ένα πέλμα και εφελκυστικές στο άλλο)

- καθοριστικές στη διαστασιολόγηση συνήθων δοκών



- τέμνουσες δυνάμεις,  $V(x)$  :

- παραβολικά μεταβαλλόμενες καθ' ύψος της διατομής διατμητικές τάσεις

- καθοριστικές μόνο σε περιπτώσεις κοντών και υψίκορμων δοκών

- αξονικές δυνάμεις,  $N(x)$  :

- μεταφέρονται από ομοιόμορφες ορθές τάσεις

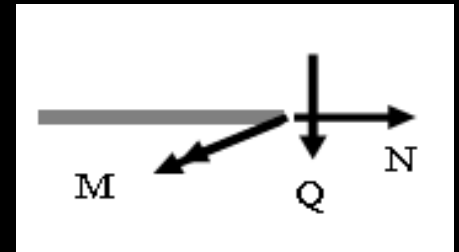
- καθοριστικές σε περιπτώσεις μεγάλων αξονικών φορτίων

- υποστυλώματα

- κίνδυνος λυγισμού και φαινομένων P-Δ όταν έχουμε:

- σημαντικά αξονικά φορτία

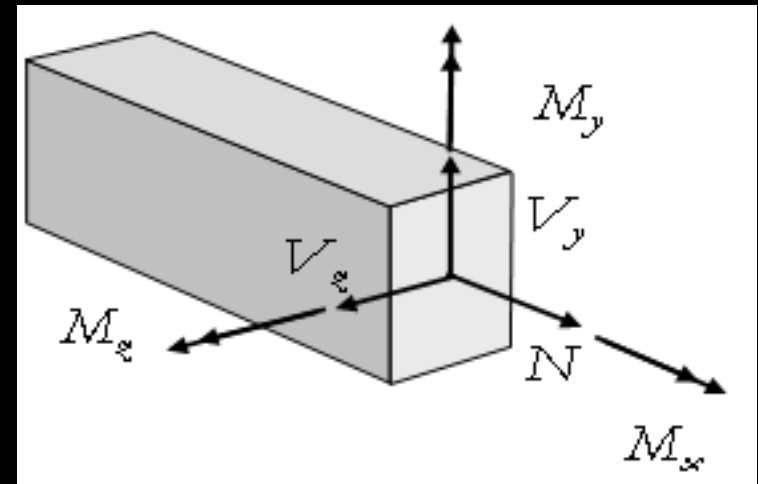
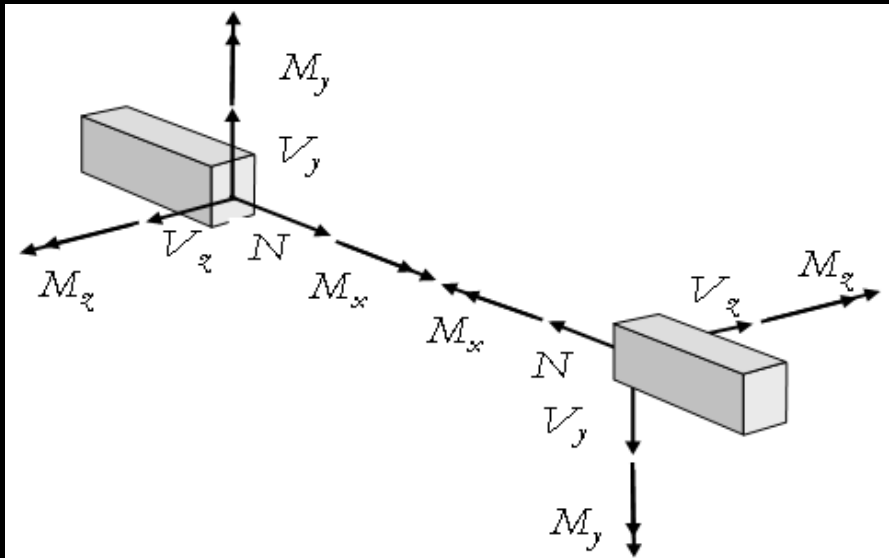
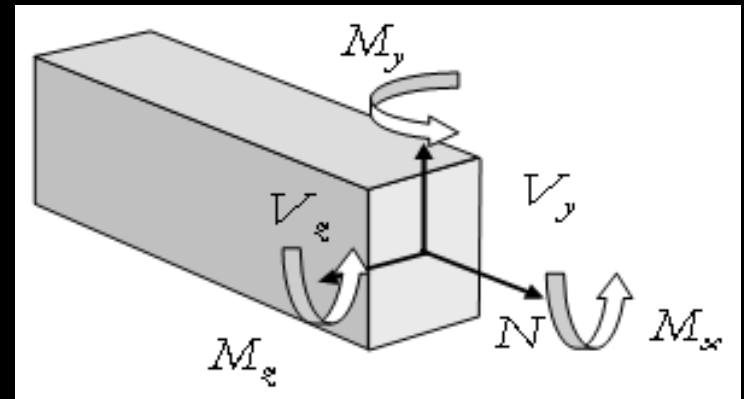
- εύκαμπτα μέλη





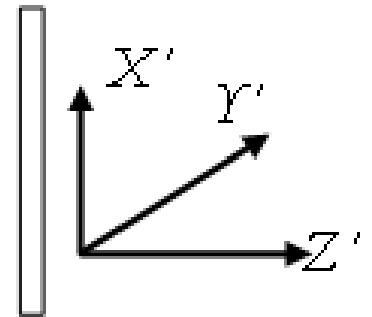
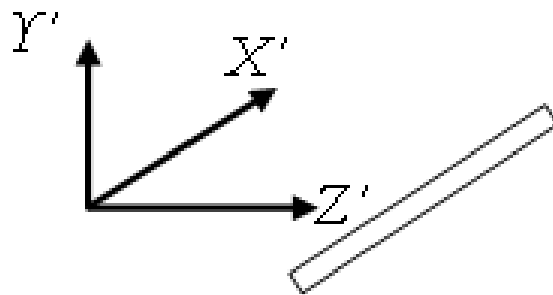
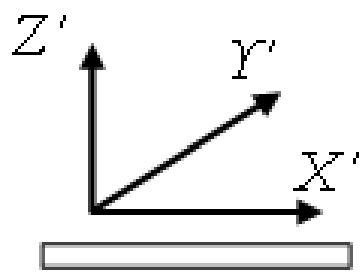
# Εντατικά μεγέθη δοκών (στο χώρο)

- αξονικές δυνάμεις,  $N(x)$
- τέμνουσες δυνάμεις,  $V_y(x)$  και  $V_z(x)$
- καμπτικές ροπές,  $M_y(x)$  και  $M_z(x)$
- ροπές στρέψης,  $M_x(x)$

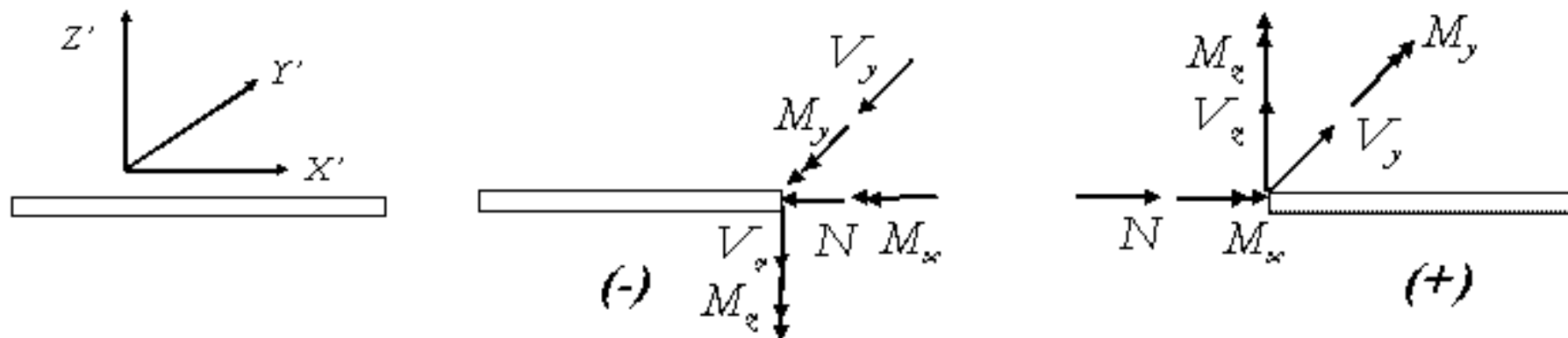


# Διαγράμματα Εντατικών μεγεθών τρισδιάστατων φορέων

Στον τρισδιάστατο χώρο, εκτός από το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων, χρησιμοποιούνται ευρέως τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων. Κάθε μέλος ενός τρισδιάστατου πλαισίου έχει το δικό του τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $X', Y', Z'$ , βάσει του οποίου εκφράζονται τα εντατικά μεγέθη του κάθε μέλους

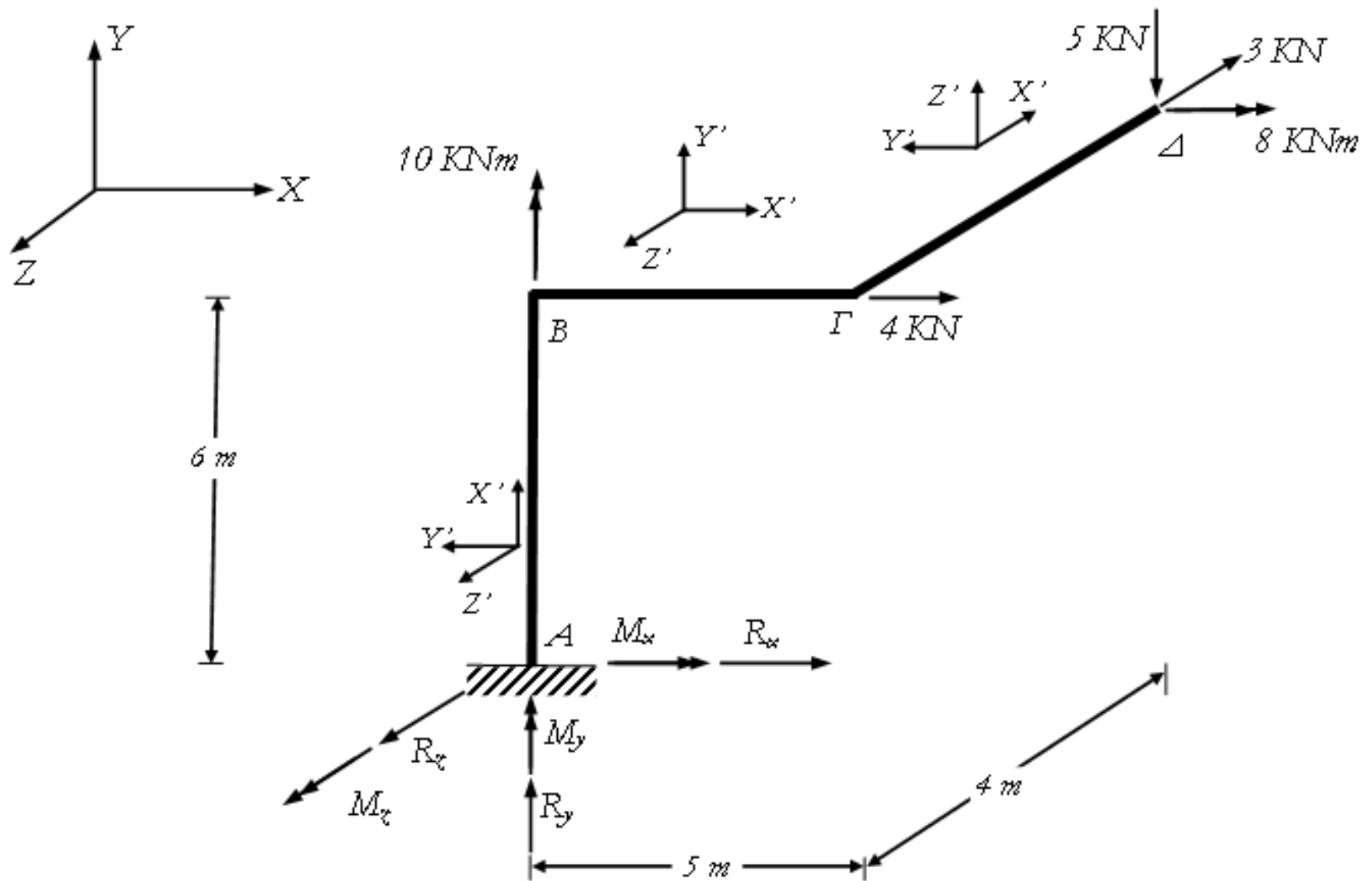


Κάνοντας τομή σε ένα μέλος διακρίνονται δύο όχθες: η αρνητική και η θετική όχθη, όπου θετική όχθη θεωρείται αυτή στην οποία αυξάνεται το  $X'$ , ενώ αρνητική όχθη η άλλη. Η φορά των εντατικών μεγεθών ορίζονται στη θετική όχθη να έχουν τη φορά του τοπικού συστήματος συντεταγμένων του μέλους. Αντιθέτως, στην αρνητική όχθη, τα εντατικά μεγέθη έχουν αντίθετη φορά από αυτή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων



Όταν ένας φορέας ισορροπεί, τότε το ΔΕΣ του φορέα αλλά και κάθε τμήματος του πρέπει να ισορροπεί, αφού σύμφωνα με τις εξισώσεις ισορροπίας, πρέπει να είναι σε ισορροπία και το κάθε του τμήμα. Έτσι, για την επίλυση ενός ισοστατικού πλαισίου στο χώρο, κάνοντας νοητή τομή στο σημείο για να υπολογιστούν τα εντατικά μεγέθη διακρίνονται δύο όχθες. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στο ένα από τα δύο τμήματα, υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη του τμήματος και κατά συνέπεια σχεδιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα, εκφρασμένα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους.

# Παράδειγμα



$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad R_x^A = -4 \text{ KN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0: \quad R_y^A = 5 \text{ KN}$$

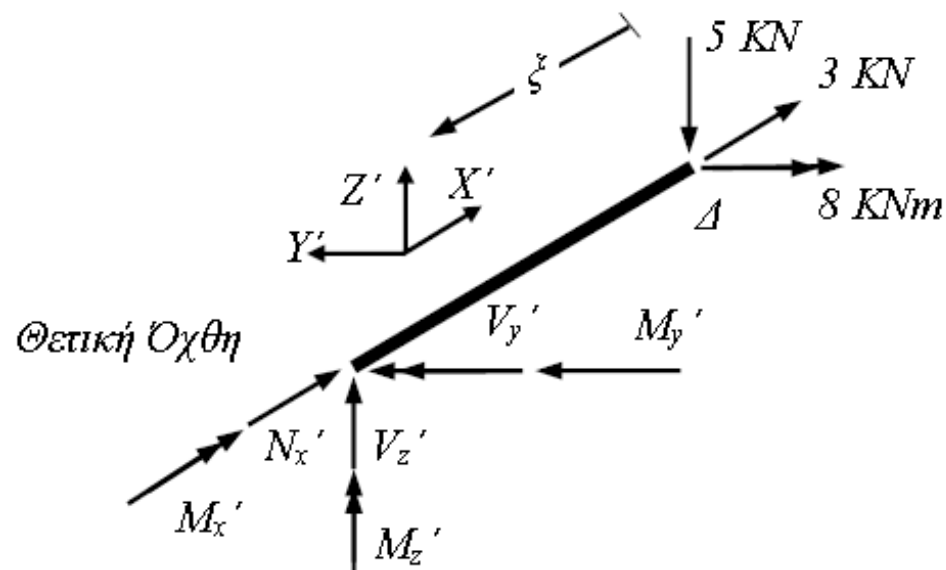
$$\swarrow \sum F_z = 0: \quad R_z^A = 3 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \sum M_x = 0: \quad M_x^A = 3 \text{ KN} \cdot 6 \text{ m} - 8 \text{ KNm} + 5 \text{ KN} \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow M_x^A = 30 \text{ KNm}$$

$$\uparrow \sum M_y = 0: \quad M_y^A = -3 \text{ KN} \cdot 5 \text{ m} - 10 \text{ KNm} \Rightarrow M_y^A = -25 \text{ KNm}$$

$$\swarrow \sum M_z = 0: \quad M_z^A = 5 \text{ KN} \cdot 5 \text{ m} + 4 \text{ KNm} \cdot 6 \text{ m} \Rightarrow M_z^A = 49 \text{ KNm}$$

Τμήμα ΓΔ ( $0 \leq \xi \leq 4 \text{ m}$ )



$$\nearrow \sum F_x = 0: \quad N_x' = -3 \text{ kN}$$

$$\leftarrow \sum F_y = 0: \quad V_y' = 0$$

$$\uparrow \sum F_z = 0: \quad V_z' = 5 \text{ kN}$$

$$\nearrow \sum M_x = 0: \quad M_x' = 0$$

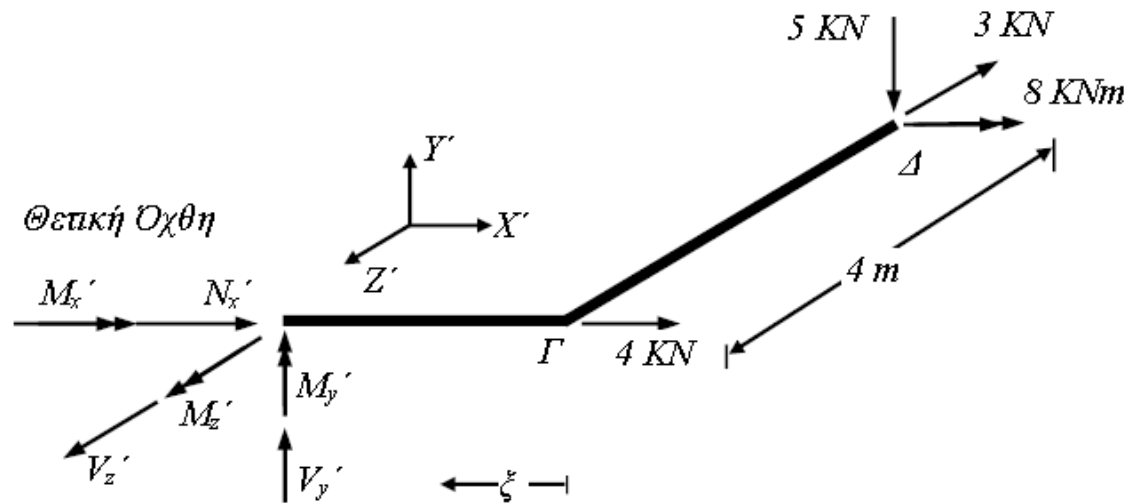
$$\leftarrow \sum M_y = 0: \quad M_y'(\xi) = 8 \text{ kNm} - 5 \text{ kN} \cdot \xi$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y' = 8 \text{ kNm}$$

$$\xi = 4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_y' = -12 \text{ kNm}$$

$$\uparrow \sum M_z = 0: \quad M_z' = 0$$

Τμήμα ΒΓ (0 ≤ ξ ≤ 5 m)



$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad N_x' = -4 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0: \quad V_y' = 5 \text{ kN}$$

$$\swarrow \sum F_z = 0: \quad V_z' = 3 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum M_x = 0: \quad M_x' = -8 \text{ kNm} + 5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 12 \text{ kNm}$$

$$\uparrow \sum M_y = 0: \quad M_y'(\xi) = -3 \text{ kN} \cdot \xi$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y' = 0$$

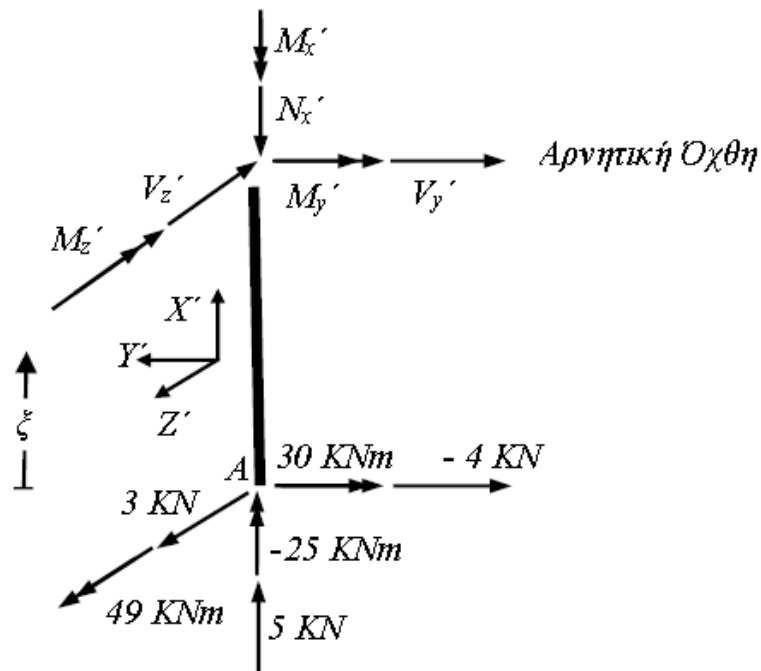
$$\xi = 5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_y' = -15 \text{ kNm}$$

$$\swarrow \sum M_z = 0: \quad M_z'(\xi) = 5 \text{ kN} \cdot \xi$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_z' = 0$$

$$\xi = 5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_z' = 25 \text{ kNm}$$

Τμήμα AB ( $0 \leq \xi \leq 6 \text{ m}$ )



$$\downarrow \quad \sum F_x = 0: \quad N_x' = 5 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \quad \sum F_y = 0: \quad V_y' = 4 \text{ KN}$$

$$\nearrow \quad \sum F_z = 0: \quad V_z' = 3 \text{ KN}$$

$$\downarrow \quad \sum M_x = 0: \quad M_x' = -25 \text{ KNm}$$

$$\rightarrow \quad \sum M_y = 0: \quad M_y'(\xi) = -30 \text{ KNm} + 3 \text{ KN} \cdot \xi$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y' = -30 \text{ KNm}$$

$$\xi = 6 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_y' = -12 \text{ KNm}$$



$$\downarrow \quad \sum F_x = 0: \quad N_x' = 5 \text{ KN}$$

$$\rightarrow \quad \sum F_y = 0: \quad V_y' = 4 \text{ KN}$$

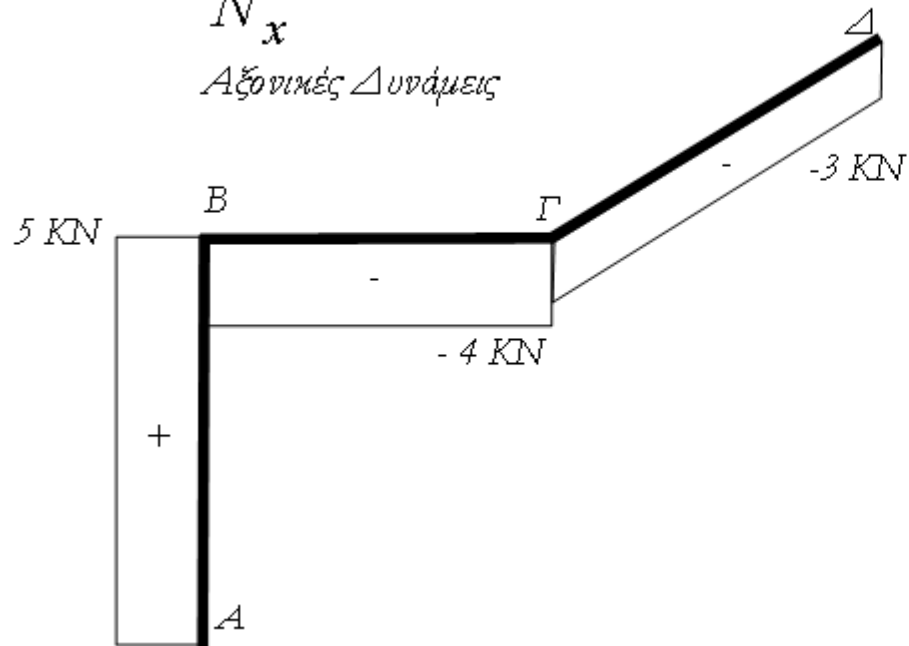
$$\nearrow \quad \sum F_z = 0: \quad V_z' = 3 \text{ KN}$$

$$\downarrow \quad \sum M_x = 0: \quad M_x' = -25 \text{ KNm}$$

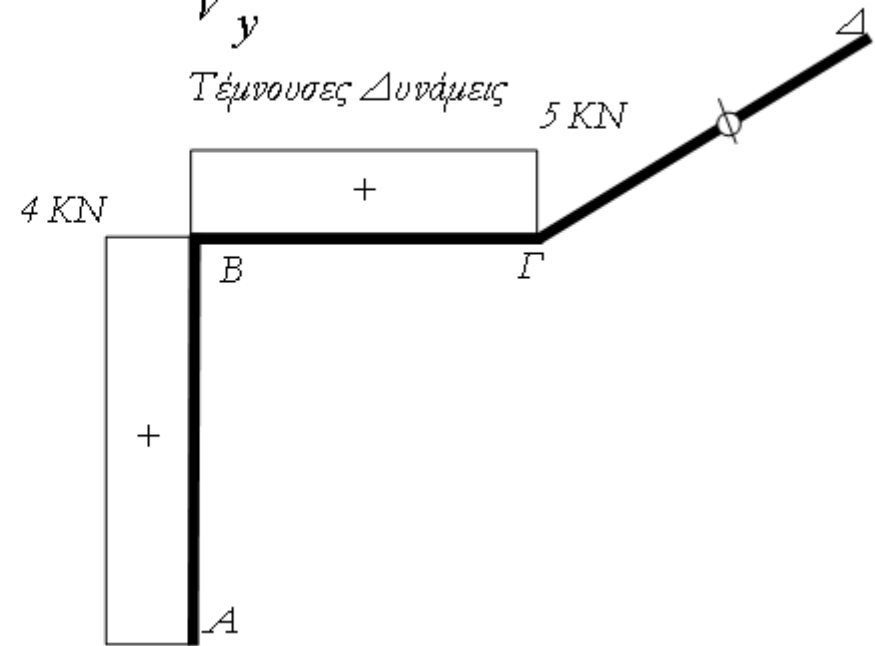
$$\rightarrow \quad \sum M_y = 0: \quad M_y'(\xi) = -30 \text{ KNm} + 3 \text{ KN} \cdot \xi$$
$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y' = -30 \text{ KNm}$$
$$\xi = 6 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_y' = -12 \text{ KNm}$$

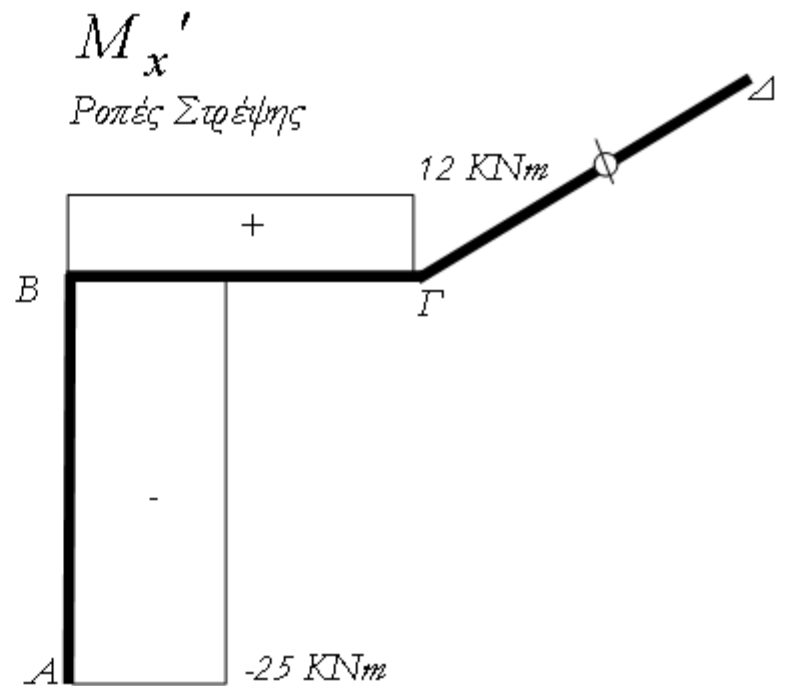
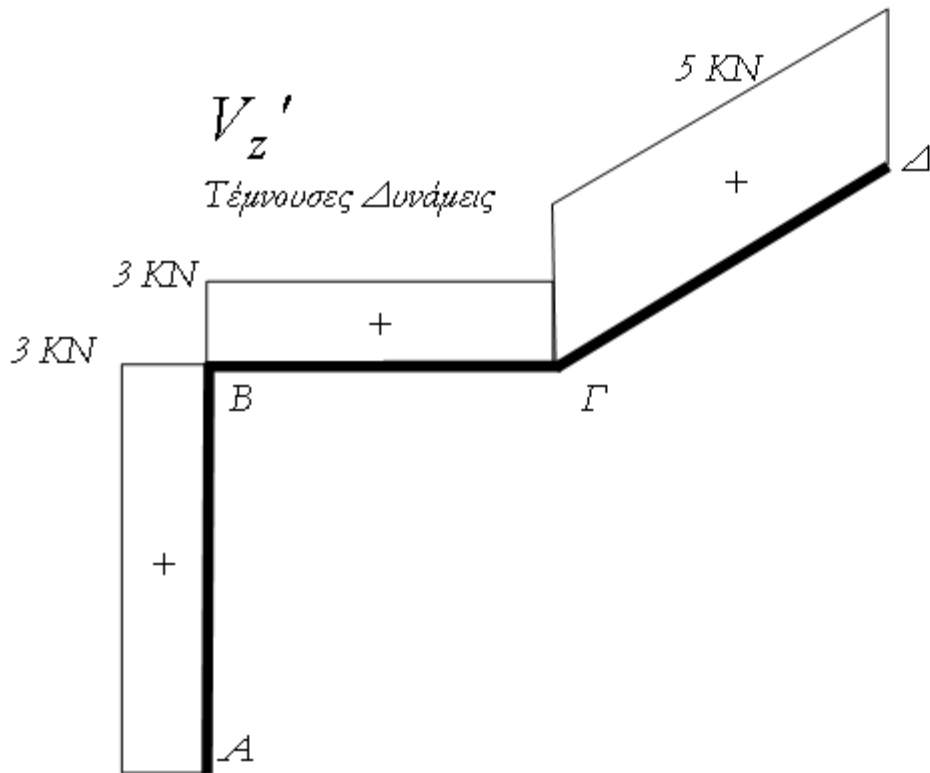
$$\nearrow \quad \sum M_z = 0: \quad M_z'(\xi) = 49 \text{ KNm} - 4 \text{ KN} \cdot \xi$$
$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M_z' = 49 \text{ KNm}$$
$$\xi = 6 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad M_z' = 25 \text{ KNm}$$

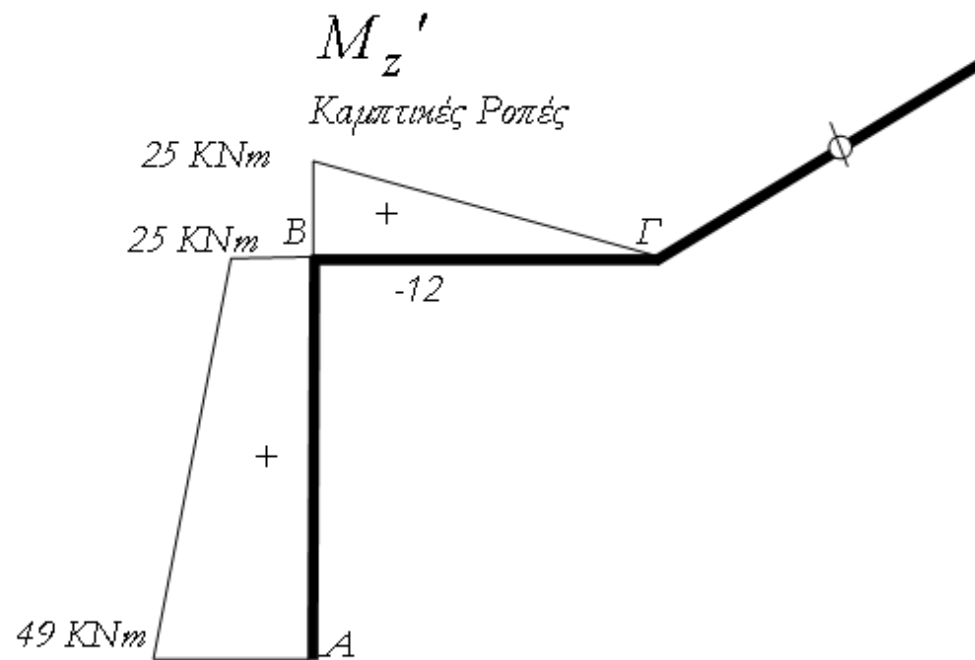
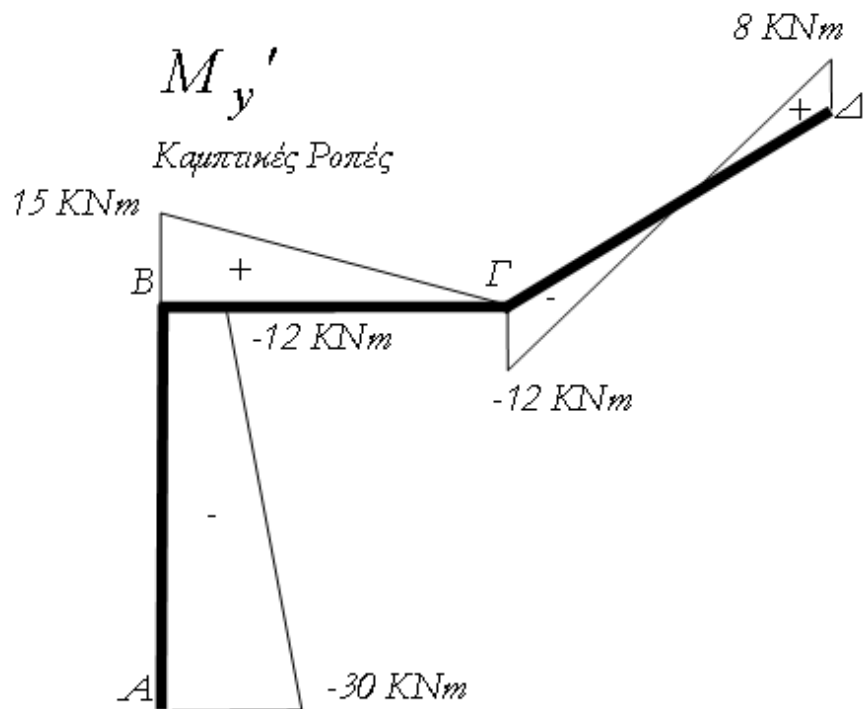
$N_x'$   
Αξονικές Δυνάμεις



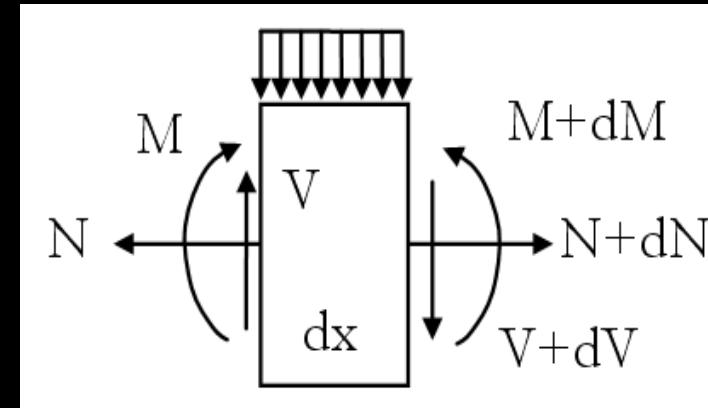
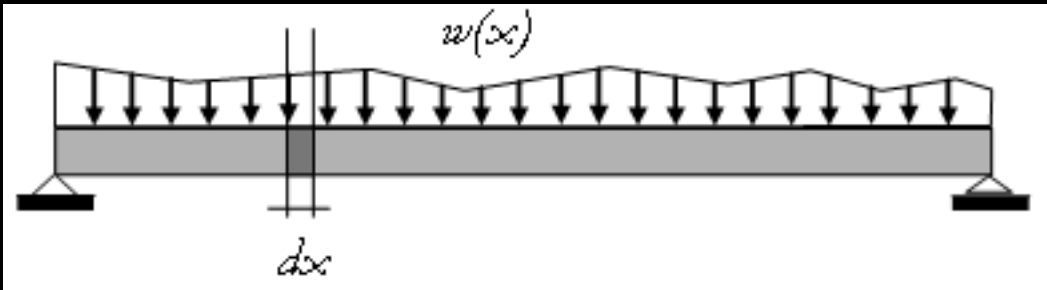
$V_y'$   
Τέμνουσες Δυνάμεις







# Διαφορικές εξισώσεις δοκών



- ΔΕΣ απειροστού στοιχείου  $dx$ :
- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{dN(x)}{dx} = -w_x(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -w(x)$$

## Διαφορικές εξισώσεις και διαγράμματα εντατικών μεγεθών

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w_y(x)$$

- η καμπτική ροπή έχει ακρότατα όπου η τέμνουσα δύναμη μηδενίζεται
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη δύναμη
  - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων ( $\Delta T\Delta$ )
  - ⇒ αλλαγή κλίσης στο διάγραμμα καμπτικών ροπών
- όπου υπάρχει συγκεντρωμένη ροπή
  - ⇒ αντίστοιχο άλμα στο διάγραμμα καμπτικών ροπών ( $\Delta K\rho$ )
- αν το φορτίο είναι πολυώνυμο βαθμού  $n$ 
  - ⇒ η τέμνουσα δύναμη θα είναι πολυώνυμο βαθμού  $n+1$
  - ⇒ η καμπτική ροπή θα είναι πολυώνυμο βαθμού  $n+2$

## Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΤΔ)

- αριθμός τομών κάθετα στον άξονα της δοκού
- εφαρμογή εξισώσεων ισορροπίας στο ΔΕΣ του αποκομμένου τμήματος
  - ⇒ διατύπωση εκφράσεων για τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη
- αλλαγή του μεγέθους της τέμνουσας μεταξύ δύο σημείων A και B:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \int_{X_A}^{XB} dV = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης του φορτίου μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση του ΔΤΔ ισούται με το αρνητικό μέγεθος του φορτίου
  - ⇒ αν το φορτίο είναι προς τα κάτω τότε η κλίση είναι αρνητική
- συγκεντρωμένη δύναμη
  - ⇒ άλμα στην τιμή της τέμνουσας δύναμης (ΔΤΔ)

## Διαγράμματα εντατικών μεγεθών (ΔΚΡ)

- αλλαγή του μεγέθους της ροπής μεταξύ δύο σημείων A και B

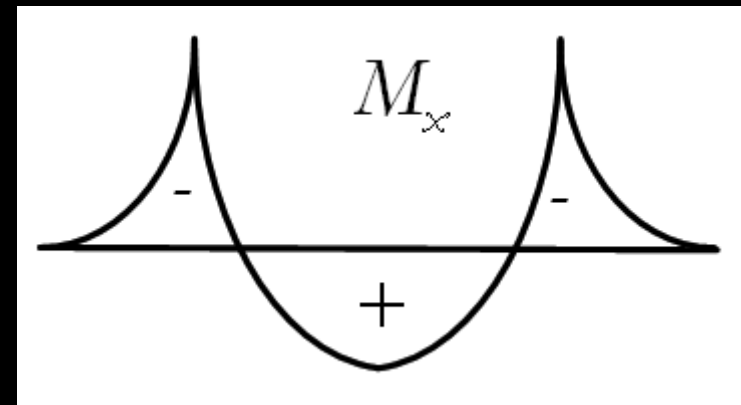
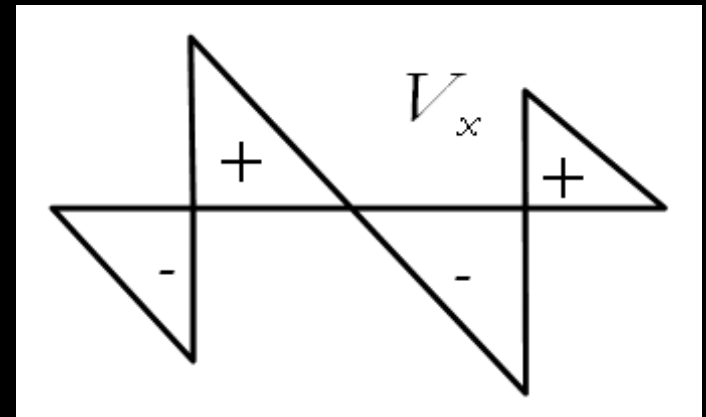
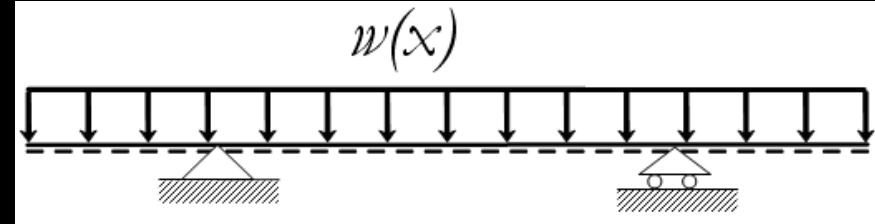
$$\Delta M_{AB} = M_B - M_A = \int_{X_A}^{XB} dM = \int_{X_A}^{XB} V(x) dx = - \int_{X_A}^{XB} w(x) dx$$

- το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας της καμπύλης των τεμνουσών δυνάμεων (ΔΤΔ) μεταξύ των σημείων A και B
- η κλίση της καμπύλης των καμπτικών ροπών σε ένα σημείο ισούται με το μέγεθος της τέμνουσας στο συγκεκριμένο σημείο
- αν σε ένα σημείο η τέμνουσα δύναμη είναι θετική τότε και η κλίση της καμπύλης της καμπτικής ροπής σε εκείνο το σημείο είναι θετική
- τα ακρότατα των καμπτικών ροπών εμφανίζονται στα σημεία όπου οι αντίστοιχες τέμνουσες δυνάμεις ισούνται με μηδέν
- συγκεντρωμένη ροπή  
⇒ άλμα στην τιμή της καμπτικής ροπής (ΔΚΡ)



# Κατασκευή διαγραμμάτων εντατικών μεγεθών

- υπολογισμός των αντιδράσεων
- ξεκινώντας με τις τιμές της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής στο αριστερό άκρο προχωρούμε προς τα δεξιά
- εξετάζουμε όλα τα σημεία με σχετικές αλλαγές (π.χ. όπου υπάρχουν συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές, ή όπου αρχίζουν και τελειώνουν κατανεμημένα φορτία, κλπ.) προσθέτοντας τα αντίστοιχα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες των φορτίων και τεμνουσών δυνάμεων, αντίστοιχα, σαν αλλαγές των τιμών των αντίστοιχων διαγραμμάτων



# Καμπυλότητα της παραμορφωμένης δοκού

- κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών (ΔΚΡ)

- θετική καμπτική ροπή

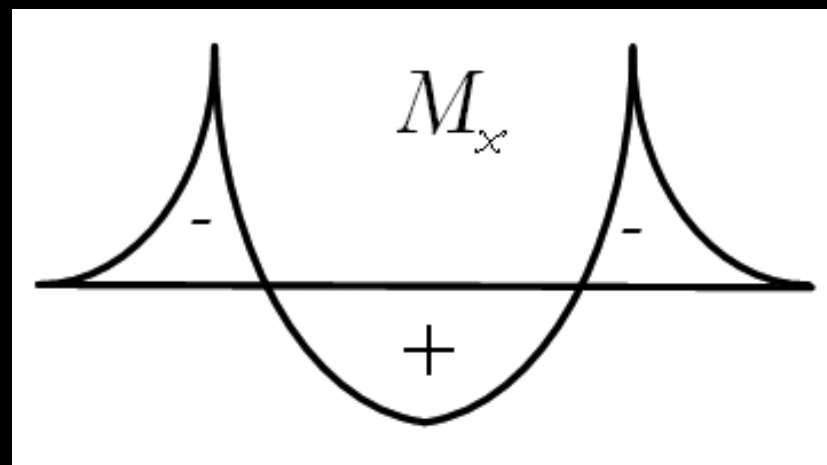
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (εφελκύει την κάτω ίνα της δοκού)

- αρνητική καμπτική ροπή

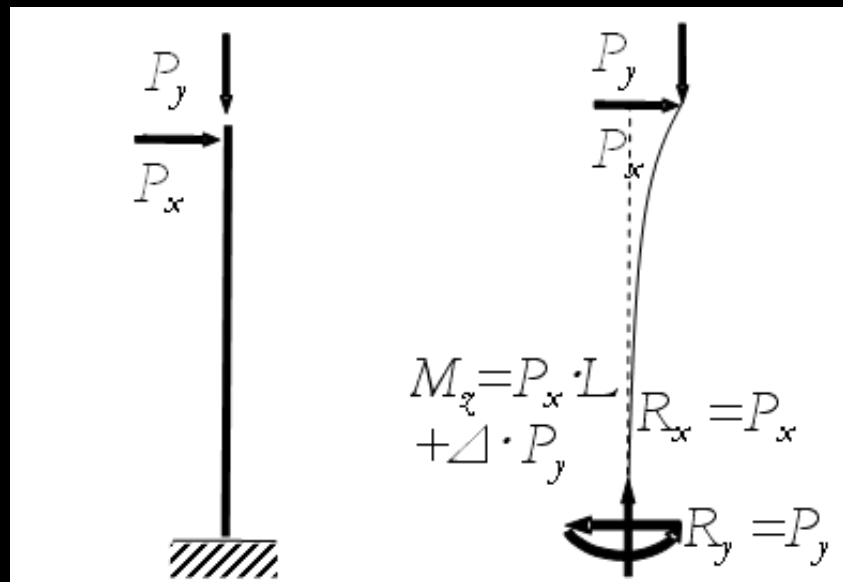
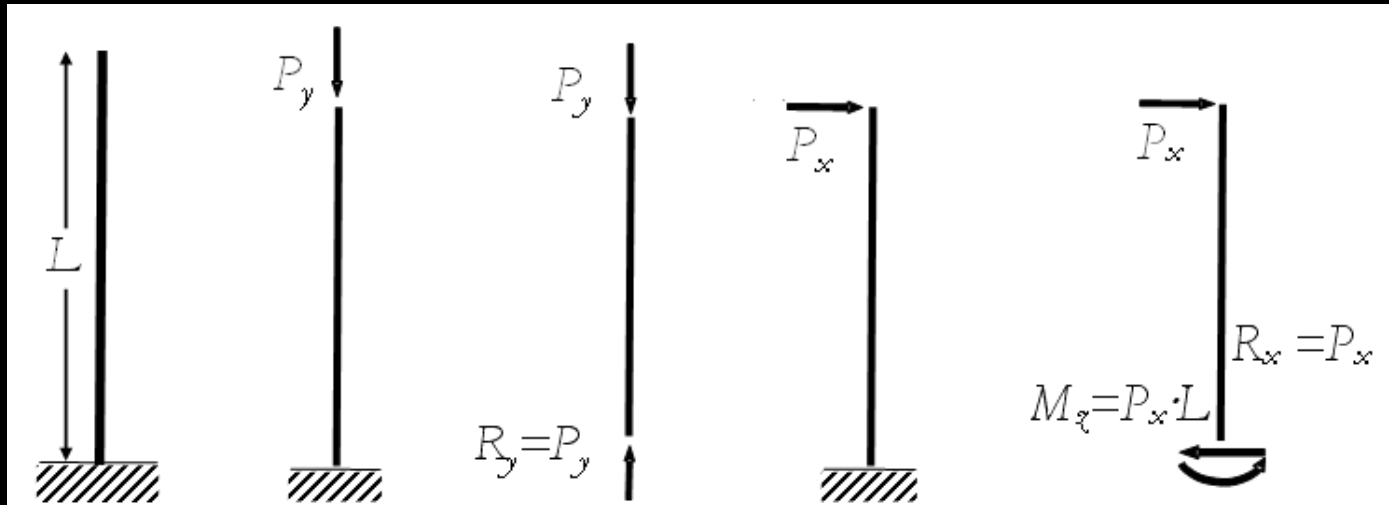
⇒ η καμπυλότητα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (εφελκύει την άνω ίνα της δοκού)

- μηδενική καμπτική ροπή

⇒ σημείο καμπής στην καμπυλότητα, δηλαδή αλλάζει η πλευρά στην οποία βλέπουν τα κοίλα από πάνω κάτω ή αντίστροφα.

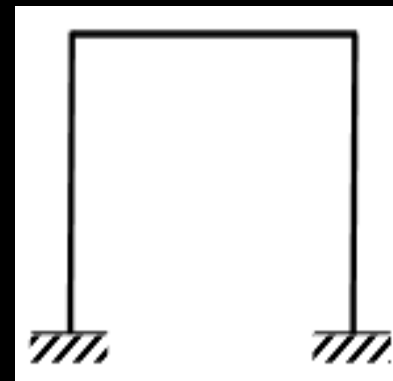
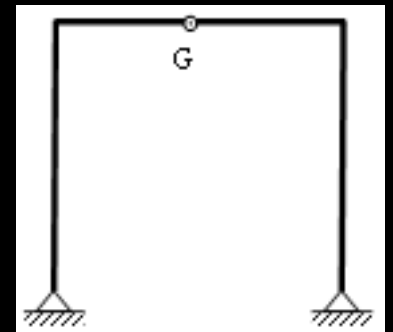
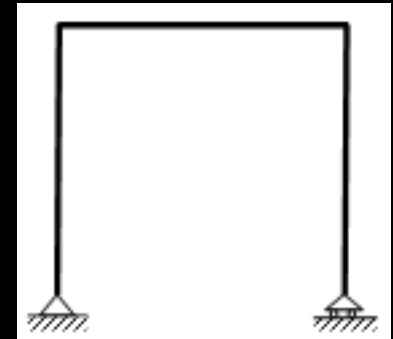
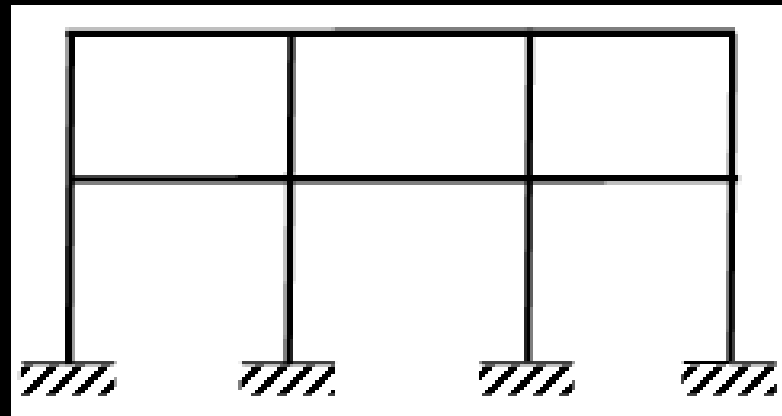


# Φαινόμενα P-Δ



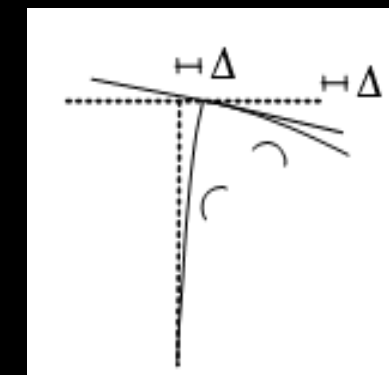
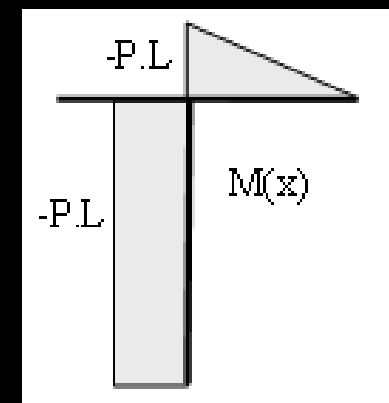
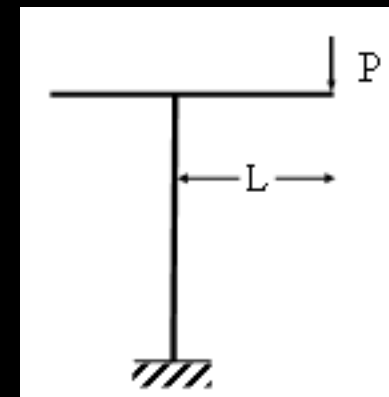
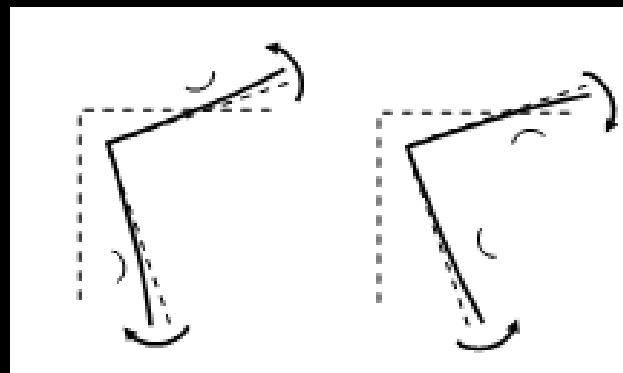
## Πλαίσια και πλαισιακές κατασκευές

- αποτελούνται από δοκούς και υποστυλώματα τα οποία συνδέονται στερεά σε κόμβους υπό γωνία, συνήθως  $90^\circ$
- οι συνδέσεις επιτρέπουν μεταβίβαση εντατικών μεγεθών
- αμετάβλητες οι γωνίες σύνδεσης στους κόμβους
- έλεγχος ορθότητας αποτελεσμάτων: για να ισορροπεί ένα πλαίσιο πρέπει να ισορροπούν και όλοι οι κόμβοι του
- ΔΚΡ σχεδιάζονται συνήθως από την εφελκυσόμενη μεριά
  - τοιχία
  - διαγώνιοι



# Παραμορφωμένες μορφές δοκών και πλαισίων

- μετακινήσεις δοκών και πλαισίων:
  - κυρίως λόγω καμπτικών παραμορφώσεων
- σχεδιασμός παραμορφωμένης μορφής:
  - κατασκευή διαγράμματος καμπτικών ροπών ( $\Delta K P$ )
  - καμπυλότητα συμβατή με  $\Delta K P$
  - συμβατότητα με δεσμεύσεις στις στηρίξεις
  - συμβατότητα με συνδέσεις μελών
  - αμετάβλητες σταθερές συνδέσεις κόμβων
  - ευκρινής καθορισμός
    - της φοράς μετατοπίσεων και στροφών
    - της καμπυλότητας (κοίλα)
    - των σημείων καμπής
  - ισορροπία κόμβων



# Χρησιμότητα υπολογισμού παραμορφώσεων και μετακινήσεων

- Έλεγχοι

- ασφάλειας

- εντατικών μεγεθών σε σχέση με τις επιτρεπόμενες αντοχές

- λειτουργικότητας

- διασφαλίζονται λειτουργικές ανάγκες μιας κατασκευής  
(π.χ. έλεγχος παραμορφώσεων και μετακινήσεων)

⇒ αναγκαίος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και μετακινήσεων ενός φορέα κάτω από την επίδραση κάποιων συγκεκριμένων δράσεων ή συνδυασμών δράσεων για σκοπούς *ελέγχου λειτουργικότητας*

- Επίσης, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των μετακινήσεων κατά την επίλυση υπερστατικών φορέων για την οποία δεν αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας

⇒ Οι επιπλέον εξισώσεις προκύπτουν από την διατύπωση της συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων του φορέα

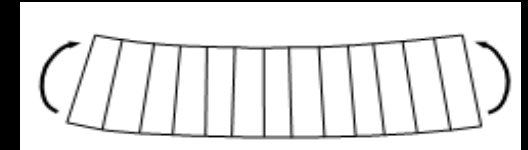
# Συνήθης παραδοχές

- Μικρές παραμορφώσεις και μετακινήσεις σε σχέση με τις διαστάσεις  
⇒ χρήση αρχικής απαραμόρφωτης γεωμετρίας και μορφής του φορέα

$$\tau = E \cdot \varepsilon$$

- Γραμμική-ελαστική συμπεριφορά του υλικού
  - γραμμική συμπεριφορά: οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
  - ελαστική συμπεριφορά: αν αφαιρεθούν όλα τα φορτία από τον φορέα τότε αυτός θα επιστρέψει στην αρχική αφόρτιστη θέση και γεωμετρία του χωρίς παραμένουσες παραμορφώσεις

- Αρχή της επαλληλίας.



- Αρχή της επιπεδότητας των διατομών (Bernoulli)

- Για γραμμικά μέλη υπό καμπτικές παραμορφώσεις θεωρείται ότι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα ενός μέλους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα ενός μέλους μετά την παραμόρφωση  
⇒ έτσι, έχοντας γραμμικά ελαστικό υλικό υπάρχει μια γραμμική μεταβολή των ορθών τάσεων μεταξύ των ακραίων ινών στα πέλματα ενός μέλους



# Εισαγωγή στις παραμορφώσεις και μετακινήσεις

- Ράβδοι δικτυωμάτων:
  - μόνο αξονικές δυνάμεις και παραμορφώσεις
- ⇒ υπολογισμός μετακινήσεων λαμβάνοντας υπόψη μόνο αξονικές παραμορφώσεις
- Δοκοί
  - η συνεισφορά των αξονικών και διατμητικών παραμορφώσεων στις μετακινήσεις μίας δοκού ή ενός πλαισίου είναι συνήθως αμελητέα συγκρινόμενη με τις καμπτικές παραμορφώσεις.
- ⇒ στις συνήθεις περιπτώσεις δοκών και πλαισίων μπορούμε να λάβουμε υπόψη μόνο τις καμπτικές παραμορφώσεις κατά τον υπολογισμό των μετακινήσεων αλλά και στην διατύπωση των εξισώσεων συμβιβαστότητας των μετακινήσεων, αγνοώντας τις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις



# Αξονικές παραμορφώσεις

- τα μέλη των δικτυωμάτων καταπονούνται μόνο από αξονικές δυνάμεις  $N$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε ομοιόμορφες ορθές τάσεις:

⇒ ομοιόμορφες ορθές τάσεις

$$\sigma_x = \tau_{xx} = \frac{N}{A}$$

- Νόμος του Hooke

$$\tau_{xx} = \sigma_x = E \varepsilon_{xx}$$

⇒ (συσχετίζει ορθές τάσεις και παραμορφώσεις)

( $E$ : μέτρο ελαστικότητας - *modulus of elasticity*)

- επιμήκυνση  $\Delta L$  μίας ράβδου

- μήκους,  $L$
- διατομής,  $A$

$$\Delta L = \varepsilon_{xx} \cdot L = \frac{\sigma_{xx}}{E} \cdot L = \frac{N \cdot L}{A \cdot E}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις

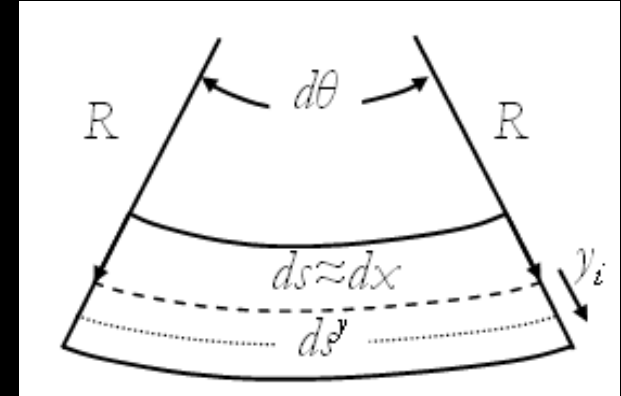
- ο άξονας της δοκού παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο που τοπικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από τμήματα κυκλικών τόξων με συγκεκριμένη ακτίνα καμπυλότητας.



- Χρήση ΔΚΡ για τον προσδιορισμό της καμπυλότητας
    - π.χ. στο πιο πάνω παράδειγμα, η θετική ροπή προκαλεί καμπτικές παραμορφώσεις με εφελκυσμό στις κάτω ίνες και θλίψη στις πάνω ίνες
  - οι παραμορφώσεις κάθετα στον άξονα της δοκού παριστάνονται ιδιαίτερα επαυξημένες ώστε να είναι πιο ευδιάκριτες
- ⇒ είναι απαραίτητο να μπορούν να υπολογιστούν οι βυθίσεις και κλίσεις κατά μήκος του ουδέτερου άξονα, δηλαδή να προσδιοριστεί η ελαστική καμπύλη, ή ελαστική γραμμή, μιας παραμορφωμένης δοκού.

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)

- απειροστό τμήμα της δοκού μήκους  $dx$ 
  - μόνο η ίνα στον ουδέτερο άξονα δεν παραμορφώνεται
  - οι ίνες κάτω και πάνω από την ίνα αυτή θλίβονται και εφελκύνονται αντίστοιχα με την καμπτική ροπή



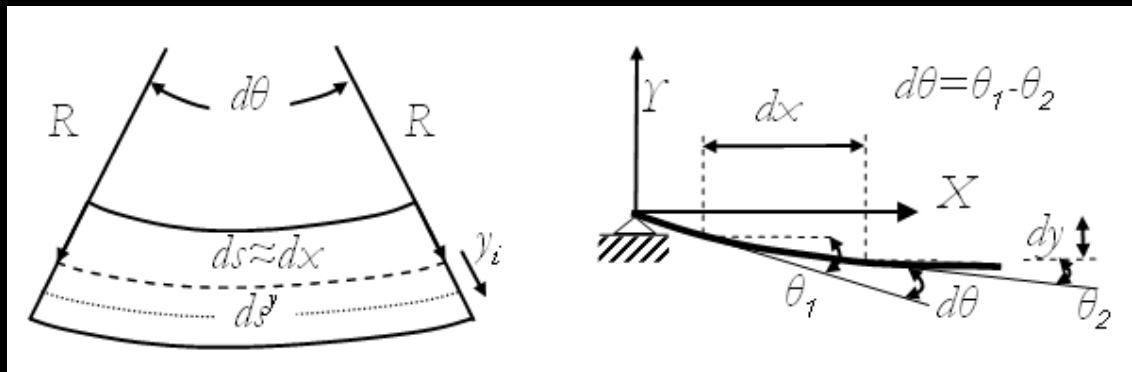
- ουδέτερο επίπεδο - ουδέτερος άξονας της δοκού

- *Αρχή του Bernoulli:*

κατά την καμπτική παραμόρφωση μίας δοκού, επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στον άξονα της δοκού πριν από την παραμόρφωση της δοκού, θεωρούνται ότι παραμένουν μετά την παραμόρφωση επίπεδα και κάθετα στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού

$$ds = dx = R \cdot d\theta$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- **καμπυλότητα:** η αλλαγή της κλίσης της ελαστικής καμπύλης της δοκού λόγω των καμπτικών παραμορφώσεων

$$d\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$ds = dx = R \cdot d\theta$$



$$\frac{l}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

- μήκος του τόξου παραμορφωμένης ίνας σε απόσταση  $y_l$  από τον ουδέτερο άξονα:

$$ds^{y_l} = (R + y_l) \cdot d\theta$$

- παραμόρφωση σε απόσταση  $y_l$ :

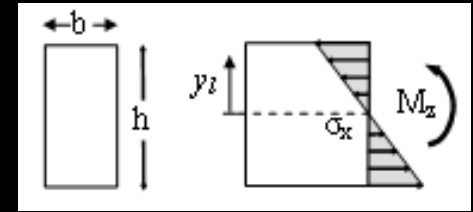
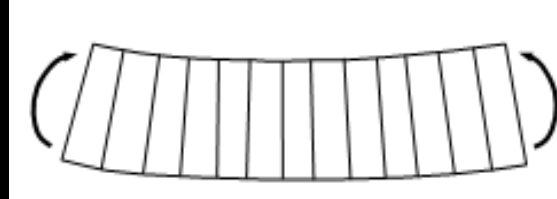
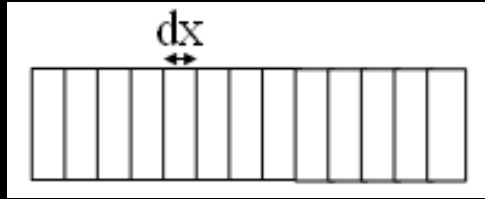
$$\epsilon_x^{y_l} = \frac{(R + y_l) \cdot d\theta - R \cdot d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{y_l}{R}$$



καμπυλότητα:

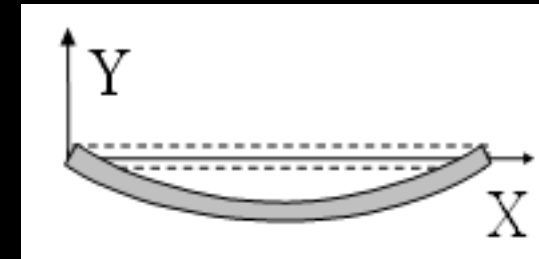
$$K_R = \frac{l}{R} = \frac{\epsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



- αν το υλικό έχει γραμμική-ελαστική συμπεριφορά
- καμπτική ροπή μιας παραμορφωμένης δοκού βάσει του ολοκληρώματος των ορθών τάσεων επί την απόσταση από τον ουδέτερο άξονα στην επιφάνεια της διατομής:

$$\sigma_x = \tau_{xx} = E \cdot \varepsilon_x$$



$$M_z = \iint_A \sigma_x \cdot y_l \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \varepsilon_x \cdot y_l \cdot b \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \cdot \frac{y_l}{R} \cdot y_l \cdot b \, dy = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$

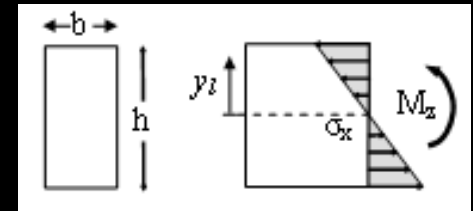
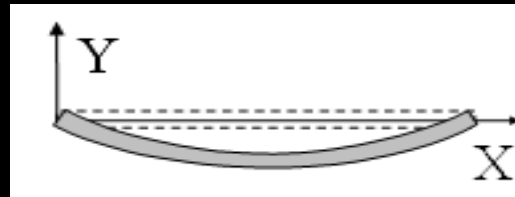
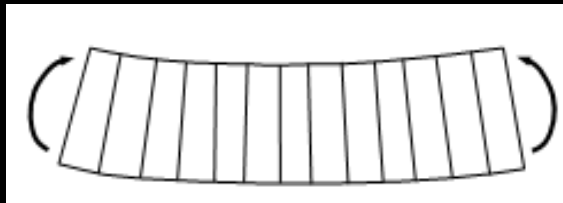
- ροπή αδράνειας:

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y_l^2 \cdot b \, dy$$



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$

# Καμπτικές παραμορφώσεις (συν.)



$$M_z = \frac{E \cdot I_z}{R}$$



$$K_R = \frac{1}{R} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$



$$M_z = E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

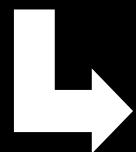
$$K_R = \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_x^{y_l}}{y_l}$$



$$\frac{M_z}{E \cdot I_z} = \frac{\varepsilon_x^{y_l}}{y_l}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}$$



ορθές τάσεις:

$$\sigma_x^{y_l} = \frac{M_z \cdot y_l}{I_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \approx \theta$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{R}$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$

# Μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- **γεωμετρικές μέθοδοι:**
  - χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό κλίσεων και βυθίσεων συγκεκριμένων σημείων στα μέλη ενός φορέα λόγω καμπτικών παραμορφώσεων παραλείποντας τη συνεισφορά των τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων στις παραμορφώσεις
  - βασίζονται στις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις ( $\Delta E$ )
- **ενεργειακές μέθοδοι:**
  - βασίζονται στο ισοζύγιο εξωτερικού και εσωτερικού έργου (δηλαδή ελαστικής ενέργειας), το οποίο μπορεί να είναι πραγματικό ή δυνατό έργο
    - εξωτερικό έργο: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
    - εσωτερικό έργο ή αλλιώς ελαστική ενέργεια: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων.
  - πρακτικά πολύ πιο συστηματικές και χρήσιμες από τις γεωμετρικές

# Γεωμετρικές μέθοδοι υπολογισμού μετακινήσεων

- Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)
- Μέθοδος ροπών (*moment-area method*)
- Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate beam method*)

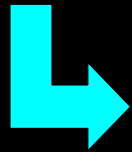
⇒ Χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν βυθίσεις και κλίσεις σημείων της παραμορφωμένης μορφής της δοκού, λαμβάνοντας υπόψη μόνο καμπτικές παραμορφώσεις.



# Μέθοδος διπλής ολοκλήρωσης (*double integration method*)

- Ολοκληρώνοντας την ΔΕ:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$



κλίση

$$\theta \approx \varepsilon\phi(\theta) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{E \cdot I_z} dx + C_1$$

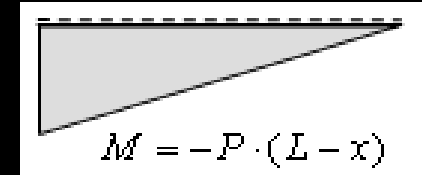
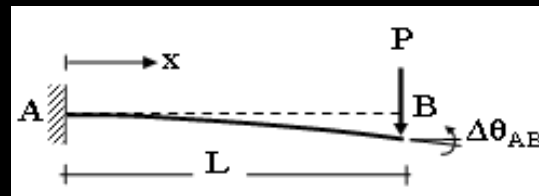
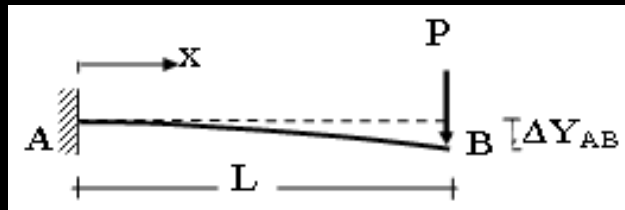


βύθιση

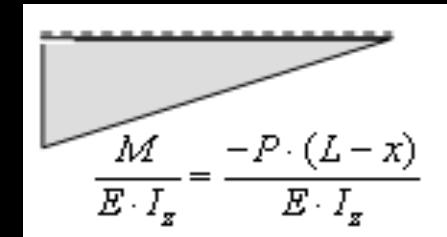
$$y(x) = \iint \frac{M}{E \cdot I_z} dx + C_1 \cdot x + C_2$$

- Οι σταθερές ολοκλήρωσης  $C_1$  και  $C_2$  προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις ή στις θέσεις συνδέσεων επιμέρους τμημάτων μιας δοκού.
- Θετική προσήμανση: (που έχει χρησιμοποιηθεί εδώ)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Θετική βύθιση: προς τα πάνω} \\ \text{Θετική στροφή: αντιωρολογιακή φορά} \end{array} \right.$

# Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 1



$$M(x) = -P \cdot (L - x)$$



$$\theta(x) \approx \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{M}{E \cdot I_z} dx = \int \frac{-P \cdot (L - x)}{E \cdot I_z} dx = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$\theta(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

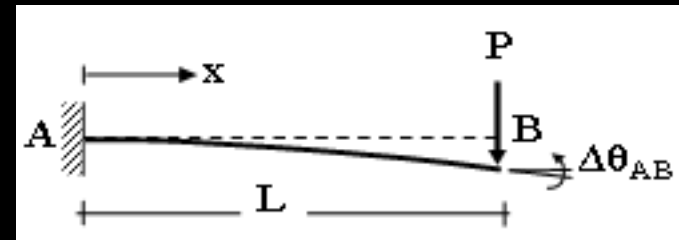
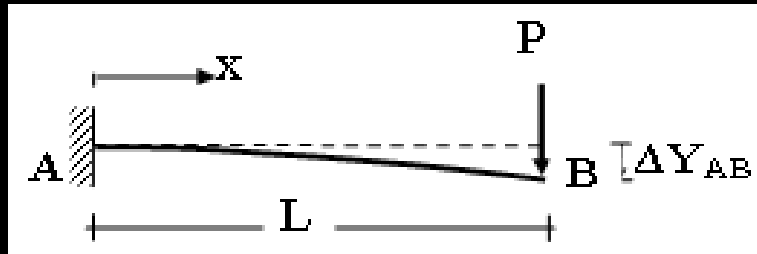
$$\theta(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Rightarrow y(x) = \int -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

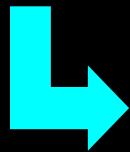
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

# Παράδειγμα μεθόδου διπλής ολοκλήρωσης # 1 (συν.)



$$\theta(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$



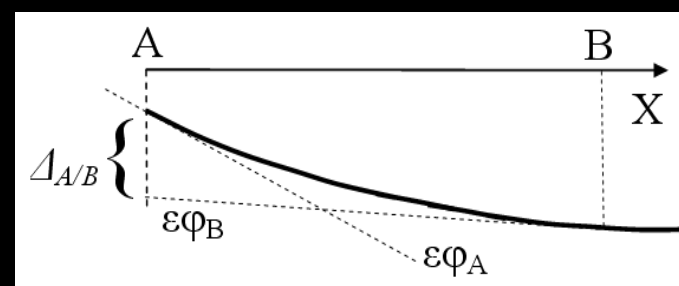
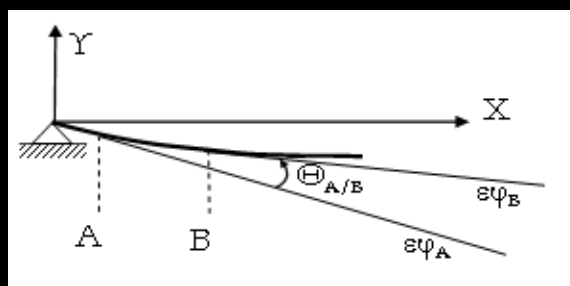
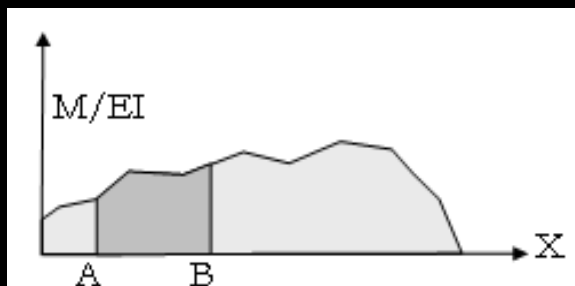
$$\theta(x=L) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \Rightarrow \underline{\theta(L) = -\frac{P L^2}{2 E \cdot I_z}}$$

$$y(x) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$



$$y(x=L) = -\frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) \Rightarrow \underline{y(L) = -\frac{P L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}}$$

# Μέθοδος ροπών (*moment-area method*)

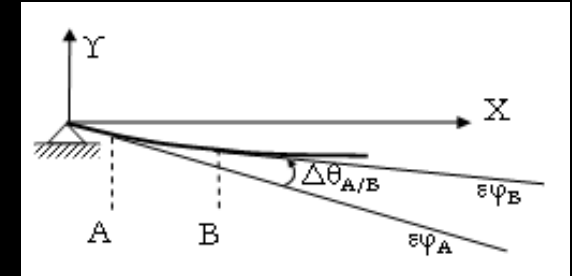
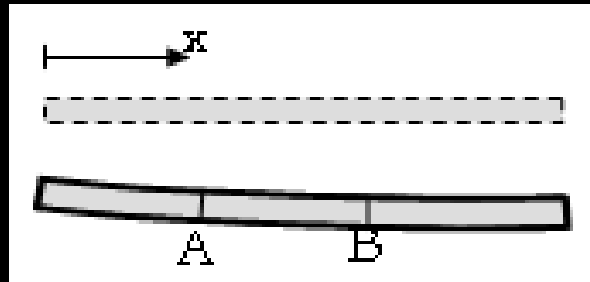
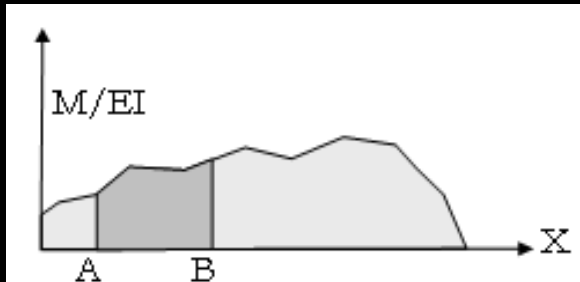


**1<sup>ον</sup> Θεώρημα:** “Η μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης σε δύο σημεία μιας συνεχούς παραμορφωμένης δοκού ισούται με το εμβαδόν του διαγράμματος  $M/EI$  μεταξύ αυτών των δύο σημείων”

**2<sup>ον</sup> Θεώρημα:** “Η κάθετη εφαπτομενική διαφορά  $\Delta_{A/B}$  της εφαπτόμενης στο σημείο  $A$  ως προς την εφαπτόμενη από ένα άλλο σημείο  $B$  μιας παραμορφωμένης δοκού, ισούται με τη ροπή του διαγράμματος  $M/EI$  μεταξύ των δύο σημείων ως προς το σημείο  $A$ , στο οποίο μετράται αυτή η, συνήθως κατακόρυφη διαφορά.”

- μπορούν να χρησιμοποιηθούν πίνακες για το εμβαδόν και τη θέση του κέντρου βάρους κοινών επιφανειών
- χρησιμοποιούνται εφαπτόμενες σε σημεία αγνώστου βύθισης και κλίσης και σε σημεία στηρίξεων, όπου οι μετακινήσεις συνήθως είναι μηδενικές

# Μέθοδος ροπών: 1<sup>ο</sup> Θεώρημα



$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$



δίνει την αλλαγή της κλίσης των εφαπτόμενων στα άκρα ενός απειροστού τμήματος μήκους

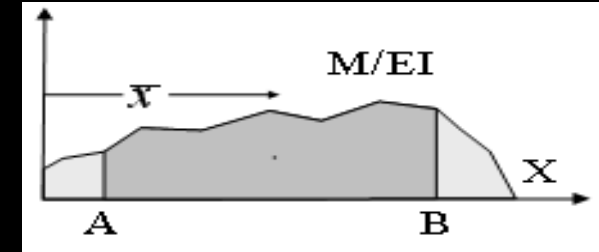
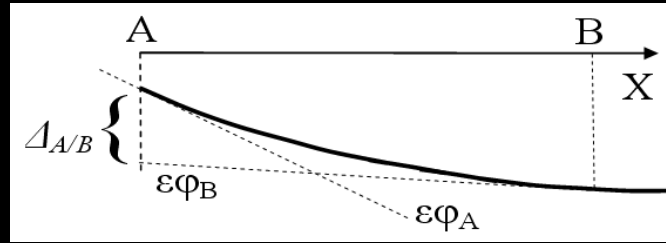
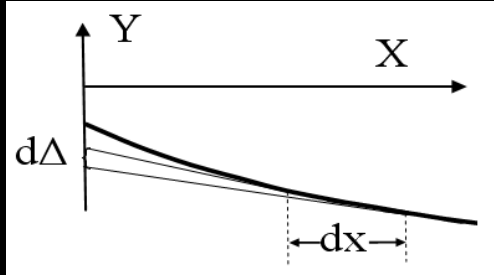


η μεταβολή της κλίσης μεταξύ των εφαπτόμενων σε δύο σημεία:

$$\theta_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{E \cdot I} dx$$

- η γωνία  $\theta_{A/B}$  μετράται εδώ σε ακτίνια (radians) αντιωρολογιακά μεταξύ της εφαπτόμενης στο σημείο A προς την εφαπτόμενη στο σημείο B
- δεν ισχύει για δοκούς με εσωτερικές ελευθερίες στροφών

# Μέθοδος ροπών: 2<sup>ο</sup> Θεώρημα



$$d\Delta = \bar{x} \cdot d\theta$$

$$d\theta = \frac{M dx}{EI}$$

$$d\Delta = \bar{x} \cdot \frac{M}{EI} dx$$

$$\Delta_{A/B} = \int_A^B d\Delta = \bar{x} \cdot \int_A^B d\theta$$

συντεταγμένη  
κέντρου βάρους

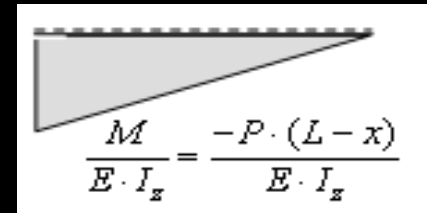
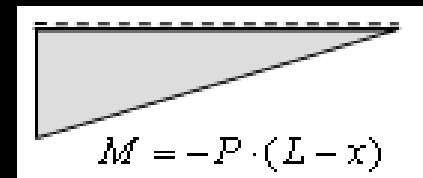
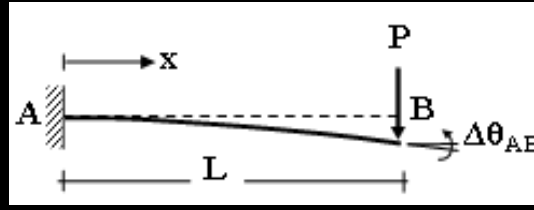
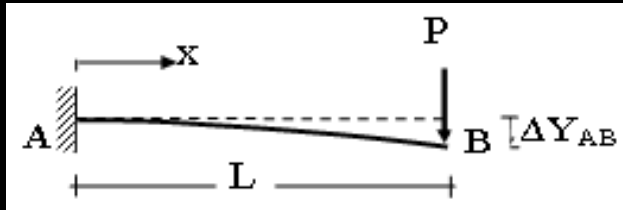
$$\bar{x} = \int_{x_A}^{x_B} x dx$$



$$\Delta_{A/B} = \bar{x} \cdot \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{E \cdot I} dx$$

Αν είναι θετικό (ή αρνητικό) το εμβαδόν της επιφάνειας του διαγράμματος  $M/EI$  από το  $A$  στο  $B$ , η εφαπτόμενη στο  $A$  είναι από πάνω (ή από κάτω, αντίστοιχα) από την εφαπτόμενη στο σημείο  $B$

# Παράδειγμα μεθόδου ροπών # 1



$$M(x) = -P \cdot (L - x)$$

αναλυτικά:

γραφικά (2<sup>ο</sup> θεώρημα):

$$\Delta_{BA} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = -\frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Delta_{B/A} = \bar{x} \cdot \int_{X_A}^{X_B} \frac{M}{E \cdot I} dx = \frac{2 \cdot L}{3} \cdot \int_{X_A}^{X_B} \frac{-P \cdot (L - x)}{E \cdot I} dx = -\frac{2 \cdot P \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{X_A=0}^{X_B=L} = -\frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

αναλυτικά:

γραφικά (1<sup>ο</sup> θεώρημα):

$$\theta_{A/B} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_{A/B} = \int_{X_A}^{X_B} \frac{M}{E \cdot I} dx = -\frac{P}{E \cdot I} \int_{X_A}^{X_B} (L - x) dx = -\frac{P}{E \cdot I} \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{X_A=0}^{X_B=L} = -\frac{P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

# Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate-beam method*)

- πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των  $\Delta E$  που συνδέουν τις τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές με το επιβαλλόμενο φορτίο και των  $\Delta E$  που συνδέουν τη βύθιση και κλίση μιας παραμορφωμένης δοκού με την καμπυλότητα.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\frac{dV}{dx} = -w(x)} & \longleftrightarrow & \boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}} \\ \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -w(x)} & \longleftrightarrow & \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}} \end{array}$$

⇒ εκμεταλλευόμενοι αυτή την πλήρη αντιστοιχία να υπολογίσουμε τις βυθίσεις και κλίσεις μιας δοκού χρησιμοποιώντας μια άλλη βοηθητική δοκό, η οποία ονομάζεται **συζυγής δοκός** ή **ομόλογη δοκός**,



# Μέθοδος ομόλογης δοκού (*conjugate-beam method*)

- η ομόλογη δοκός έχει το ίδιο μήκος με την πραγματική δοκό και στηρίξεις και φόρτιση που τηρούν την πιο πάνω αντιστοιχία.

⇒ η ομόλογη δοκός θα πρέπει να φορτιστεί με φορτίο  $M/EI$ , το οποίο προκύπτει από την επίλυση της πραγματικής δοκού κάτω από τη φόρτιση και την εύρεση των καμπτικών ροπών κατά μήκος της δοκού

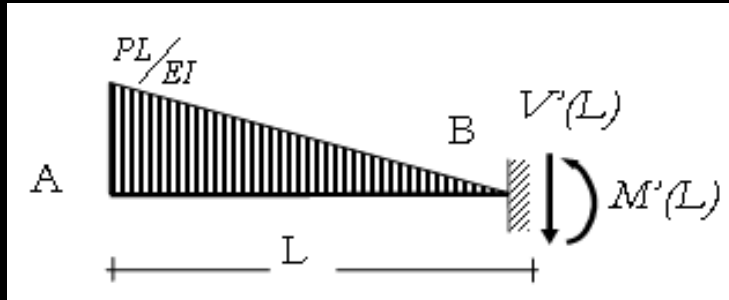
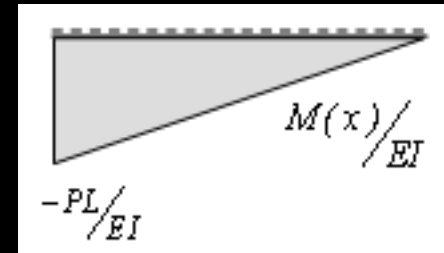
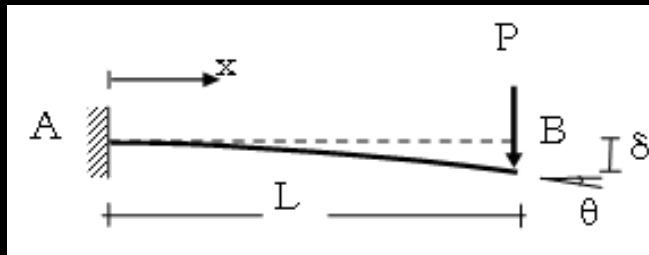
⇒ αυτό το φορτίο πρέπει να επιβληθεί προς τα πάνω ή κάτω, ανάλογα με το εάν το είναι θετικό ή αρνητικό, αντίστοιχα.

⇒ για την πλήρη αντιστοιχία, σε όποια σημεία η πραγματική δοκός έχει μηδενική τέμνουσα ή ροπή, θα πρέπει η ομόλογη δοκός να έχει μηδενική κλίση ή βύθιση, αντίστοιχα αλλά και αντίστροφα.



“Η βύθιση  $y(x)$  και η κλίση  $\theta(x)$  σε ένα σημείο της πραγματικής δοκού ισούνται, αντίστοιχα, με την αντίστοιχη καμπτικών ροπή  $M(x)$  και την τέμνουσα δύναμη  $V(x)$  στο αντίστοιχο σημείο της ομόλογης δοκού”

# Παράδειγμα μεθόδου ομόλογης δοκού # 1



ισοροπία  
ομόλογης  
δοκού:

$$\theta_B = V'(L) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$y_B = M'(L) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

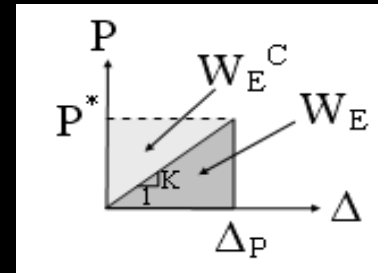
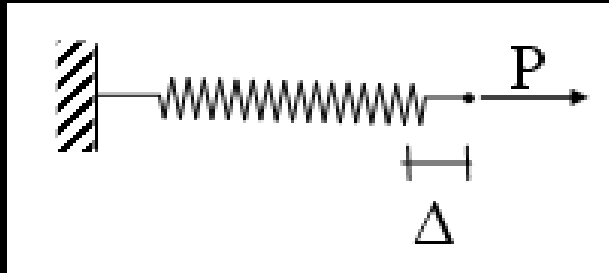
# Εισαγωγή στις ενεργειακές μεθόδους

- βασίζονται στο ισοζύγιο της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας (ή εσωτερικού έργου) και του εξωτερικού έργου
    - *εξωτερικό έργο (external work)*: το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία κατά τη μετακίνηση τους λόγω παραμορφώσεων του φορέα
    - *εσωτερικό έργο (internal work)* ή αλλιώς *ελαστική ενέργεια (elastic strain energy)*: η ενέργεια, ή το εσωτερικό έργο, η οποία αποθηκεύεται στο υλικό λόγω τάσεων και παραμορφώσεων
  - κύριες ενεργειακές μέθοδοι:
    - αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο)
    - θεωρήματα Castigliano
    - **αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)**
- ⇒ η **ΑΔΕ** αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των μετακινήσεων και τη συστηματική ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής

# Εξωτερικό έργο

- επιβολή φορτίων σε ένα φορέα
  - ⇒ παραμόρφωση φορέα
  - ⇒ μετακίνηση σημείων εφαρμογής εξωτερικών φορτίων
- εξωτερικό έργο:
  - αν η εφαρμοζόμενη δύναμη ή ροπή παραμένει σταθερή
    - ⇒ ισούται με το γινόμενο μιας δύναμης ή ροπής με τη μετακίνηση (μετάθεση ή στροφή) του σημείου εφαρμογής
  - αν η εφαρμοζόμενη δύναμη ή ροπή δεν παραμένει σταθερή
    - ⇒ το έργο υπολογίζεται με ολοκλήρωση
- θετικό έργο:
  - όταν η δύναμη ή ροπή και η μετάθεση ή στροφή, αντίστοιχα, είναι στην ίδια διεύθυνση
- αρνητικό το έργο:
  - αν είναι αντίθετης φοράς

# Γενικευμένες εξισώσεις για γραμμικά ελαστικό υλικό



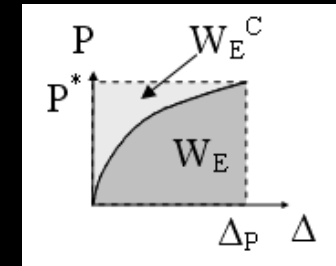
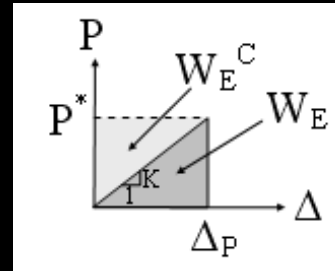
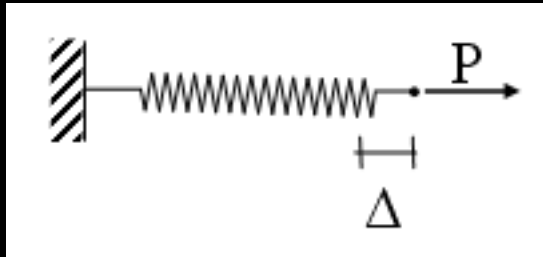
- Έργο εξωτερικών δυνάμεων από μετακινήσεις εξαιτίας των ιδίων δυνάμεων, φορτίων και ροπών:

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i \cdot \Delta_i + \frac{1}{2} \sum M_i \cdot \phi_i + \frac{1}{2} \int w(x) \cdot \Delta(x) dx$$

- Έργο εξωτερικών δυνάμεων από μετακινήσεις εξαιτίας άλλων δυνάμεων, φορτίων και ροπών:

$$W = \sum P_i \cdot \Delta_i + \sum M_i \cdot \phi_i + \int w(x) \cdot \Delta(x) dx$$

# Εξωτερικό έργο και συμπληρωματικό εξωτερικό έργο



- γραμμικό υλικό  
εξωτερικό έργο:

$$W_E = \int_0^{\Delta_P} P d\Delta = \int_0^{\Delta_P} K \Delta d\Delta = \frac{1}{2} K \Delta_P^2$$

συμπληρωματικό εξωτερικό έργο (*complimentary external work*):

$$W_E^C = \int_0^{P^*} \Delta dP = \int_0^{P^*} \frac{P}{K} dP = \frac{1}{2} \frac{P^{*2}}{K} = \frac{1}{2} K \Delta_P^2 = W_E$$

- μη γραμμικό υλικό

εξωτερικό  
έργο:

$$W_E = \int_0^{\Delta_P} P d\Delta$$

συμπληρωματικό  
εξωτερικό έργο:

$$W_C^E = \int_0^{P^*} \Delta dP$$

# Εσωτερικό έργο (ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης)

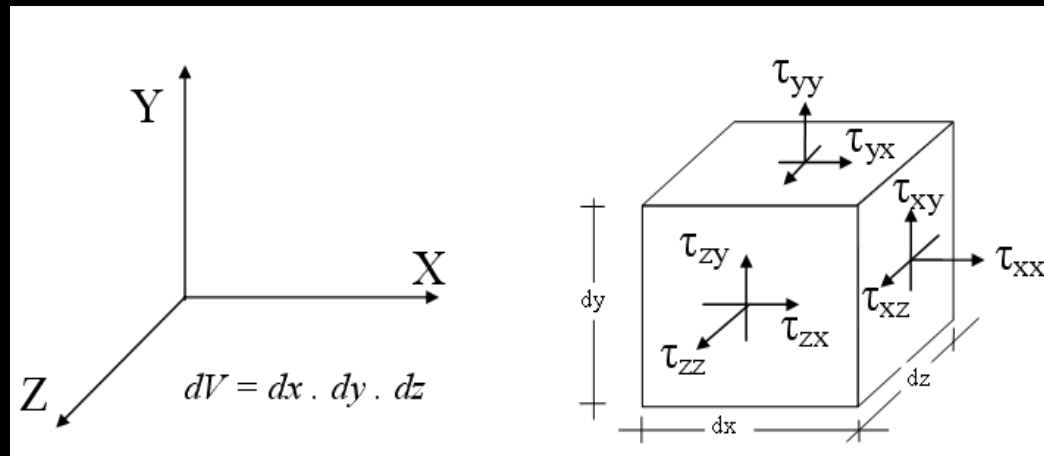
- ενέργεια λόγω των τάσεων κατά τις αντίστοιχες παραμορφώσεις
- γενική περίπτωση τρισδιάστατου σώματος

- απειροστό στοιχείο:

$$dV = dx \times dy \times dz$$

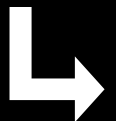


$$dU = \int_0^{\varepsilon} \tau d\varepsilon$$



- Γραμμικά ελαστικό υλικό:

$$\tau = E \cdot \varepsilon$$



$$dU = \int_0^{\varepsilon} E \cdot \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \tau \cdot \varepsilon$$

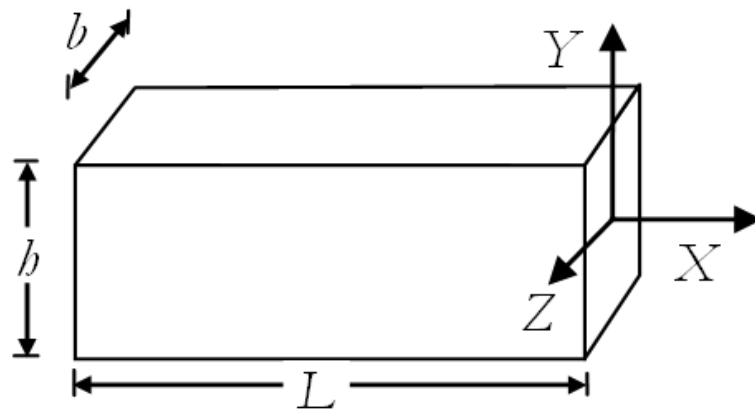


$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \tau \varepsilon dV$$

# Ελαστική ενέργεια γραμμικών δομικών στοιχείων

- εκφράζοντας τις τάσεις και παραμορφώσεις, κατά τον υπολογισμό της ελαστικής ενέργειας, συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

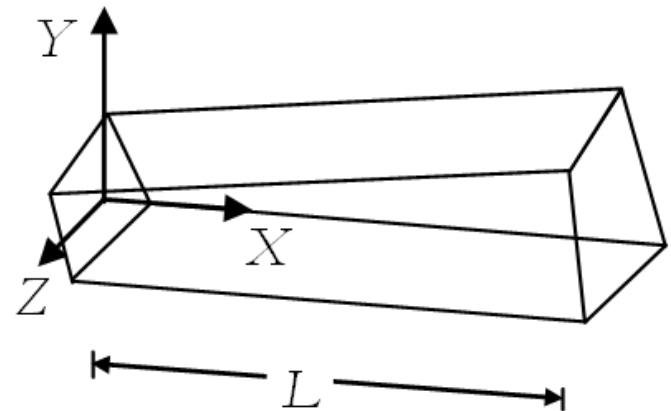
→ μπορούμε να διατυπώσουμε τις επιπλέον εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση υπερστατικών φορέων



$$A = b \cdot b$$

$$A_y = A_z = \frac{b \cdot b}{1.2}$$

$$I_{zz} = \frac{b \cdot b^3}{12}, \quad I_{yy} = \frac{b \cdot b^3}{12}$$



$$A(x) = \iint dy \, dz$$

$$I_y = \iint_A z^2 \, dy \, dz$$

$$I_z = \iint_A y^2 \, dy \, dz$$



## Συνολική ελαστική ενέργεια (εσωτερικό έργο)

- γενική περίπτωση γραμμικών μελών έχοντας περισσότερες από μια μορφές παραμόρφωσης, εφόσον οι παραμορφώσεις προκαλούνται από τις αντίστοιχες δυνάμεις και ροπές οι οποίες μεταβάλλονται γραμμικά με τις παραμορφώσεις:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( N \left( \frac{N}{AE} \right) + V_y \left( \frac{V_y}{GA_y} \right) + V_z \left( \frac{V_z}{GA_z} \right) + T \left( \frac{T}{GJ} \right) + M_y \left( \frac{M_y}{EI_y} \right) + M_z \left( \frac{M_z}{EI_z} \right) \right) dx$$

- Ελαστική ενέργεια λόγω κάποιου άλλου αιτίου:  
(όταν τα εντατικά μεγέθη παραμένουν σταθερά κατά την παραμόρφωση)

$$U = \int_0^L \left( N \left( \frac{N}{AE} \right) + V_y \left( \frac{V_y}{GA_y} \right) + V_z \left( \frac{V_z}{GA_z} \right) + T \left( \frac{T}{GJ} \right) + M_y \left( \frac{M_y}{EI_y} \right) + M_z \left( \frac{M_z}{EI_z} \right) \right) dx$$

# Αρχή διατήρησης της ενέργειας (πραγματικό έργο)

- εξωτερικό έργο  $W_E$ :
  - έργο λόγω μετακινήσεων των σημείων εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων
- εσωτερικό έργο  $W_i$ , ή ελαστική ενέργεια  $U$  παραμόρφωσης:
  - ελαστική ενέργεια που 'αποθηκεύεται' υπό μορφή τάσεων και παραμορφώσεων

αρχή διατήρησης της ενέργειας:

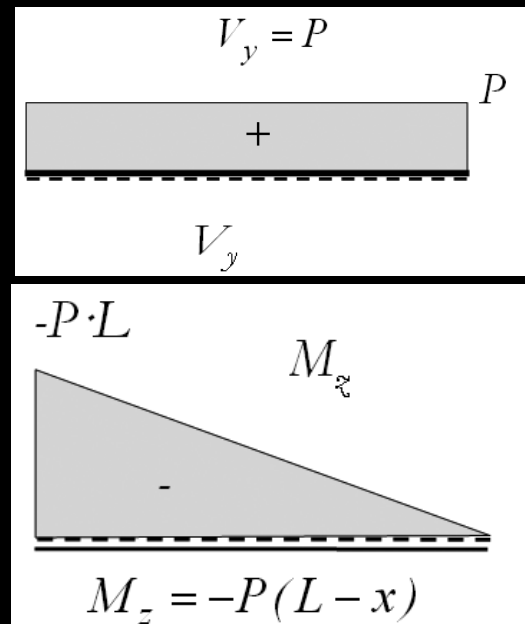
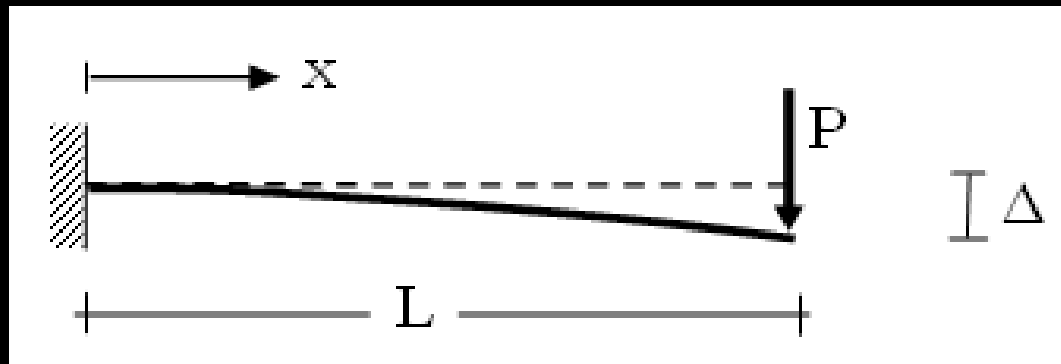
$$W_E = U$$

το εξωτερικό έργο  $W_E$  λόγω εξωτερικών φορτίων πρέπει να ισούται με την ελαστική ενέργεια  $U$  του φορέα λόγω των προκαλούμενων τάσεων και παραμορφώσεων ώστε να διατηρείται η συνολική ενέργεια του συστήματος:

θεωρώντας ότι:

- τα φορτία ασκούνται τόσο αργά ώστε να μην προκαλείται κινητική ή θερμοκρασιακή ενέργεια
- όλο το έργο το οποίο κάνουν οι εξωτερικές δυνάμεις και ροπές αποθηκεύεται υπό μορφή ελαστικής ενέργειας στα μέλη της κατασκευής τα οποία παραμορφώνονται αντίστοιχα
- δεν υπάρχει τρόπος απορρόφησης της ενέργειας στο σύστημα

# Παράδειγμα εφαρμογής της αρχής διατήρησης της ενέργειας



- εξωτερικό έργο:

$$W_E = \frac{1}{2} P \Delta$$

- εσωτερικό έργο (ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( V_y \left( \frac{V_y}{GA_y} \right) + M_z \left( \frac{M_z}{EI_z} \right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{V_y(x)^2}{GA_y} + \frac{M_z(x)^2}{EI_z} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{P^2}{GA_y} + \frac{P^2 (L-x)^2}{EI_z} \right) dx$$

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P^2 x}{GA_y} + \frac{x P^2 L^2}{EI_z} + \frac{x^3 P^2}{3EI_z} - \frac{x^2 P^2 L}{EI_z} \right\}_0^L = \frac{1}{2} \left( \frac{P^2 L}{GA_y} + \frac{P^2 L^3}{EI_z} + \frac{P^2 L^3}{3EI_z} - \frac{P^2 L^3}{EI_z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{P^2 L}{GA_y} + \frac{P^2 L^3}{3EI_z} \right)$$

- Αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$W_E = U$$



$$\frac{1}{2} P \Delta = \frac{1}{2} \left( \frac{P^2 L}{G A_y} + \frac{P^2 L^3}{3 E I_z} \right)$$



$$\Delta = \frac{P L}{G A_y} + \frac{P L^3}{3 E I_z}$$

- Χρησιμοποιώντας κάποιες λογικές τιμές για τα διάφορα μεγέθη και παραμέτρους:

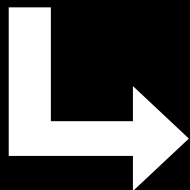
$$b = 0.25 \text{ m}$$
$$h = 0.50 \text{ m}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

$$P_l = 10,000 \text{ N} = 10 \text{ KN}$$

$$E = 25 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 25 \text{ GPa}$$

$$G = 10 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10 \text{ GPa}$$



$$A_y = \frac{b \cdot h}{1.2} = \frac{0.25 \cdot 0.50}{1.2} = 0.10417 \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{b h^3}{12} = \frac{0.25 \cdot 0.50^3}{12} = 0.00260 \text{ m}^4$$



$$\Delta = \frac{10 \text{ KN} \cdot 5 \text{ m}}{10 \text{ GPa} \cdot 0.10417 \text{ m}^2} + \frac{10 \text{ KN} \cdot (5 \text{ m})^3}{3 \cdot 25 \text{ GPa} \cdot 0.00260 \text{ m}^4} = 0.000048 \text{ m} + 0.0064 \text{ m} = 0.006448 \text{ m} = 0.006 \text{ m}$$

# Θεωρήματα Castigliano

Το εξωτερικό έργο είναι μια συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων και έτσι αν ένα φορτίο μεταβληθεί, τόσο το εξωτερικό  $W_E$  όσο και το εσωτερικό  $W_I$  έργο, πρέπει να αλλάξουν, ώστε να συνεχίσει να ισχύει η αρχή της διατήρησης της ενέργειας

$$W_E = f(P_i, M_i, w_i)$$



$$W_E + dW_E = W_I + dW_I$$

$$W_E^c + dW_E^c = W_I^c + dW_I^c$$

# 1<sup>ο</sup> θεώρημα Castigliano

μεταβάλλοντας το σημείο εφαρμογής ενός φορτίου  $P_j$  κατά  $d\Delta_j$ :

→ το εξωτερικό έργο μεταβάλλεται κατά:

$$dW_E \approx P_j \cdot d\Delta_j$$

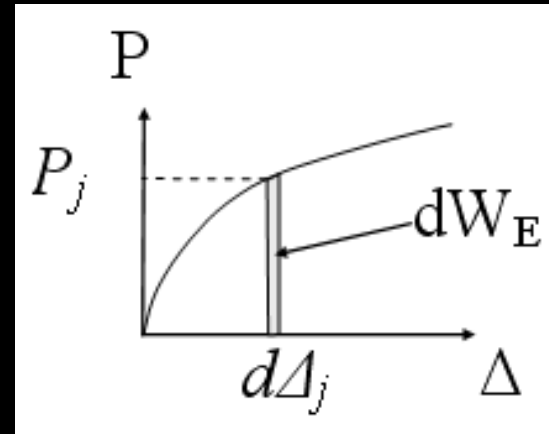
→ η ελαστική ενέργεια αλλάζει κατά:

$$dW_I = dU = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j} \cdot d\Delta_j$$

$$W_E + dW_E = W_I + dW_I$$



$$P_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}$$



‘Η μερική παράγωγος της ελαστικής ενέργειας ως προς τη μετακίνηση η οποία αντιστοιχεί σε ένα από τα εξωτερικά φορτία (συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή) ισούται με το συγκεκριμένο φορτίο.’

## 2<sup>ο</sup> θεώρημα Castigliano

μεταβάλλοντας ένα φορτίο  $P_j$  κατά  $dP_j$ :

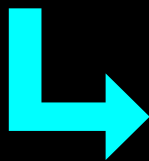
➔ το εξωτερικό συμπληρωματικό έργο μεταβάλλεται κατά:

$$dW_E^c \approx \Delta_j \cdot dP_j$$

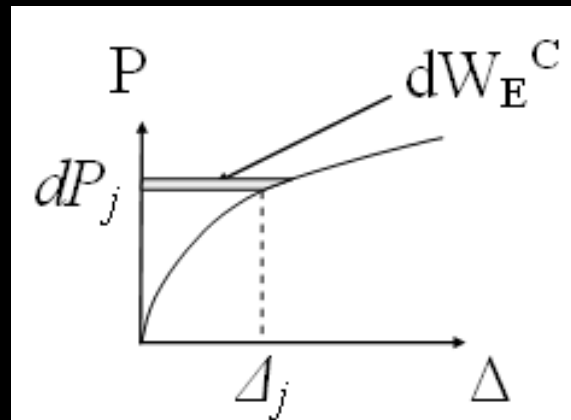
➔ η συμπληρωματική ελαστική ενέργεια αλλάζει κατά:

$$dU^c = \frac{\partial U^c}{\partial P_j} \cdot dP_j$$

$$W_E^c + dW_E^c = W_I^c + dW_I^c$$



$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

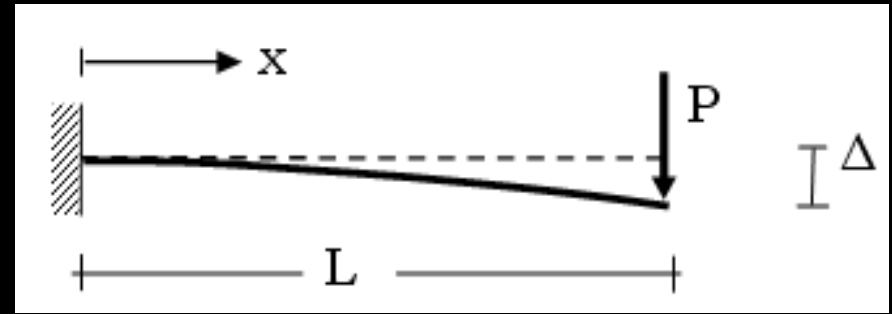


‘Η μερική παράγωγος της συμπληρωματικής ελαστικής ενέργειας ως προς οποιοδήποτε από τα εξωτερικά φορτία (συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή) ισούται με τη μετακίνηση στο σημείο εφαρμογής και στη διεύθυνση του συγκεκριμένου φορτίου.’

# Υπολογισμός μετακινήσεων με το 2<sup>ο</sup> θεώρημα Castigliano

- υπολογισμός βύθισης του άκρου προβόλου λόγω δύναμης  $P_1$ :

➔ πρέπει να πάρουμε τη μερική παράγωγο του εσωτερικού έργου ως προς τη δύναμη  $P_1$



$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \left( \frac{1}{2} \int_0^L \left( V_y \left( \frac{V_y}{G A_y} \right) + M_z \left( \frac{M_z}{E I_z} \right) \right) dx \right) = \int_0^L \left( \frac{\partial V_y}{\partial P_1} \left( \frac{V_y}{G A_y} \right) + \frac{\partial M_z}{\partial P_1} \left( \frac{M_z}{E I_z} \right) \right) dx$$

$$V_y = P_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V_y}{\partial P_1} = 1$$

$$M_z = -P_1 \cdot (L - x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_z}{\partial P_1} = -(L - x)$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \int_0^L \left( \left( \frac{V_y}{G \cdot A_y} \right) + (L - x) \cdot \left( \frac{M_z}{E \cdot I_z} \right) \right) dx = \int_0^L \left( \frac{P}{G \cdot A_y} + \frac{P \cdot (L - x)^2}{E \cdot I_z} \right) dx = \frac{P \cdot L}{G \cdot A_y} + \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}$$



# Εισαγωγή στην Αρχή των Δυνατών Έργων (ΑΔΕ)

- αποτελεί τη βάση για τον υπολογισμό των μετακινήσεων και τη συστηματική ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής
- η πιο σημαντική διαδικασία υπολογισμού των μετακινήσεων ενός συγκεκριμένου σημείου ενός φορέα αφού:
  - είναι εφαρμόσιμη σε διαφορετικά είδη κατασκευών
  - έχει δυνατότητες συμπερίληψης, πέρα από τα συνήθη φορτία, άλλων δράσεων, όπως υποχωρήσεις στηρίξεων, θερμοκρασιακές μεταβολές και κατασκευαστικά ατέλειες
- βασίζεται στο ισοζύγιο του *εξωτερικού δυνατού έργου* με το *εσωτερικό δυνατό έργο*, δηλαδή την *ελαστική δυνατή ενέργεια*

## Αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)

- Εάν μία κατασκευή, η οποία βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση, υποβληθεί σε μια επιπλέον νοητή (δυνατή) φόρτιση, ή μετακίνηση, θα αναπτυχθούν επιπλέον εντατικά μεγέθη και τάσεις καθώς και θα προκύψουν επιπλέον παραμορφώσεις και μετακινήσεις
- σύμφωνα με την ΑΔΕ:

*το εξωτερικό δυνατό έργο και το εσωτερικό δυνατό έργο πρέπει να είναι ίσα ώστε να διατηρείται η συνολική ενέργεια του συστήματος*

$$\delta W_E = \delta W_I = \delta U$$

# Εναλλακτικές διατυπώσεις της ΑΔΕ

- *αρχή των δυνατών μετακινήσεων:*

προκύπτει από εφαρμογή δυνατών μετακινήσεων και το ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού δυνατού έργου.

⇒ *μέθοδοι των μετακινήσεων*

- *αρχή των δυνατών δυνάμεων:*

προκύπτει από εφαρμογή δυνατών δυνάμεων και το ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού συμπληρωματικού δυνατού έργου.

⇒ *μέθοδοι των δυνάμεων*

# Αρχή των δυνατών έργων

## - Αρχή των δυνατών μετακινήσεων

- εφαρμογή δυνατών μετακινήσεων και παραμορφώσεων
  - εφαρμογή σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από εξωτερικά επιβαλλόμενες (πραγματικές) φορτίσεις, δυνατών ('νοητών') μετακινήσεων, οι οποίες είναι συμβατές με τις συνθήκες στήριξης και εσωτερικές συνδέσεις του φορέα
- ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού δυνατού έργου:
  - το εξωτερικό δυνατό έργο, από την δυνατή μετακίνηση των πραγματικών φορτίσεων, πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή ενέργεια, την οποία πραγματοποιούν οι τάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα από τα πραγματικά φορτία εσωτερικά εντατικά μεγέθη, κατά τις δυνατές παραμορφώσεις.

$$\delta W_E = \delta W_I$$

# Αρχή των δυνατών συμπληρωματικών έργων - Αρχή των δυνατών δυνάμεων

- εφαρμογή δυνατών δυνάμεων και ροπών
    - εφαρμόζουμε σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από εξωτερικά επιβαλλόμενες φορτίσεις, μια δυνατή εξωτερική φόρτιση και τα αντίστοιχα δυνατά εσωτερικά εντατικά μεγέθη
  - ισοζύγιο του εξωτερικού και εσωτερικού συμπληρωματικού δυνατού έργου:

$$\delta W_E^c = \delta W_I^c$$

    - το εξωτερικό δυνατό συμπληρωματικό έργο, από την μετακίνηση των δυνατών φορτίσεων κατά τις πραγματικές μετακινήσεις, πρέπει να ισούται με την ελαστική δυνατή συμπληρωματική ενέργεια, την οποία πραγματοποιούν οι τάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα προκαλούμενα από τα δυνατά φορτία εσωτερικά εντατικά μεγέθη, κατά τις πραγματικές παραμορφώσεις.
- ⇒ μπορούμε να υπολογίσουμε μία άγνωστη μετακίνηση εφαρμόζοντας μια δυνατή φανταστική δύναμη, ή ροπή, όπου ζητείται ο υπολογισμός της.

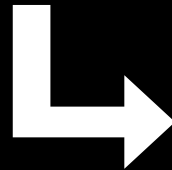
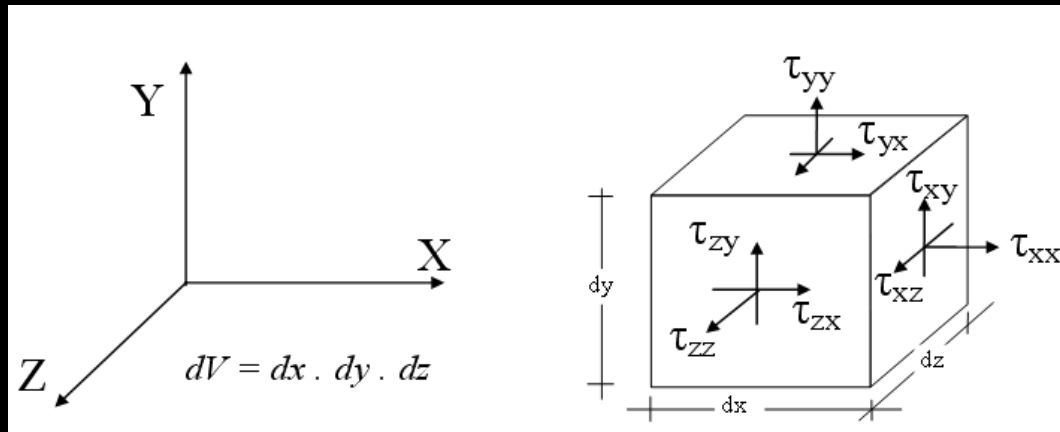
## Εξωτερικό δυνατό έργο $\delta W_E$

- επιβάλλοντας σε ένα φορέα, ο οποίος ισορροπεί κάτω από την εφαρμογή εξωτερικών φορτίων, μια δυνατή μετακίνηση, η οποία δεν παραβιάζει τις συνθήκες στήριξης ή εσωτερικών συνδέσεων:
- ⇒ τα επιβαλλόμενα φορτία εκτελούν εξωτερικό δυνατό έργο
- το εξωτερικό δυνατό έργο  $\delta W_E$  ισούται με το γινόμενο πραγματικών δυνάμεων ή ροπών επί τις αντίστοιχες δυνατές (νοητές) μετακινήσεις του σημείου εφαρμογής.
  - θετικό είναι το δυνατό έργο όταν η δύναμη ή ροπή και η δυνατή μετάθεση ή στροφή, αντίστοιχα, είναι στην ίδια διεύθυνση. Αλλιώς, αν είναι αντίθετης φοράς, είναι αρνητικό το έργο.
- ⇒ το εξωτερικό δυνατό έργο εξωτερικών φορτίων από την επιβολή αντίστοιχων δυνατών μετακινήσεων ισούται με:

$$\delta W_E = \sum P_i \cdot \delta \Delta_i + \sum M_i \cdot \delta \phi_i + \int w(x) \cdot \delta \Delta(x) dx$$

# Εσωτερικό δυνατό έργο (ελαστική δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης)

- ενέργεια λόγω των τάσεων κατά τις αντίστοιχες δυνατές παραμορφώσεις
- γενική περίπτωση τρισδιάστατου σώματος

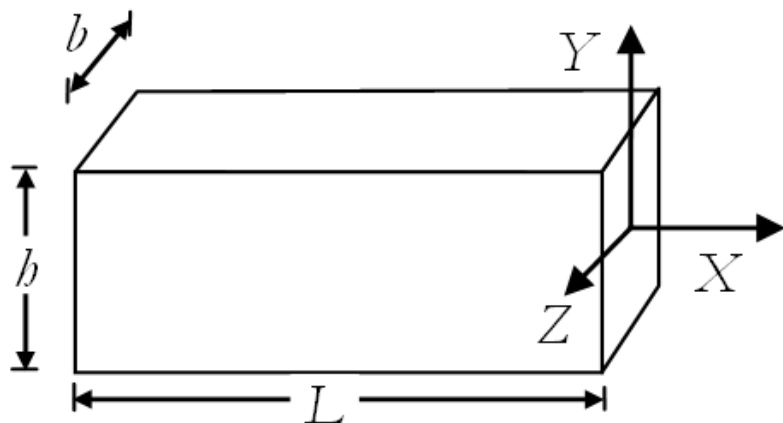


$$\delta U = \iiint_V \tau \delta \epsilon dV$$

# Ελαστική δυνατή ενέργεια γραμμικών δομικών στοιχείων

- εκφράζοντας τις τάσεις και παραμορφώσεις, κατά τον υπολογισμό της ελαστικής δυνατής ενέργειας, συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

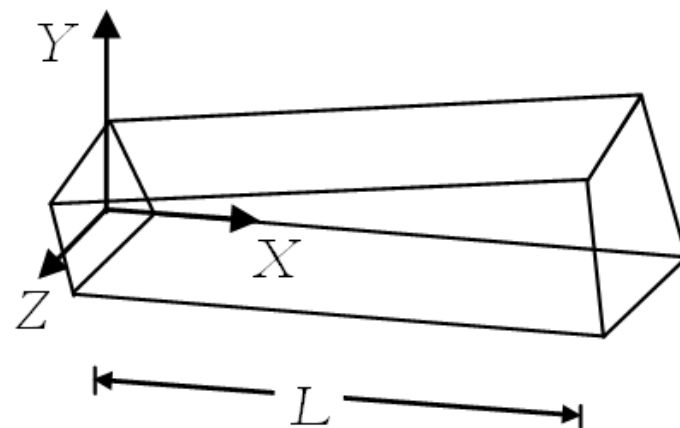
➔ μπορούμε να διατυπώσουμε τις επιπλέον εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση υπερστατικών φορέων



$$A = b \cdot h$$

$$A_y = A_z = \frac{b \cdot b}{1.2}$$

$$I_{zz} = \frac{b \cdot b^3}{12}, \quad I_{yy} = \frac{b \cdot b^3}{12}$$



$$A(x) = \iint dy \, dz$$

$$I_{yy} = \iint_A z^2 \, dy \, dz$$

$$I_{zz} = \iint_A y^2 \, dy \, dz$$



## Δυνατή ελαστική ενέργεια (δυνατό εσωτερικό έργο)

Έχοντας περισσότερες από μια μορφές δυνατών μορφών παραμόρφωσης, η συνολική ελαστική δυνατή ενέργεια ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ελαστικών δυνατών ενεργειών για κάθε διαφορετικό είδος παραμόρφωσης.

⇒ συνολικά η δυνατή ελαστική ενέργεια, στη γενική περίπτωση γραμμικών (ραβδωτών) μελών, δίνεται από την πιο κάτω γενική εξίσωση, η οποία αντιστοιχεί στη μέθοδο των δυνατών μετακινήσεων:

$$\delta U = \int_0^L \left( N \left( \frac{\delta N}{A E} \right) + V_y \left( \frac{\delta V_y}{G A_y} \right) + V_z \left( \frac{\delta V_z}{G A_z} \right) + T \left( \frac{\delta T}{G J} \right) + M_y \left( \frac{\delta M_y}{E I_y} \right) + M_z \left( \frac{\delta M_z}{E I_z} \right) \right) dx$$

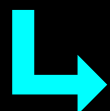
⇒ εναλλάσσοντας, τα πραγματικά εντατικά μεγέθη με τα δυνατά εντατικά μεγέθη η διατύπωση που αντιστοιχεί στη μέθοδο των δυνατών δυνάμεων:

$$\delta U = \int_0^L \left( \delta N \left( \frac{N}{A E} \right) + \delta V_y \left( \frac{V_y}{G A_y} \right) + \delta V_z \left( \frac{V_z}{G A_z} \right) + \delta T \left( \frac{T}{G J} \right) + \delta M_y \left( \frac{M_y}{E I_y} \right) + \delta M_z \left( \frac{M_z}{E I_z} \right) \right) dx = \delta U^c$$

# Υπολογισμός μετακινήσεων με την ΑΔΕ

- φορτίζοντας το φορέα με μοναδιαίο δυνατό (φανταστικό) φορτίο στο σημείο και διεύθυνση της ζητούμενης άγνωστης (πραγματικής) μετακίνησης, επιλύουμε τον φορέα για αυτό το μοναδιαίο φορτίο
- ακολουθώντας, εφαρμόζοντας την πραγματική φόρτιση ή δράσεις υπολογίζουμε τις (πραγματικές) παραμορφώσεις οι οποίες προκαλούνται από τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη.
- σύμφωνα με την ΑΔΕ, το εξωτερικό έργο από την (πραγματική) μετακίνηση του σημείου εφαρμογής του δυνατού φορτίου πρέπει να ισούται με την ελαστική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται από τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν στο μοναδιαίο φορτίο λόγω των (πραγματικών) παραμορφώσεων.

$\delta W_E^c = \delta U^c$	$\Rightarrow$	<i>Δυνατό φορτίο (μοναδιαίο)</i>	$\times$	<i>Αντίστοιχες πραγματικές μετακινήσεις</i>	$=$	<i>Δυνατά εντατικά μεγέθη</i>	$\times$	<i>Αντίστοιχες πραγματικές παραμορφώσεις</i>
-----------------------------	---------------	--	----------	---	-----	---------------------------------------	----------	--



μέθοδοι των δυνατών δυνάμεων

## Μέθοδοι των δυνατών μετακινήσεων

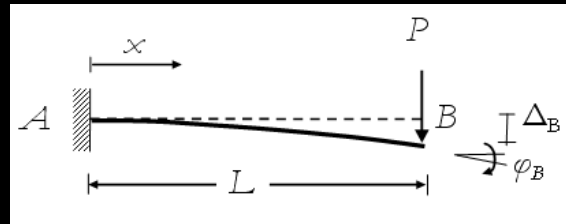
- αφού πρώτα επιβληθούν σε ένα φορέα οι πραγματικές φορτίσεις
- δυνατές (δηλαδή νοητές) μετακινήσεις επιβάλλονται σε αυτόν επιτρέποντας ουσιαστικά ένα εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης των εξισώσεων ισορροπίας.

$\delta W_E = \delta U$	$\Rightarrow$	<i>Πραγματικό φορτίο</i>	$\times$	<i>Δυνατές μετακινήσεις</i>	$=$	<i>Πραγματικά εντατικά μεγέθη</i>	$\times$	<i>Δυνατές παραμορφώσεις</i>
-------------------------	---------------	--------------------------	----------	-----------------------------	-----	-----------------------------------	----------	------------------------------

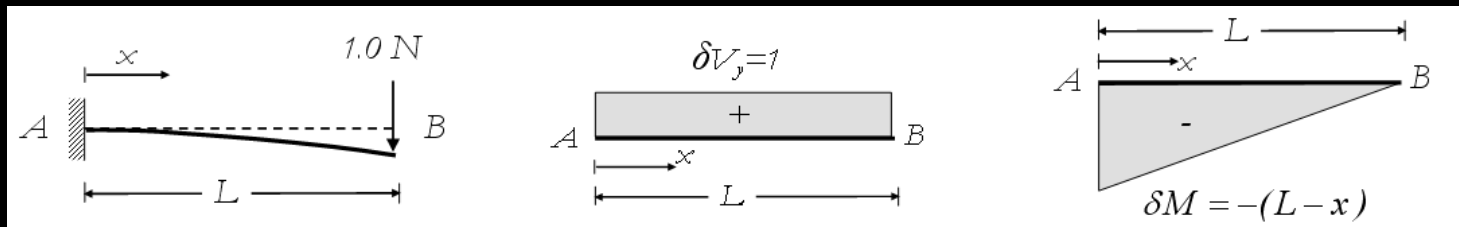
 μέθοδοι των δυνατών μετακινήσεων

# Παράδειγμα εφαρμογής της ΑΔΕ

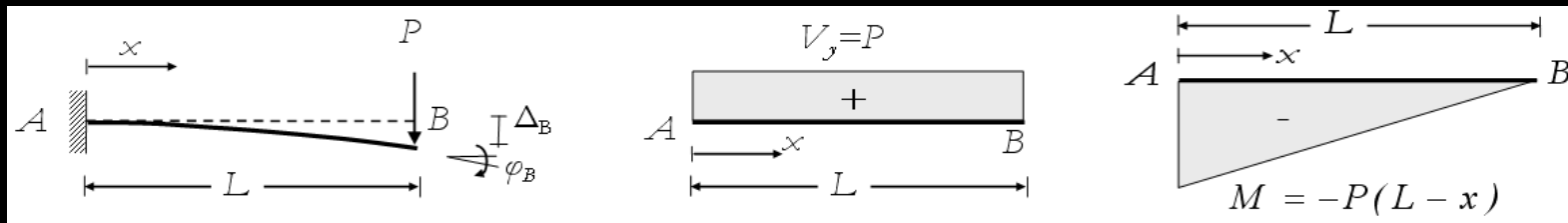
Υπολογισμός βύθισης και στροφής του άκρου προβόλου λόγω δύναμης  $P$ :



- πρώτα, πρέπει να φορτίσουμε τη δοκό στο σημείο και τη διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης με μοναδιαία δύναμη



- ακολουθώντας, φορτίζουμε τη δοκό με το πραγματικά επιβαλλόμενο φορτίο  $P$ , το οποίο προκαλεί εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση η οποία έχει σαν αποτέλεσμα τις ζητούμενες μετακινήσεις



- με την επιβολή του φορτίου και την παραμόρφωση της δοκού το σημείο εφαρμογής της μοναδιαίας δυνατής δύναμης μετακινείται σύμφωνα με την πραγματική βύθιση στο άκρο της δοκού παράγοντας *εξωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο*
- εσωτερικό δυνατό (συμπληρωματικό) έργο προκύπτει από τα δυνατά εντατικά μεγέθη λόγω των πραγματικών παραμορφώσεων οι οποίες αντιστοιχούν στα πραγματικά εντατικά μεγέθη

⇒ σύμφωνα με την αρχή των δυνατών (συμπληρωματικών) έργων:

$$I \cdot \Delta = \int_0^L \left( \delta V_y \left( \frac{V_y}{GA_y} \right) + \delta M_z \left( \frac{M_z}{EI_z} \right) \right) dx \quad \Rightarrow \quad \Delta = \int_0^L \left( I \cdot \frac{P}{GA_y} + I \cdot (L-x) \cdot \frac{P(L-x)}{EI_z} \right) dx$$



$$\Delta = \frac{P \cdot x}{GA_y} - \frac{P(L-x)^3}{3EI_z} \Bigg|_0^L = \frac{PL}{GA_y} + \frac{PL^3}{3EI_z}$$

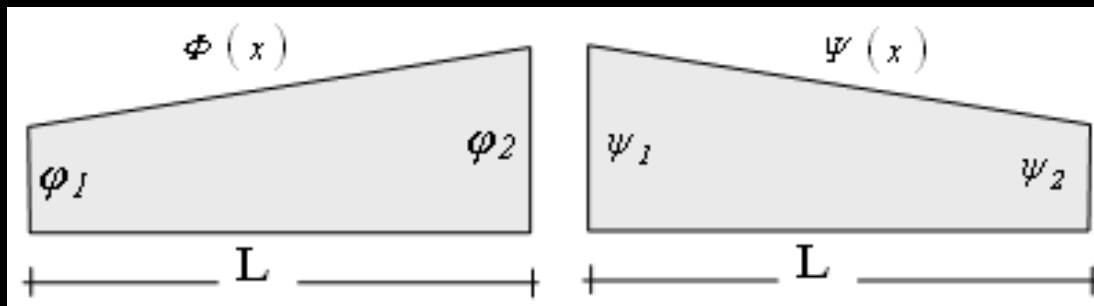
- παραλείποντας τη συνεισφορά των διατμητικών παραμορφώσεων:

$$\Delta \approx \frac{PL^3}{3EI_z}$$

# Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μορφής:

$$\int \Phi(x) \cdot \Psi(x) dx$$

- ολοκληρώνοντας τις αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις
  - ο γνωστός τρόπος που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα συνήθως δεν είναι ο πιο εύκολος
- αν και οι δύο συναρτήσεις  $\Phi(x)$  και  $\Psi(x)$  μεταβάλλονται γραμμικά

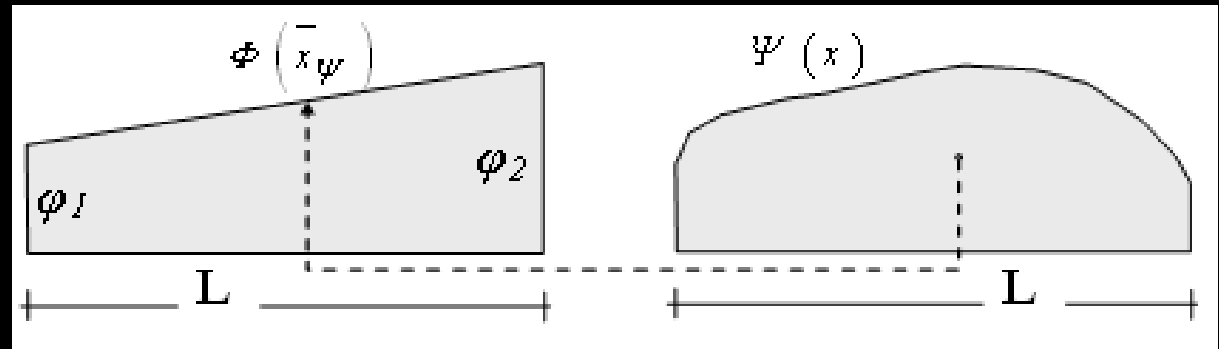


$$\int_0^L \Phi(x) \cdot \Psi(x) dx = \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot \varphi_1 \cdot \psi_1 + \varphi_2 \cdot \psi_1 + \varphi_1 \cdot \psi_2 + 2 \cdot \varphi_2 \cdot \psi_2)$$

# Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μορφής:

$$\int \Phi(x) \cdot \Psi(x) dx$$

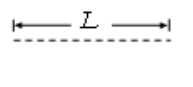
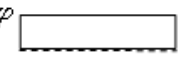
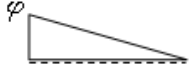

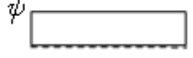
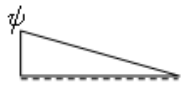
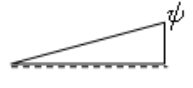
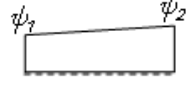

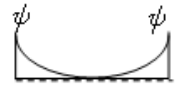
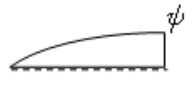
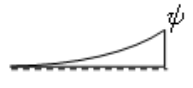
- αν η μία από τις δύο συναρτήσεις μεταβάλλεται γραμμικά σε όλο το μήκος της ολοκλήρωσης, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με το γινόμενο της επιφάνειας της άλλης συνάρτησης επί την τιμή της γραμμικά μεταβαλλόμενης συνάρτησης στο σημείο κατά μήκος του μέλους, το οποίο αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους της επιφάνειας της άλλης συνάρτησης



- χρήση πινάκων με ορισμένα ολοκληρώματα για κοινές περιπτώσεις γινομένων  $\Phi(x)$  και  $\Psi(x)$ 
  - μπορούμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας να σχηματίσουμε το συγκεκριμένο διάγραμμα με κατάλληλη άθροιση ή αφαίρεση γνωστών επιμέρους διαγραμμάτων.
  - συνήθως ο πιο εύκολος τρόπος

# Πινάκες ορισμένων ολοκληρωμάτων μορφής:

$$\int \Phi(x) \cdot \Psi(x) dx$$

			
	$L \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{2} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{2} \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \psi$
	$\frac{L}{2} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{6} \cdot \psi \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2)$
	$\frac{L}{2} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{6} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{6} \cdot \psi \cdot (\varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2)$
	$\frac{L}{2} \cdot \varphi \cdot (\psi_1 + \psi_2)$	$\frac{L}{6} \cdot \varphi \cdot (2 \cdot \psi_1 + \psi_2)$	$\frac{L}{6} \cdot \left( \psi_1 \cdot (2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) + \psi_2 \cdot (\varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2) \right)$
	$\frac{2 \cdot L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{3} \cdot \psi \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)$
	$\frac{L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{6} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{6} \cdot \psi \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)$
	$\frac{2 \cdot L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{4} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{12} \cdot \psi \cdot (3 \cdot \varphi_1 + 5 \cdot \varphi_2)$
	$\frac{L}{3} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{4} \cdot \varphi \cdot \psi$	$\frac{L}{12} \cdot \psi \cdot (\varphi_1 + 3 \cdot \varphi_2)$



# Ισοστατικοί/Υπερστατικοί φορείς

- Ισοστατικοί φορείς
  - αρκούν οι εξισώσεις ισορροπίας για την επίλυση τους
  - καταναγκασμοί δεν προκαλούν εντάσεις και παραμορφώσεις στα μέλη
  - οποιαδήποτε αστοχία σε μια ισοστατική κατασκευή την καθιστά μηχανισμό, αφού δεν έχει πλεονάζουσες στηρίξεις για να παραλάβουν τα φορτία, εάν μια από τις στηρίξεις, συνδέσεις ή μέλη αστοχήσει
- Υπερστατικοί φορείς
  - για την επίλυση τους πέρα από τις εξισώσεις ισορροπίας απαιτούνται τόσες επιπλέον εξισώσεις όσο ο βαθμός στατικής αοριστίας
    - οι επιπλέον εξισώσεις εκφράζουν την συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη γεωμετρικά/μηχανικά χαρακτηριστικά)
  - μια υπερστατική κατασκευή είναι γενικά πιο δύσκαμπτη από την αντίστοιχη ισοστατική κατασκευή και παρουσιάζει πολύ μικρότερες παραμορφώσεις και μετακινήσεις
  - η υπερστατικότητα λειτουργεί σαν ασφαλιστική δικλίδα, αφού σε περίπτωση κάποιας αστοχίας, ανακατανομή των εντατικών μεγεθών είναι συνήθως δυνατή αποφεύγοντας κατάρρευση της κατασκευής.

# Μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων

- οι μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων πρέπει να ικανοποιούν:
  - τις συνθήκες ισορροπίας
  - τη συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων
  - τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (καταστατικός νόμος του υλικού)
- μέθοδοι των δυνάμεων
  - βασίζονται στην αρχή των δυνατών συμπληρωματικών έργων
  - χρήσιμες για απλούς ελαστικά γραμμικούς υπερστατικούς φορείς
    - μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων
    - μέθοδος ευκαμψίας ή μέθοδος ελαστικότητας
- μέθοδοι των μετακινήσεων
  - βασίζονται στην αρχή των δυνατών έργων
  - αφού εκφραστούν οι δυνάμεις συναρτήσει των μετακινήσεων εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας προσδιορίζεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων
  - υπολογίζοντας τις μετακινήσεις μπορούν από τις σχέσεις μετακινήσεων-δυνάμεων να προσδιοριστούν και οι άγνωστες δυνάμεις και τα εντατικά μεγέθη
    - μέθοδος δυσκαμψίας

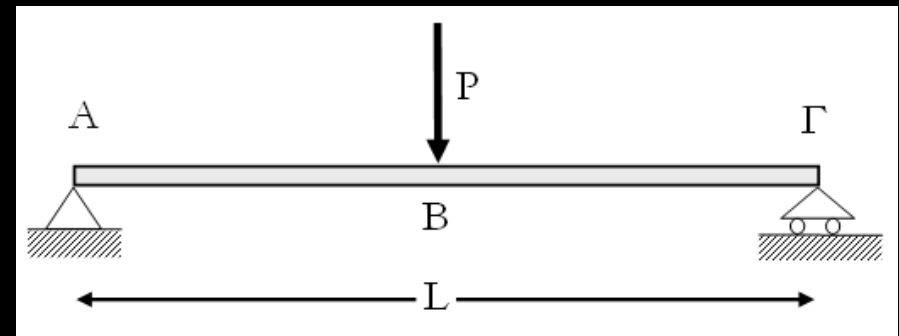
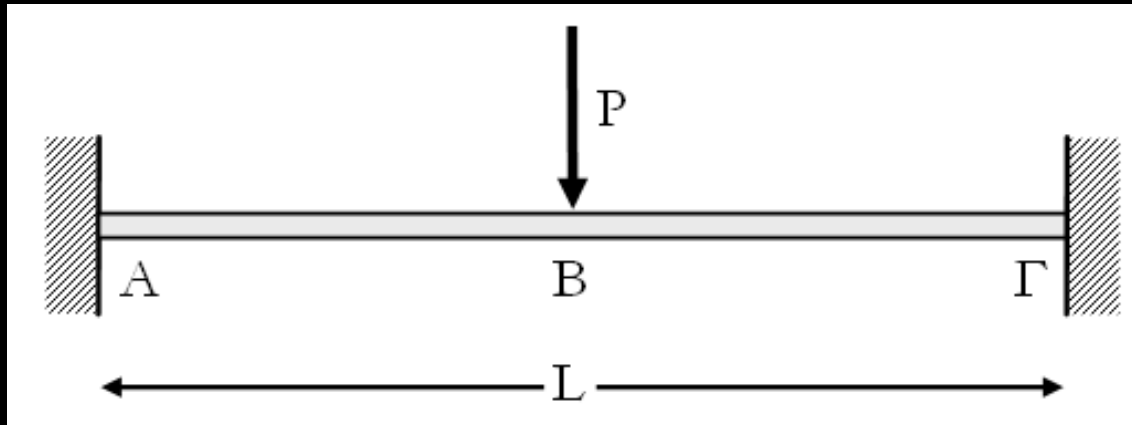
# Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων

- για την επίλυση ενός  $N$ -βαθμού υπερστατικού φορέα εφαρμόζουμε  $N$  αριθμό ελευθεριών, αφαιρώντας νοητά κάποια *υπερστατικά μεγέθη*, ώστε να καταστήσουμε το φορέα ισοστατικό, αλλά και σταθερό
- έχοντας επιλέξει τα υπερστατικά μεγέθη  $X_1, X_2, \dots$ , επιβάλλομε στον ισοστατικό φορέα:
  - σύστημα-0: τις πραγματικά επιβαλλόμενες δράσεις
  - σύστημα-1: μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος  $X_1$
  - σύστημα-2: μοναδιαίο υπερστατικό μέγεθος  $X_2$
  - .....
- υπολογίζουμε τις  $\delta_{ij}$  μετακινήσεις στη θέση και διεύθυνση του υπερστατικού μεγέθους  $X_i$  λόγω της φόρτισης του συστήματος  $j$
- για να διορθωθούν τα χάσματα τα οποία δημιουργούνται στις νοητές ελευθερίες πρέπει η συνεισφορά των αντίστοιχων αγνώστων δυνάμεων ή ροπών, τα οποία είναι εσωτερικά εντατικά μεγέθη ή αντιδράσεις σε στηρίξεις, να είναι τέτοια ώστε να αλληλοαναιρούνται

# Μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων (συν.)

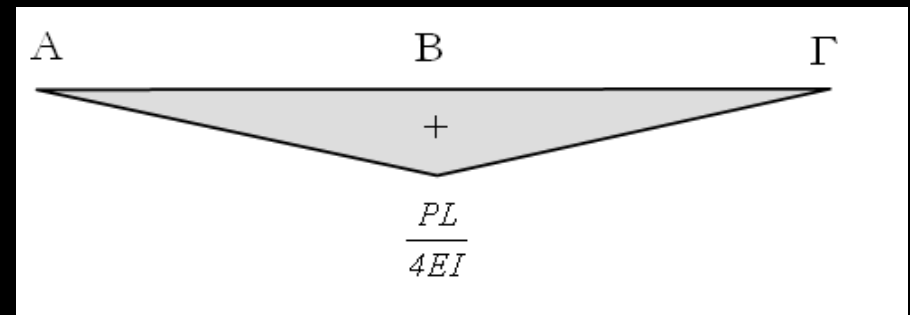
- το σύστημα-0 με όλες τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις και με τα υπερστατικά μεγέθη, με τις τιμές που απαιτούνται για να αναιρεθούν τα νοητά χάσματα, είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με τον υπερστατικό φορέα, αφού πληροί τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις όπου τυχόν αφαιρέθηκαν υπερστατικά μεγέθη ή τις συνθήκες συνέχειας του υλικού όπου τυχόν έγινε νοητή εσωτερική τομή με το αντίστοιχο εσωτερικό εντατικό μέγεθος σαν υπερστατικό μέγεθος
- για να μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος των συμβιβαστών μετακινήσεων είναι να ισχύει η αρχή της επαλληλίας, η οποία ισχύει για γραμμικά ελαστικό υλικό και οι μετακινήσεις να είναι τόσο μικρές ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αρχική γεωμετρία του φορέα
- οι δείκτες (ή συντελεστές) ευκαμψίας (ελαστικότητας)  $\delta_{ij}$  έχουν μονάδες  $m/N$  ή  $radians/Nm$  ανάλογα αν πρόκειται για δυνάμεις ή για ροπές
- οι δείκτες ευκαμψίας εξαρτώνται από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά του φορέα και είναι απολύτως ανεξάρτητοι από τις εξωτερικές δράσεις, είτε πρόκειται για εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία είτε για καταναγκασμούς

# Παράδειγμα με δύο φορές υπερστατικό φορέα

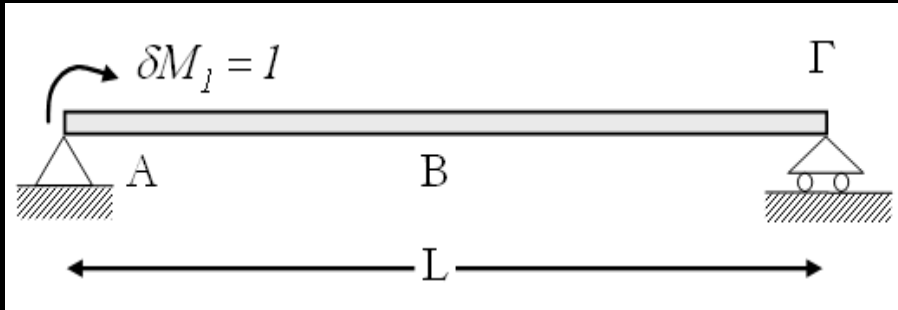


=

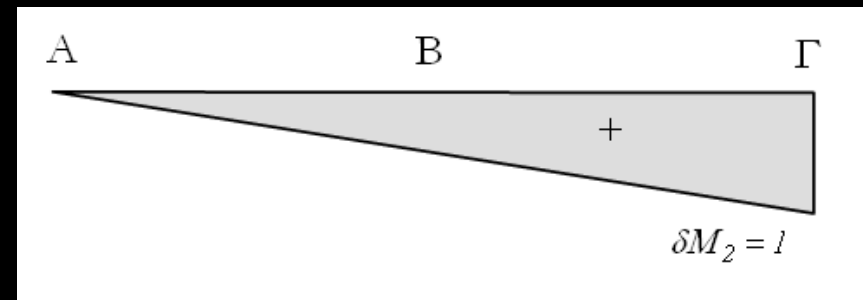
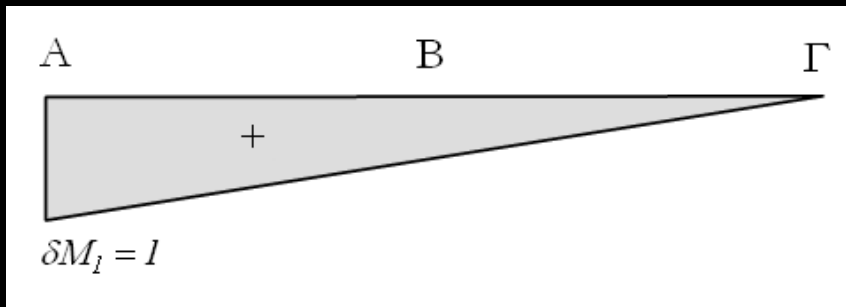
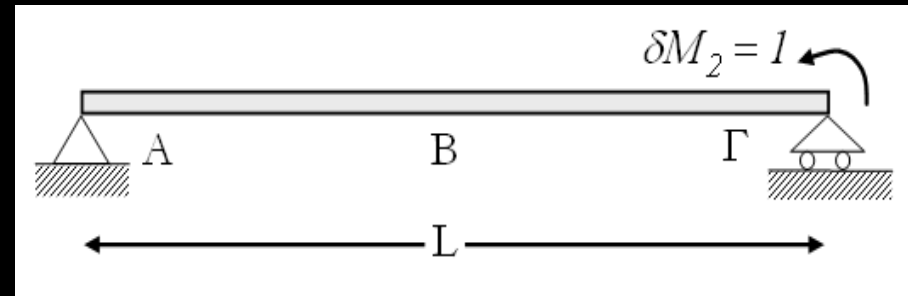
σύστημα-0



+ σύστημα-1



+ σύστημα-2



$$\Rightarrow \delta_{10} = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{L}{3EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{22} = \frac{L}{3EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{20} = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

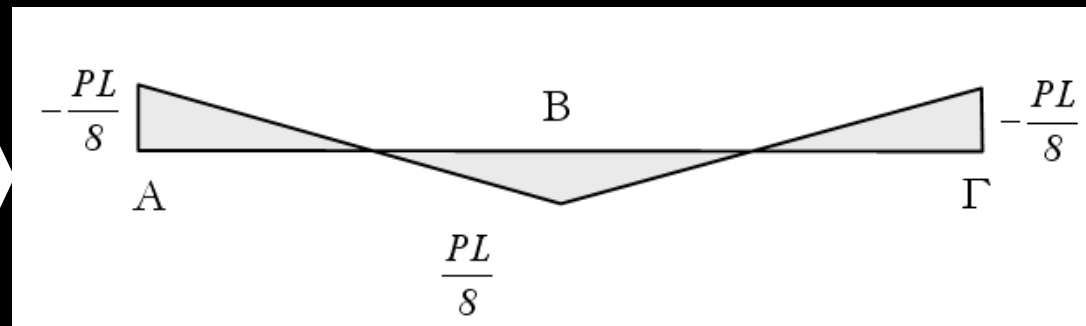
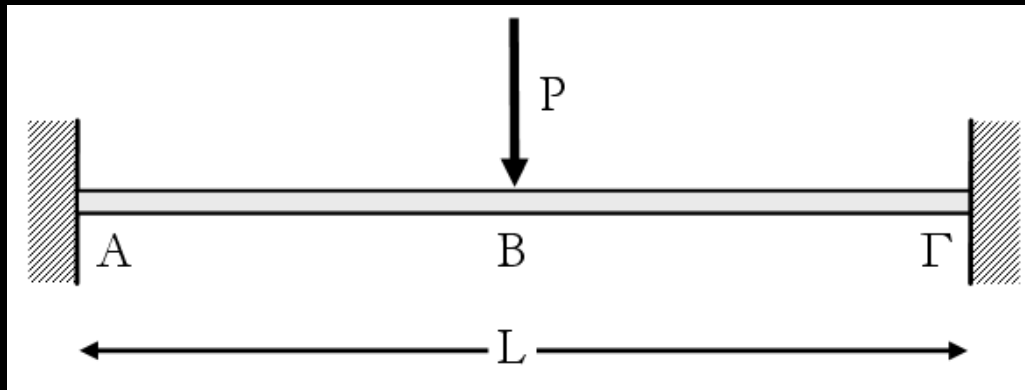
$$\Rightarrow \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{6EI}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} \\ \frac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} \\ \frac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{PL}{8} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{3EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} \\ \frac{PL^2}{16EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{PL}{8} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$



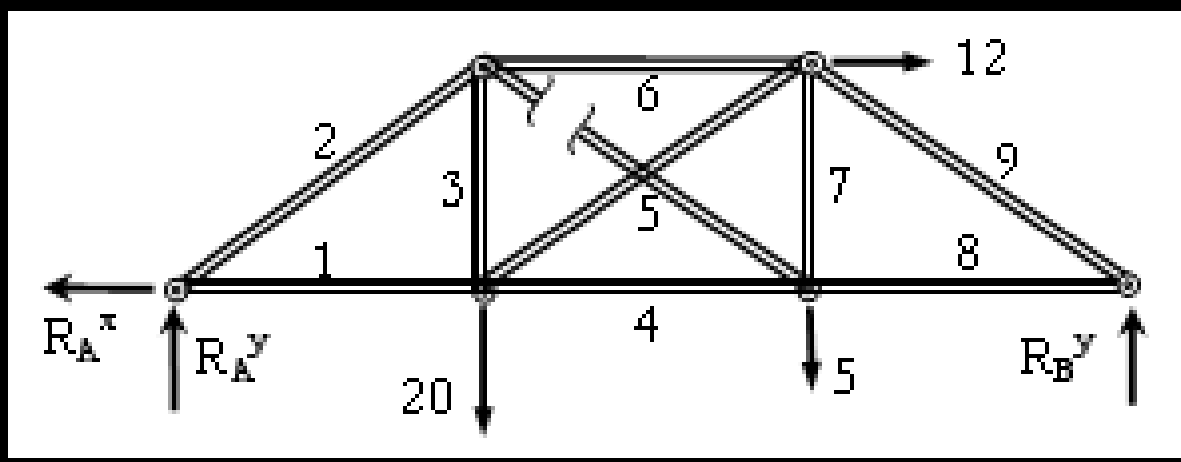
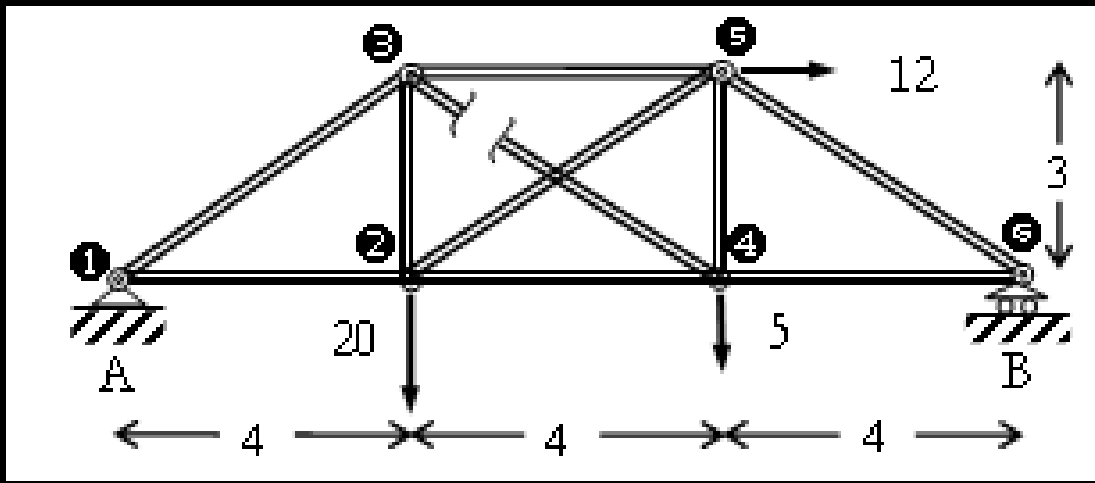




# σύστημα-0

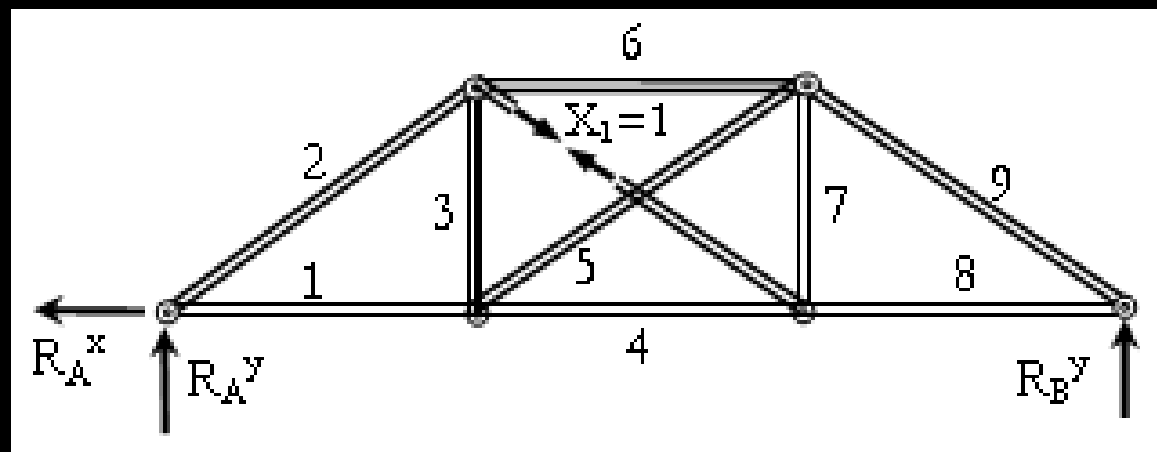
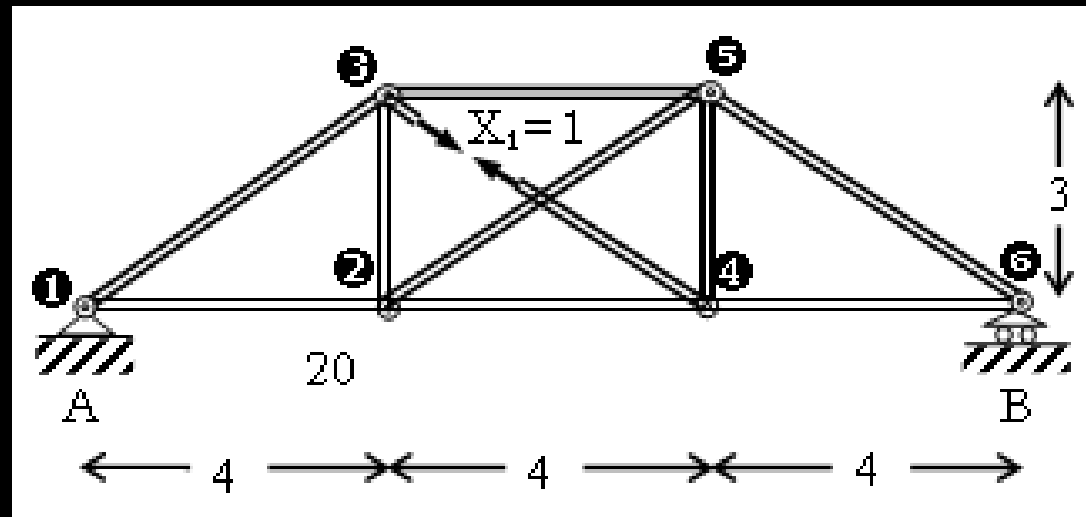
$$X_1 = F_{10}$$

$$X_2 = R_B^x$$



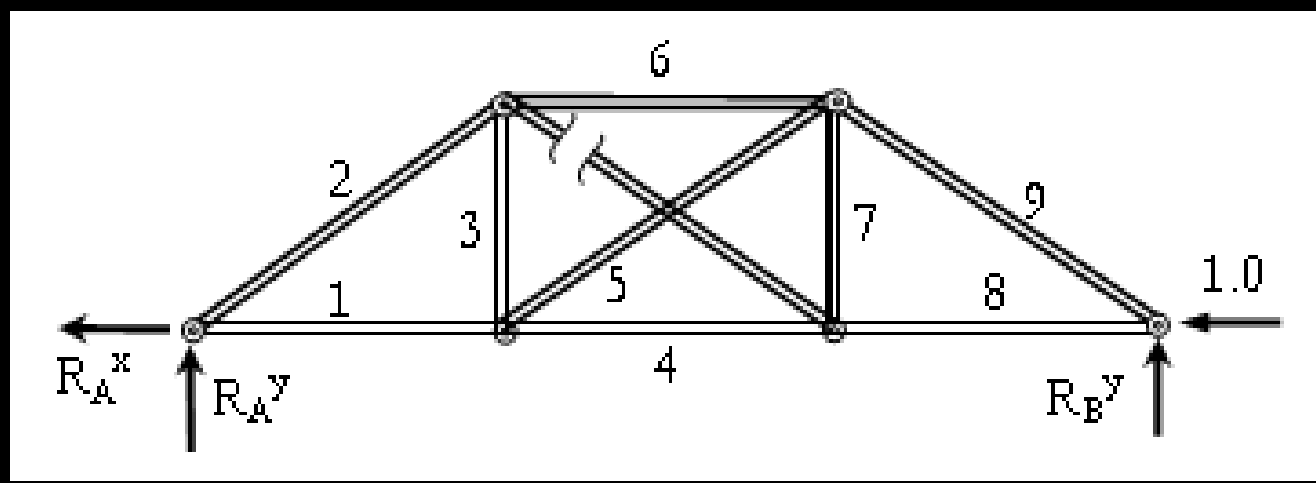
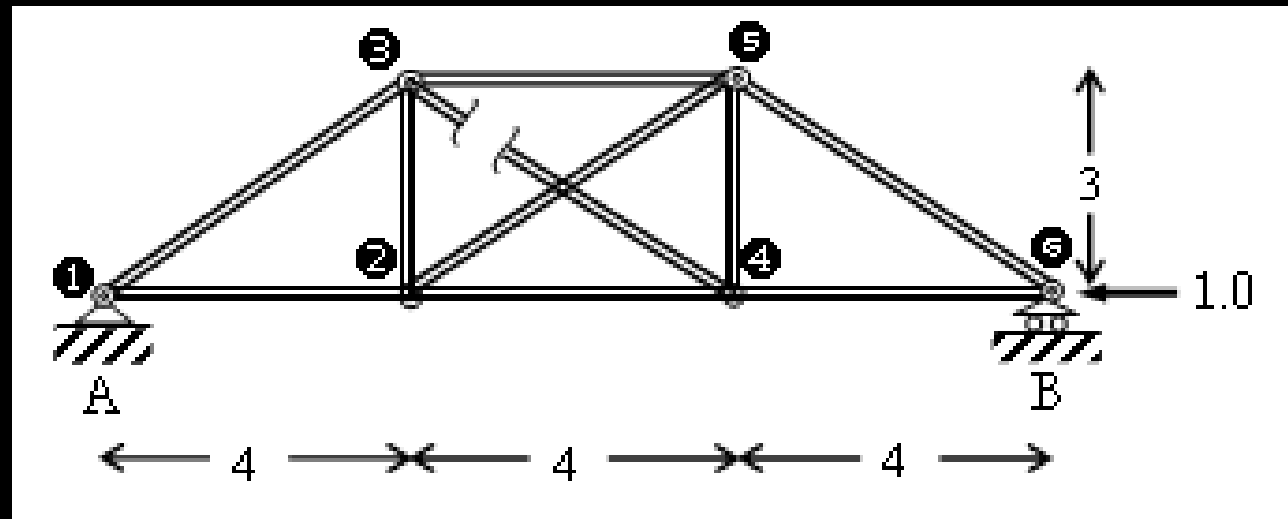
Κόμβος	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$X_I = F_{10}$
Δύναμη [kN]	28	-20	12	52/3	40/3	-16	5	52/3	-65/3	0.0
Μήκος [m]	4	5	3	4	5	4	3	4	5	5

σύστημα-1:



Κόμβος	$\delta F_1$	$\delta F_2$	$\delta F_3$	$\delta F_4$	$\delta F_5$	$\delta F_6$	$\delta F_7$	$\delta F_8$	$\delta F_9$	$X_I = \delta F_{10}$
<u>Δύναμη [N]</u>	0	0	-0.6	-0.8	1.0	-0.8	-0.6	0	0	1.0

σύστημα-2:



Δύναμη [N]	-1.0	0	0	-1.0	0	0	0	-1.0	0	0
Συστήματος-2										

Ράβδος	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μήκος [m]	4.00	5.00	3.00	4.00	5.00	4.00	3.00	4.00	5.00	5.00
Δύναμη [kN] Συστήματος'0	28	-20	12	52/3	40/3	-16	5	52/3	-65/3	0.0
Δύναμη [N] Συστήματος-1	0	0	-0.6	-0.8	1.0	-0.8	-0.6	0	0	1.0
Δύναμη [N] Συστήματος-2	-1.0	0	0	-1.0	0	0	0	-1.0	0	0

συνθήκες συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετακινήσεων :

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Εντολές Matlab:

```

F0 = [28 -20 12 52/3 40/3 -16 5 52/3 -65/3 0]' * 1000
F1 = [0 0 -0.6 -0.8 1 -0.8 -0.6 0 0 1]'
F2 = [-1 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0]'
L = [4 5 3 4 5 4 3 4 5 5]'

d10=0; d11=0; d12=0; d20=0; d21=0; d22=0;

for i=1:10
    d10 = d10 + L(i) * F1(i) * F0(i) ;
    d11 = d11 + L(i) * F1(i) * F1(i);
    d12 = d12 + L(i) * F1(i) * F2(i);
    d20 = d20 + L(i) * F2(i) * F0(i) ;
    d21 = d21 + L(i) * F2(i) * F1(i);
    d22 = d22 + L(i) * F2(i) * F2(i);
end

A=[ d11 d12
    d21 d22]

b = [d10 ; d20]

X = -inv(A)*b

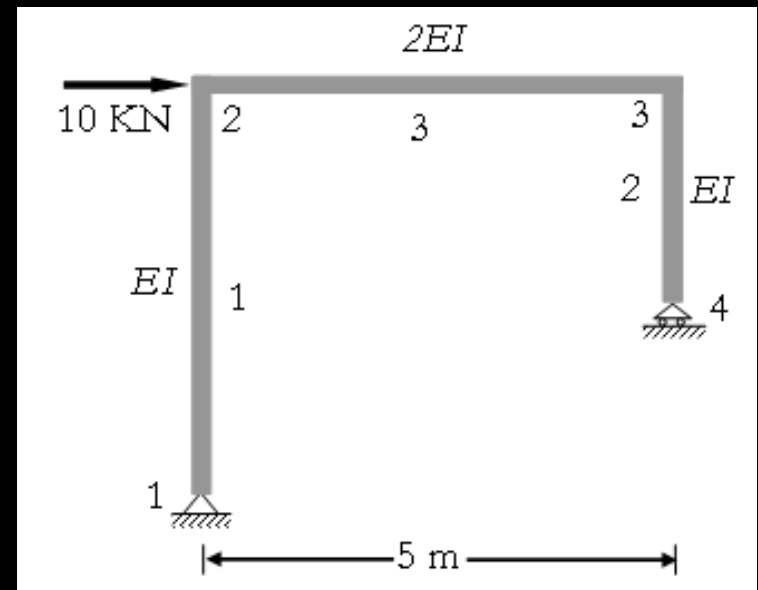
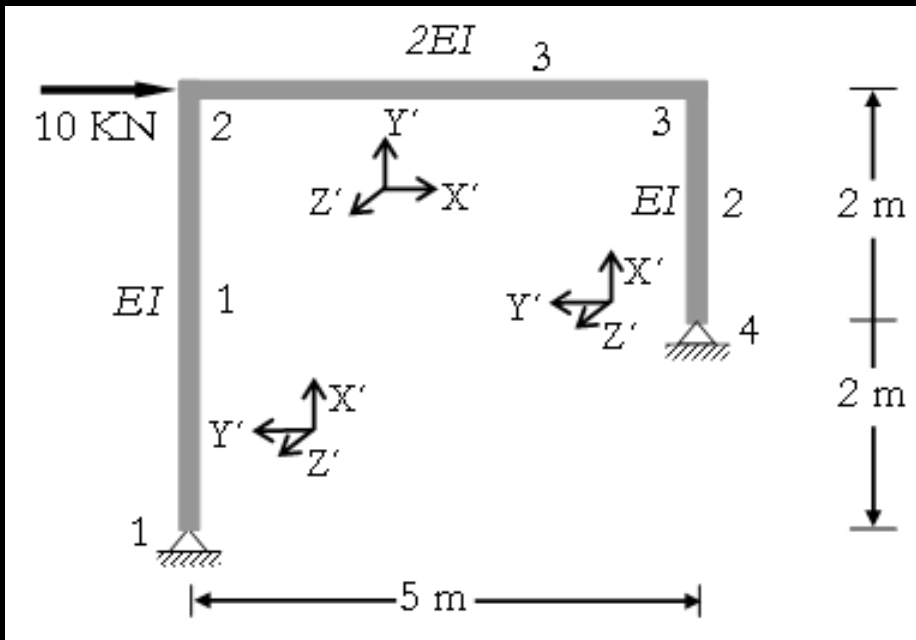
F=F0+F1*X(1)+F2*X(2)

```

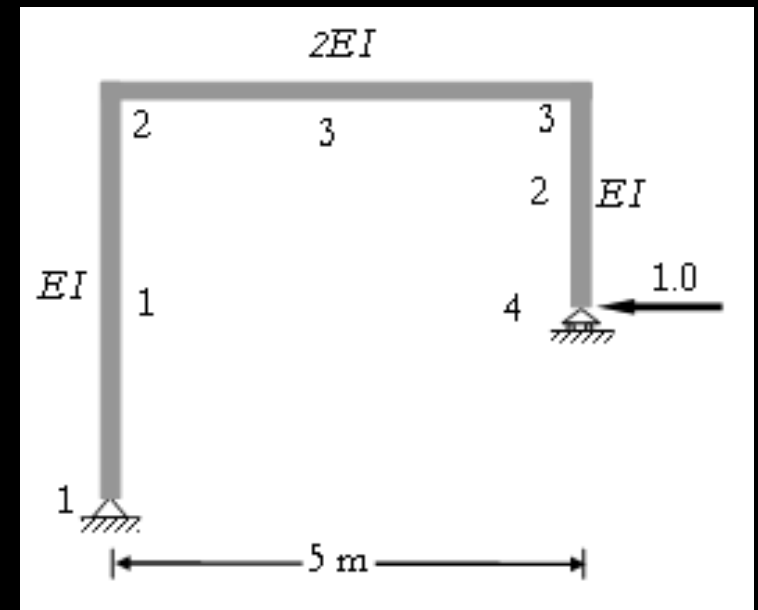
<u>Δύναμη [kN]</u>	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
	5.51	-20.0	15.6	-0.4	7.3	-11.2	8.6	-5.2	-21.7	-1.8

# Εφαρμογές σε πλαίσια

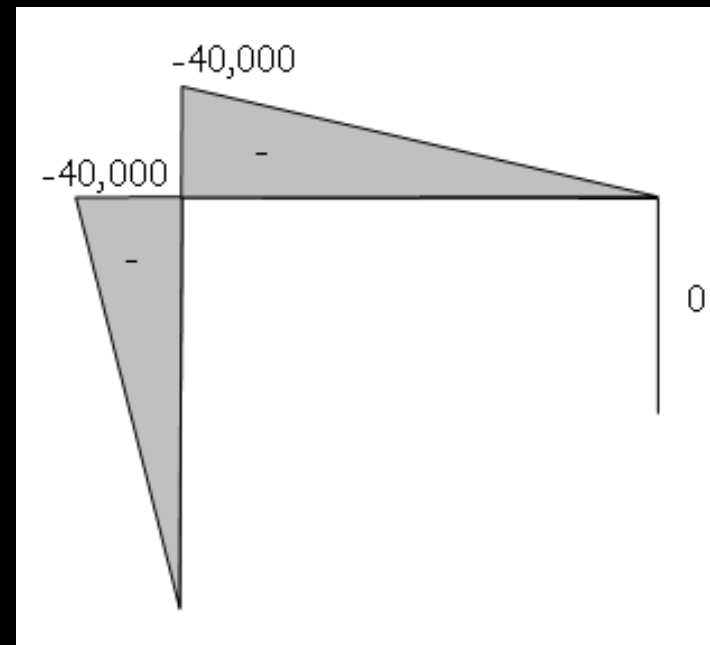
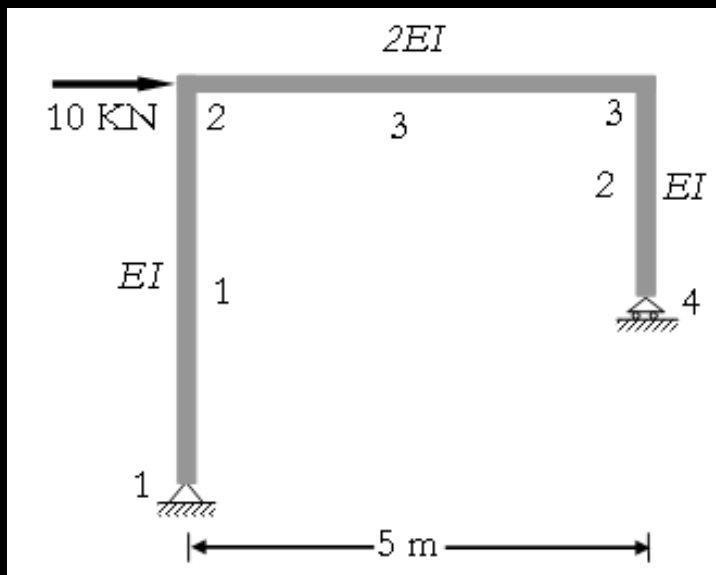
σύστημα-0:



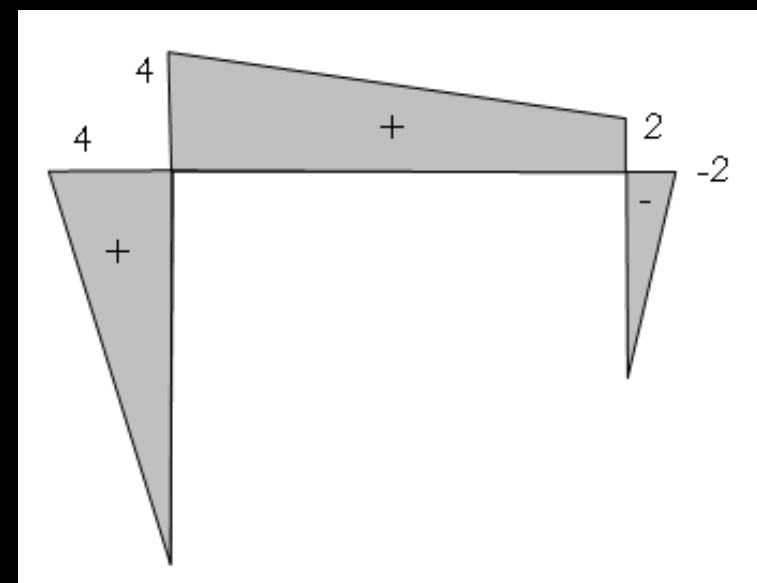
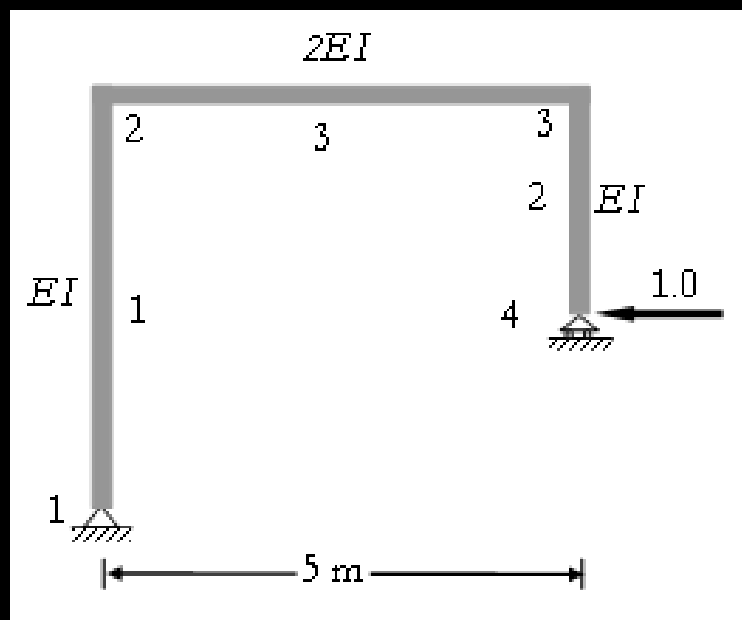
σύστημα-1:



## σύστημα-0:



## σύστημα-1:





$$\delta_{10} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (4) \cdot \left( \frac{-40,000}{EI} \right) + \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \left\{ \left( \frac{-40,000}{2EI} \right) \cdot (2 \cdot 4 + 2) \right\} = -\frac{213,333}{EI} - \frac{166,667}{EI} = -\frac{380,000}{EI}$$

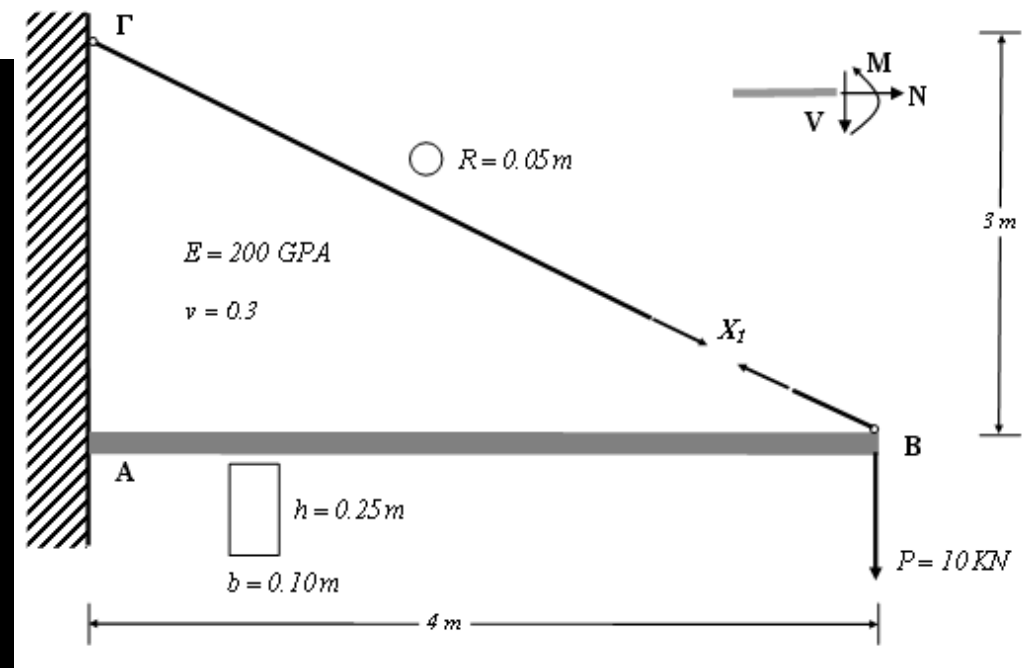
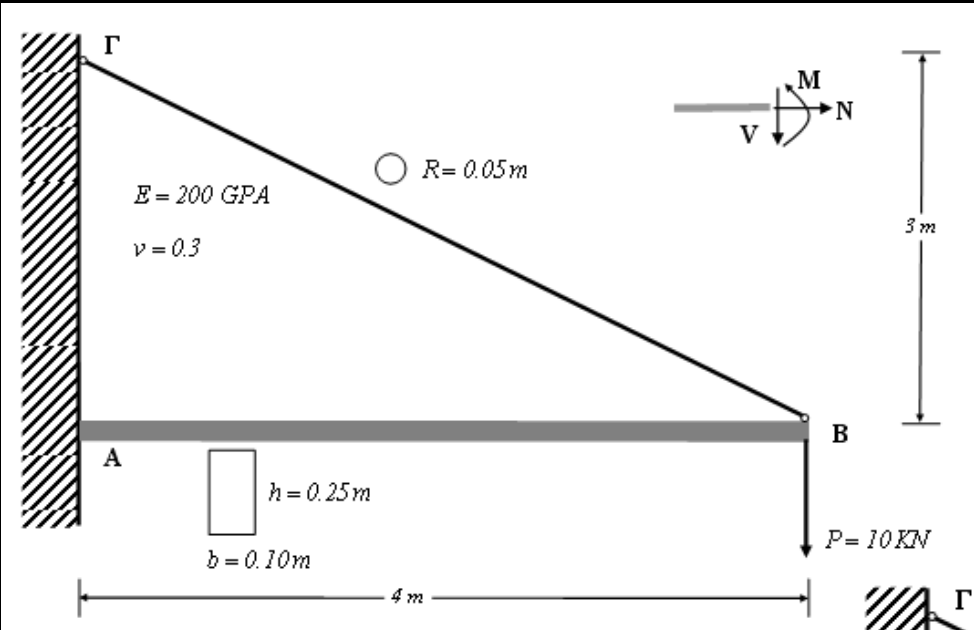
$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (4) \cdot \left( \frac{4}{EI} \right) + \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \left\{ \left( \frac{4}{2EI} \right) \cdot (2 \cdot 4 + 2) + \left( \frac{2}{2EI} \right) \cdot (4 + 2 \cdot 2) \right\} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \left( \frac{-2}{EI} \right)$$

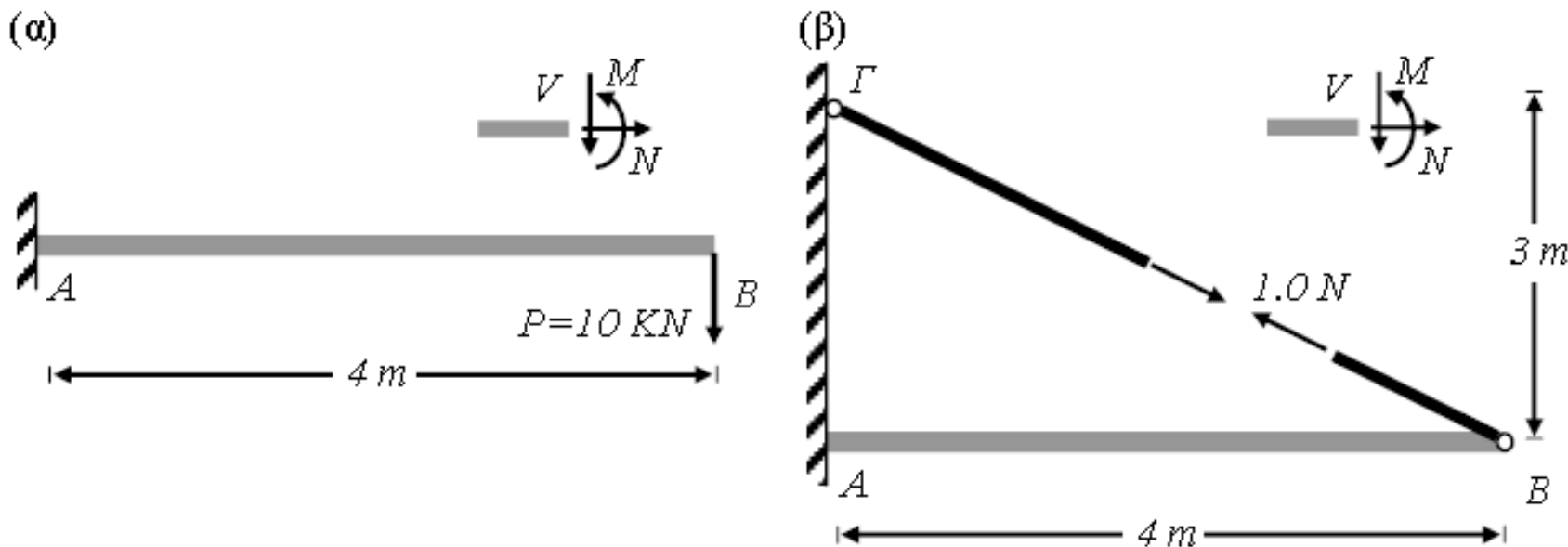
$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{21.333}{EI} + \frac{23.333}{EI} + \frac{2.667}{EI} = \frac{47.333}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{380,000}{EI}}{\frac{47.333}{EI}} = 8,028 \text{ N} = 8.028 \text{ KN}$$

# Εφαρμογές σε σύνθετους φορείς





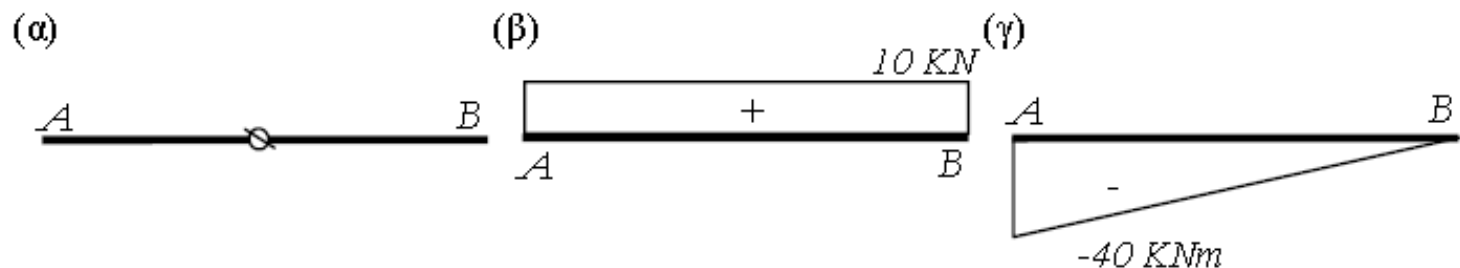
Μηχανικά χαρακτηριστικά μελών:

Καλώδιο:  $A = 0.00785 \text{ m}^2$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$

Δοκός:  $A = 0.025 \text{ m}^2$ ,  $A_y = \frac{A}{1.2} = \frac{0.025 \text{ m}^2}{1.2} = 0.02083 \text{ m}^2$

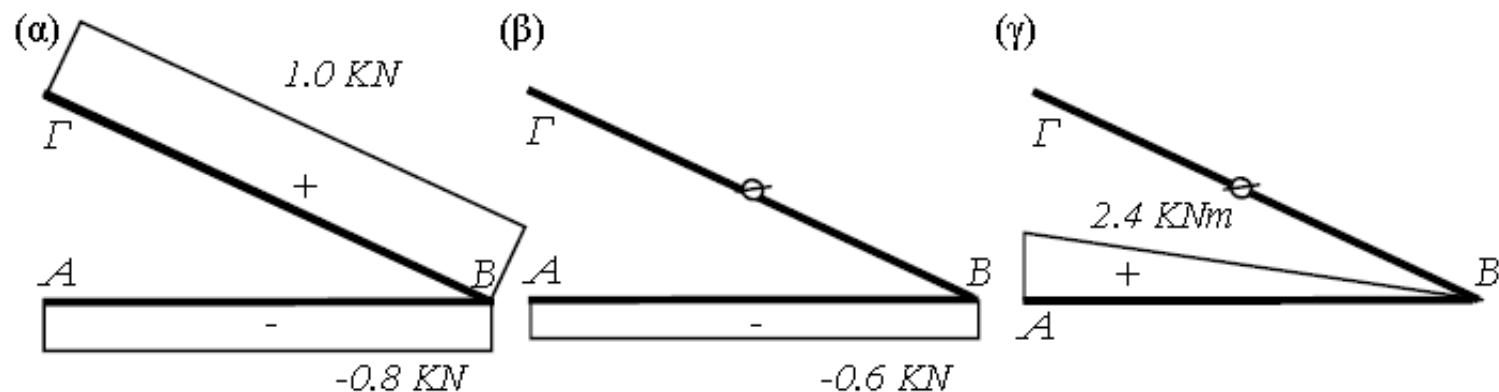
$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.3021 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 76.92 \text{ GPa}$

Επλύνοντας το σύστημα-0 σχεδιάζονται τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών (Σχήμα 7.33.α-γ).



Σχήμα 7.33: Σύστημα-0 : (α) ΔΑΔ (β) ΔΤΔ (γ) ΔΚΡ.

Αφού επιλυθεί το σύστημα-1, σχεδιάζονται τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών (Σχήμα 7.34.α-γ).



Σχήμα 7.34: Σύστημα-1 : (α) ΔΑΔ (β) ΔΤΔ (γ) ΔΚΡ.

Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών των συστημάτων-0 και -1 κατάλληλα διαιρεμένα με την καμπτική δυσκαμψία υπολογίζουμε τη μετακίνηση  $\delta_{10}$  :

$$\delta_{10} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot (-0.6)}{G \cdot A_y} + \frac{4 \cdot (2.4) \cdot (-40 \cdot 10^3)}{3 \cdot E \cdot I_{\text{δοκού}}} = -\frac{24 \cdot 10^3}{G \cdot A_y} - \frac{128 \cdot 10^3}{E \cdot I_{\text{δοκού}}}$$

$$\Rightarrow \delta_{10} = -4.93 \cdot 10^{-3}$$

Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών του συστήματος-1 κατάλληλα διαιρεμένα με την καμπτική δυσκαμψία των μελών υπολογίζουμε τη μετακίνηση  $\delta_{11}$  :

$$\delta_{11} = \frac{4 \cdot (-0.8) \cdot (-0.8)}{E \cdot A_{\text{δοκού}}} + \frac{4 \cdot (-0.6) \cdot (-0.6)}{G \cdot A_y} + \frac{4 \cdot (2.4) \cdot (2.4)}{3 \cdot E \cdot I_{\text{δοκού}}} + \frac{5 \cdot (-1) \cdot (-1)}{E \cdot A_{\text{καλωδίου}}}$$

$$= \frac{2.56}{E \cdot A_{\text{δοκού}}} + \frac{1.44}{G \cdot A_y} + \frac{7.68}{E \cdot I_{\text{δοκού}}} + \frac{5}{E \cdot A_{\text{καλωδίου}}} = 2.995 \cdot 10^{-7}$$

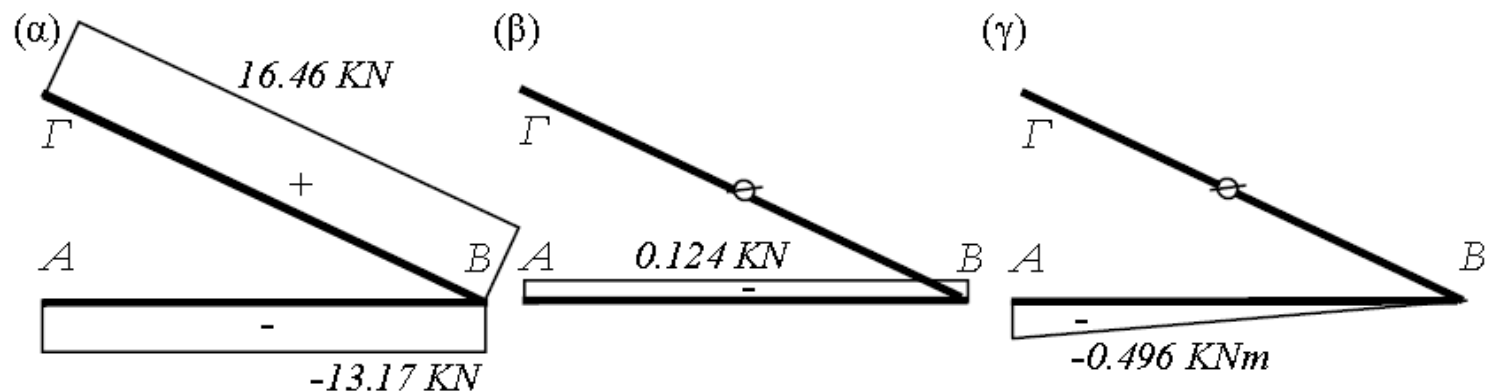
Για να κλείσει το χάσμα λόγω της νοητής τομής στο καλώδιο, πρέπει το εντατικό μέγεθος  $X_1$  να πάρει συγκεκριμένη τιμή ώστε:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-4.93 \cdot 10^{-3}}{2.995 \cdot 10^{-7}}$$

$$\Rightarrow X_1 = 16.46 \text{ KN}$$

Αφού υπολογιστεί το υπερστατικό μέγεθος  $X_1$  μπορούν ακολούθως να προσδιοριστούν τα συνολικά διαγράμματα των εντατικών μεγεθών (Σχήμα 7.35.α-γ). Αυτό μπορεί να γίνει, είτε με επίλυση του ισοστατικού πλέον φορέα, μετά τον προσδιορισμό του  $X_1$ , είτε με κατάλληλη επαλληλία των επιμέρους διαγραμμάτων τα οποία έχουν ήδη προσδιορισθεί για τα συστήματα-0 και -1.



Σχήμα 7.35: (α) ΔΑΔ (β) ΔΤΔ (γ) ΔΚΡ, σύνθετης κατασκευής.

# Παραμορφώσεις από άλλα, εκτός φορτίων, αίτια

- Θερμοκρασιακές μεταβολές
  - ομοιόμορφη καθ' ύψος της διατομής:
    - ⇒ μεταβολή του μήκους του στοιχείου (επιμήκυνση ή βράχυνση)
  - διαφορετική στα δύο πέλματα ενός μέλους
    - ⇒ καμπτικής μορφής παραμορφώσεις και σχετικές στροφές των διατομών
- Κατασκευαστικές ατέλειες και σφάλματα
- Διαφορικές καθιζήσεις

# Εφαρμογή της ΑΔΕ για θερμοκρασιακές μεταβολές

- Για να υπολογιστούν οι μετακινήσεις ενός σημείου λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο δυνατό φορτίο στο σημείο και την διεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης:
  - ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω ομοιόμορφης μεταβολής της θερμοκρασίας:

$$\delta U = \int_0^L \delta N \cdot \alpha \cdot \Delta T \, dx$$

- ελαστική δυνατή ενέργεια λόγω διαφορικής μεταβολής της θερμοκρασίας:

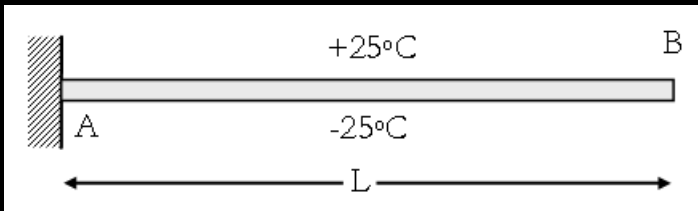
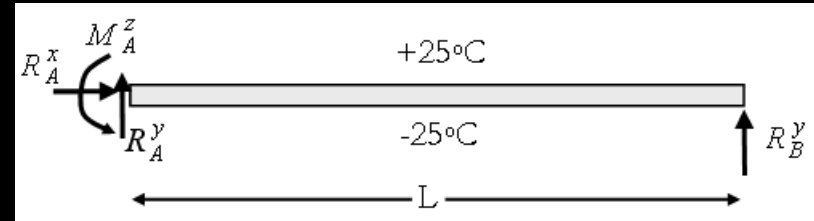
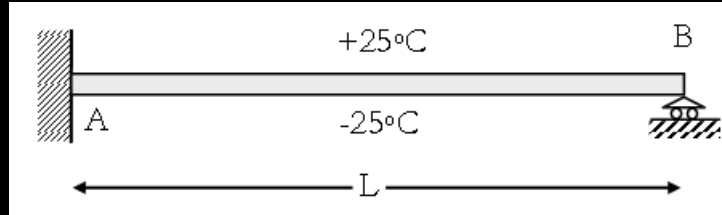
$$\delta U = \int_0^L \delta M_z \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} \, dx$$

$$\delta U = \int_0^L \delta M_y \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{b} \, dx$$

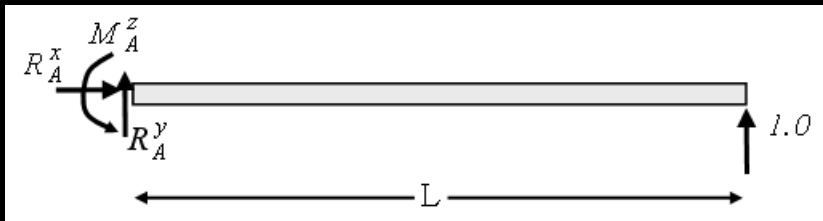
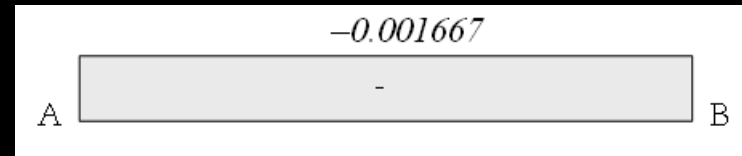


# Θερμοκρασιακές μεταβολές

$E = 200 \text{ GPA}$     $h = 0.30 \text{ m}$     $b = 0.12 \text{ m}$



$$\frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} = \frac{10^{-5} \cdot 50}{0.30} = 0.001667$$



$$\delta_{10} = \int_0^L \delta M_z \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} dx = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T}{h} \cdot L = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0.001667 \cdot 10 = -0.008333 \text{ m}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \frac{1000}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{1000}{3 \cdot (200 \cdot 10^9) \cdot \left( \frac{0.3^3 \cdot 0.12}{12} \right)}$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = \frac{1000}{3 \cdot (200 \cdot 10^9) \cdot (2.7 \cdot 10^{-4})} = 6.173 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-0.008333}{6.173 \cdot 10^{-6}} = 1350 \text{ N} = 1.35 \text{ KN}$$

# Διαφορικές καθιζήσεις

- οι κατασκευές, με το σχετικά μεγάλο βάρος τους, δεν εδράζονται πάνω σε απολύτως απαραμόρφωτη βάση, αλλά θεμελιώνονται σε παραμορφώσιμο έδαφος το οποίο μπορεί να παρουσιάσει καθιζήσεις

⇒ εξωτερικοί καταναγκασμοί λόγω διαφορικών μετακινήσεων (καθιζήσεων) των στηρίξεων μιας κατασκευής

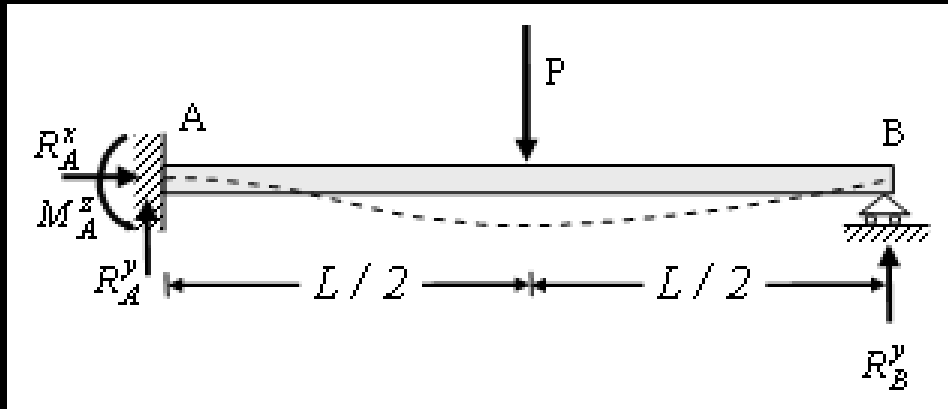
- **ισοστατικοί φορείς**

- ⇒ αν και οι διαφορικές καθιζήσεις προκαλούν μετακινήσεις και στροφές των μελών της κατασκευής γενικά δεν προκαλούν παραμορφώσεις ή εντάσεις
- ο υπολογισμός των μετακινήσεων μπορεί να γίνει εύκολα με την ΑΔΕ εφαρμόζοντας μοναδιαίο φορτίο στην κατεύθυνση της ζητούμενης μετακίνησης ως δυνατή φόρτιση αφού η ελαστική δυνατή ενέργεια ισούται με μηδέν εφόσον δεν αναπτύσσονται (πραγματικές) παραμορφώσεις σε ένα ισοστατικό φορέα

- **υπερστατικοί φορείς**

- ⇒ ανάπτυξη εντατικών μεγεθών και παραμορφώσεων
- το μέγεθος των εντατικών μεγεθών εξαρτάται από το μέγεθος των καθιζήσεων και τη δυσκαμψία της κατασκευής

# Διαφορική καθίζηση 0.01m στήριξης B



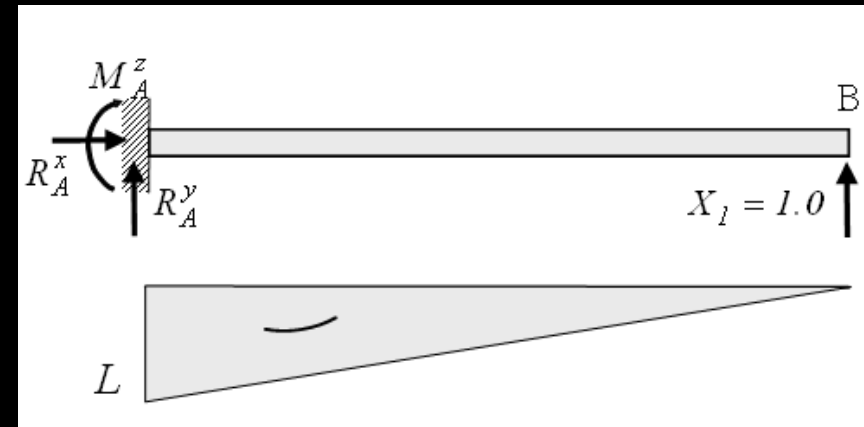
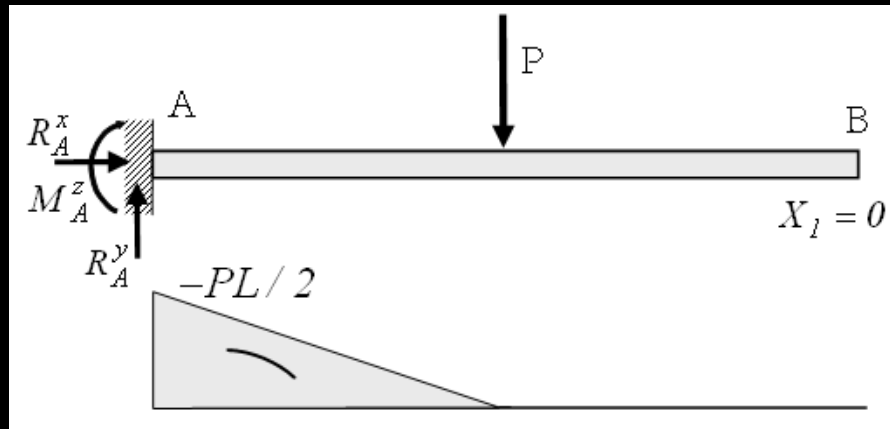
- μία φορά υπερστατικός φορέας
- καθίζηση 0.01m στήριξης B
- ακλόνητη στήριξη A

=

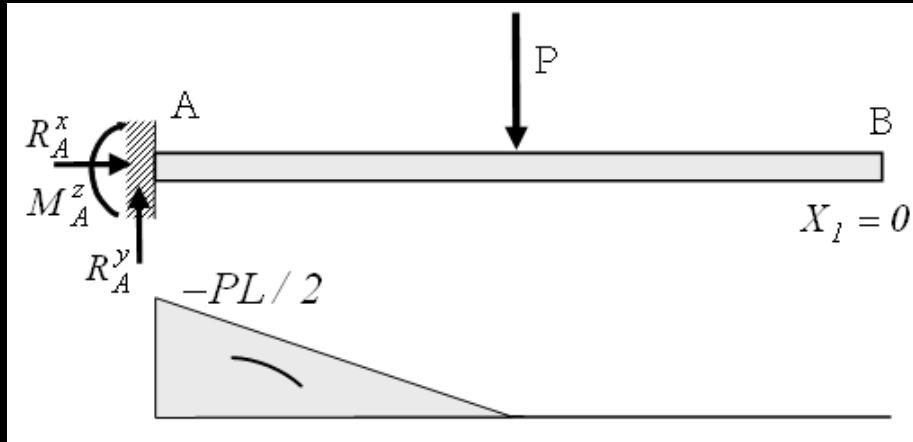
σύστημα-0

+

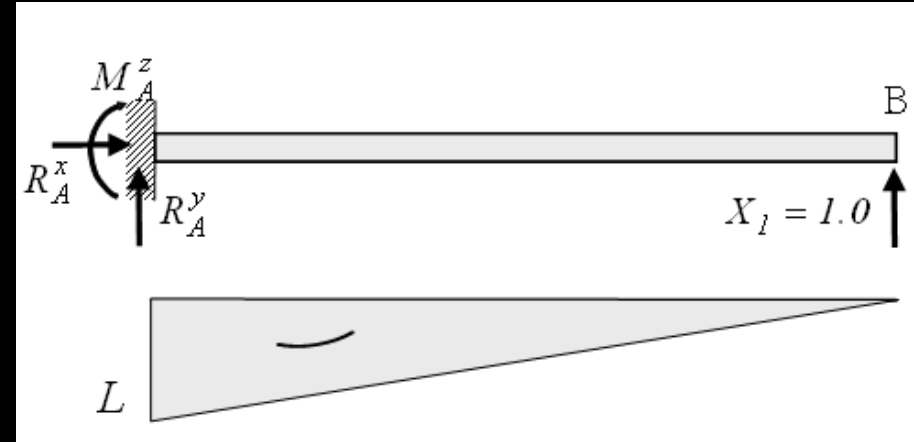
σύστημα-1



## σύστημα-0



## σύστημα-1



$$\delta_{10} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{(-P \cdot L)}{2} \cdot \left( 2L + \frac{L}{2} \right) = -\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot L \cdot L \cdot L = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = -0.01$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-\delta_{10} - 0.01}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} - 0.01}{\frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I}}$$

$$P = 10 \text{ KN}$$

$$I_z = 0.0002 \text{ m}^4$$

$$E = 200 \text{ GPA}$$

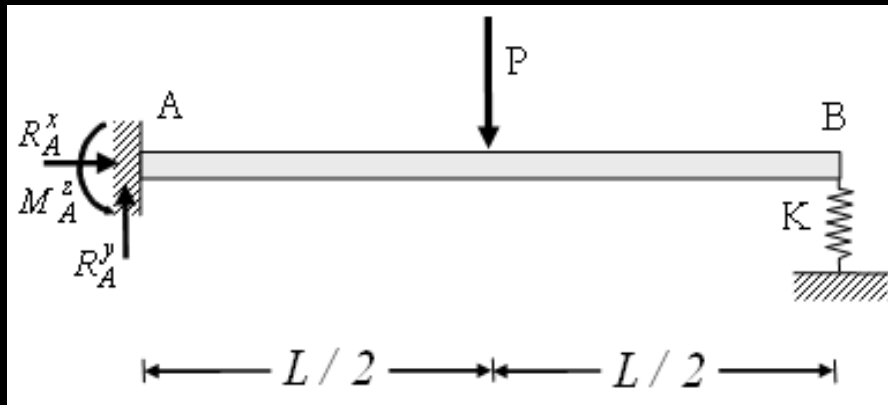
$$X_1 = \frac{-\delta_{10} - 0.01}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5 \cdot 10,000 \cdot 10^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.0002} - 0.01}{\frac{10^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.0002}} = \frac{0.026 - 0.01}{8.3333 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{0.016}{8.3333 \cdot 10^{-6}} = 1.92 \cdot 10^3 \text{ N} = 1.92 \text{ KN}$$

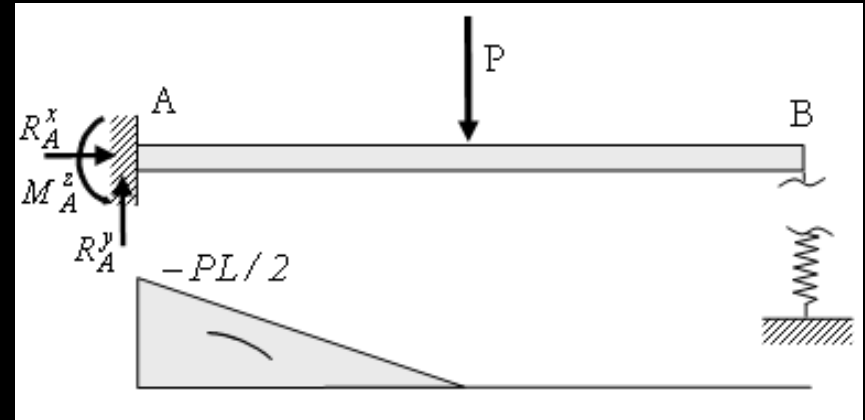
# Ελαστικές στηρίξεις

- το έδαφος δεν είναι στην πραγματικότητα πλήρως απαραμορφώσιμο  
⇒ παραμορφώνεται λόγω των φορτίων της κατασκευής
- η παραμορφωσιμότητα του εδάφους μπορεί να ληφθεί υπόψη χρησιμοποιώντας ισοδύναμα ελαστικά ελατήρια στις στηρίξεις
  - ελατηρία μεταθέσεων:  $K_x$ ,  $K_y$  και  $K_z$  [N/m]
  - ελατηρίων στροφών :  $K_{\phi x}$ ,  $K_{\phi y}$  και  $K_{\phi z}$  [Nm/radian]
- οι τιμές των ελατηρίων μπορούν να εκτιμηθούν από
  - τα μηχανικά χαρακτηριστικά του εδάφους
  - τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων θεμελίωσης

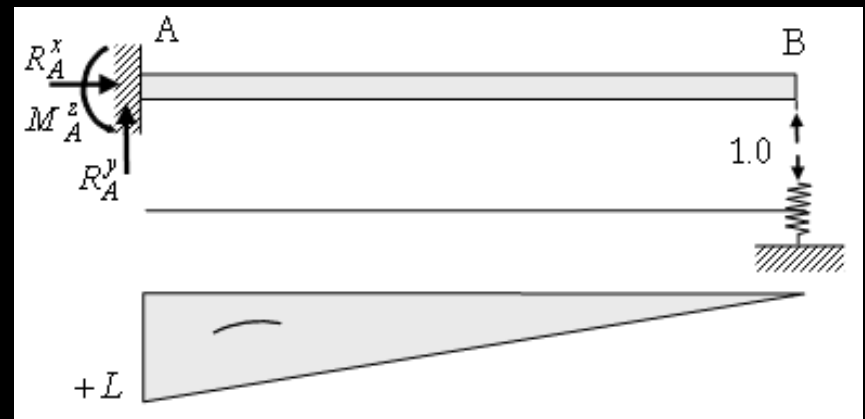
θεωρώντας ότι η στήριξη  $B$  της δοκού του 1<sup>ου</sup> παραδείγματος εδράζεται σε παραμορφώσιμο έδαφος:



σύστημα-0



σύστημα-1





σύστημα-0  
σύστημα-1

$$\delta_{10} = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{(-P \cdot L)}{2} \cdot \left(2L + \frac{L}{2}\right) = -\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

σύστημα-1  
σύστημα-1

$$\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} \cdot L \cdot L \cdot L + \frac{1}{K_y} = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{K_y}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$



$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5 \cdot P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}}{\frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{K_y}}$$